



Notion de chaos : approche dynamique et problemes d'identification

Dominique Guegan

► To cite this version:

Dominique Guegan. Notion de chaos : approche dynamique et problemes d'identification. [Rapport de recherche] RR-1623, INRIA. 1992. inria-00074938

HAL Id: inria-00074938

<https://inria.hal.science/inria-00074938>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

1 9 9 2



ème

anniversaire

N° 1623

Programme 5
Traitement du Signal,
Automatique et Productique

**NOTION DE CHAOS
APPROCHE DYNAMIQUE ET
PROBLEMES D'IDENTIFICATION**

Dominique GUEGAN

Février 1992



★ R R - 1 6 2 3 ★

NOTION DE CHAOS APPROCHE DYNAMIQUE ET PROBLEMES D'IDENTIFICATION

Notion of chaos
Dynamical approach and problems of identification

Dominique GUEGAN
Université Paris XIII - URA 742.
Institut Galilée
Avenue Jean Baptiste Clément
93430 Villetaneuse. France.

Résumé: Dans ce document nous donnons une présentation intuitive de la notion de chaos, puis nous présentons les différentes dimensions relatives à cette notion. Nous considérons plusieurs estimations de ces dimensions ainsi que les propriétés statistiques de ces estimateurs. Nous abordons les problèmes de tests relatifs aux chaos et nous traitons du problème de la prédiction. Les problèmes relatifs aux algorithmes à mettre en place sont envisagés. Nous donnons une bibliographie commentée assez fournie bien que non exhaustive sur le sujet. Enfin, en annexe, nous présentons les systèmes dynamiques d'ordre 1 puis d'ordre supérieur ceci en relation avec la notion de chaos développée dans ce document.

Mots Clefs: Systèmes dynamiques. Processus non linéaires. Chaos. Dimension. Identification. Estimation. Test. Prédiction.

Abstract: In this paper, we first give a naive presentation of chaos, then we study the different dimensions relative to the chaos. We consider the estimations of these dimensions and their statistical properties. We have a look on the problem of tests and to the prediction approach. We give a very extensive but not exhaustive bibliography. At last, we present the dynamical systems of order one and greater than one, in relation with the notion of chaos investigated in this paper .

Keywords: Dynamical system. Nonlinear Processes. Chaos. Dimension. Identification. Estimation. Test. Prediction.

La présentation des chaos développée dans ce document est composée de plusieurs parties indépendantes et complémentaires.

Dans une première partie, nous présentons la notion de chaos d'un point de vue très intuitif. Il s'agit d'une part de savoir pourquoi de manière récente tant de chercheurs d'origines très diverses se sont intéressés à cette approche déterministe, d'autre part d'appréhender les points de vue abordés pour tenter de cerner ce problème si complexe. Le but est de comprendre comment ce type de modèles peut apporter un éclairage différent et complémentaire, en terme de modélisation, sur des événements que l'on n'arrive pas à expliquer complètement par l'approche stochastique.

Dans une deuxième partie, nous présentons les différentes démarches, connues jusqu'à présent, permettant de décider si une série de données présente un comportement chaotique ou non. Il s'agit de définir la dimension de l'espace dans lequel évoluent ces données. Cette dimension pouvant être calculée soit à partir de la relation de récurrence si le système dynamique sous jacent est connu, soit à partir des observations elle-mêmes.

Dans une troisième partie, nous considérons le point de vue modélisation et inférence statistique. Nous traitons des problèmes d'estimation, de tests et de prédiction. Nous abordons quelques problèmes relatifs aux algorithmes à mettre en place.

Dans une quatrième partie, nous donnons une bibliographie assez fournie bien que non exhaustive. Nous commentons l'ensemble des références proposées, suggérant ainsi un parcours de lecture pour toute personne intéressée par le sujet.

Enfin dans une cinquième partie, qui se présente comme une annexe, nous présentons les systèmes dynamiques d'ordre 1 puis d'ordre supérieur. La démarche se veut simple, nous cherchons simplement à préciser quelques définitions, et nous en profitons pour donner quelques exemples.

Remerciements: Ce travail a été effectué en partie dans le cadre du projet CLOREC que nous remercions pour son chaleureux accueil. Nous remercions aussi Peter Caines pour les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble sur certains points développés dans ce document et pour la relecture minutieuse qu'il en a faite.

1 Introduction

1.1 D'où vient cette idée de chaos?

L'idée de départ est que l'on est capable de simuler des trajectoires "presques" identiques à partir d'équations stochastiques ou d'équations déterministes du type suivant:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t-1)), \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^k. \quad (1.1)$$

Il semble alors que l'aléa soit généré à cause de la dépendance du processus aux conditions initiales. Ainsi une petite perturbation de la condition initiale peut conduire à des réalisations totalement différentes. Ce phénomène peut s'interpréter en considérant qu'une petite erreur peut produire une grosse erreur. Notons que pour un processus ergodique, l'instabilité observée à l'origine, due à une perturbation des conditions initiales, ne peut que se transmettre sur le phénomène de prédiction, c'est à dire que les prédictions reproduiront cette même instabilité. Si alors un tel phénomène se produit, ceci peut permettre de mettre en évidence un comportement chaotique.

Des domaines de recherche très variés sont intéressés par cette dynamique chaotique. Au départ, il s'est agi de comprendre des phénomènes de turbulence rencontrés dans des liquides, dans des systèmes thermochimiques. Des domaines comme la médecine ou l'économie se sont par la suite intéressés à cette approche. En économie et en finance on a cherché soit à expliquer des séries très mouvementées, soit à comprendre la dynamique sous-jacente aux taux de change. Notons que le phénomène chaotique est un phénomène jusqu'à présent non résolu et la découverte des systèmes dynamiques exhibant des oscillations chaotiques a fourni beaucoup d'espoir, mais le phénomène est très complexe et ne permettra pas d'arriver à une compréhension de tous les processus "non réguliers", (voir le paragraphe 4).

1.2 "Routes" pour identifier un phénomène chaotique.

Supposons que nous disposions d'une série d'observations $x(1), \dots, x(n)$. Une première approche consiste à observer le mouvement mesuré. Il est alors important de pouvoir déterminer l'existence d'un élément non linéaire dans le système (ceci peut être parfois obtenu par l'étude physique du système sous jacent), et de vérifier à la source, l'existence d'une "entrée" aléatoire. Le but

dans cette approche est d'établir l'existence d'une vibration chaotique (aucun phénomène périodique n'est alors apparent). Plusieurs étapes peuvent être considérées:

1. Si l'on dispose des observations $x(t)$, il faut obtenir l'espace d'état correspondant. A partir de la série d'observations $x(t)$, on construit une série vectorielle $\mathbf{x}(t)$ représentant l'état du système qui est régi par une équation du type:

$$\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t-1)),$$

ou plus généralement par:

$$\mathbf{x}(t) = f(x(t-1), x(t-2), \dots, x(t-n)),$$

où f est une fonction non linéaire à déterminer.

Le premier problème est donc la construction de cet espace d'état (ou espace des phases) à partir des observations, et ensuite la détermination de la dimension de cet espace, appelée "dimension de plongement" ("embedding" dimension), (voir le paragraphe 2). Cela ne veut pas dire que l'on ne peut pas définir la notion de chaos pour des processus généraux stochastiques ergodiques et/ou stationnaires. Seulement l'approche par l'espace d'état permet de mieux appréhender le problème, dans la mesure où c'est dans cet espace que l'on peut espérer définir de manière analytique le système dynamique qui régit le phénomène observé, en faisant varier la dimension de l'espace d'état.

L'approche la plus simple pour construire l'espace d'état est de construire un "pseudo-espace" d'état, en considérant le vecteur de dimension d : $\mathbf{x}(t)$, construit à partir de l'observation elle-même et des $(d-1)$ valeurs retard:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau), \dots, x(t-(d-1)\tau)),$$

où τ est un retard choisi de manière appropriée, fixée; le choix de τ est très sensible, car si τ est trop petit ou trop grand, on perd de l'information.

2. Si l'on se place alors dans l'espace d'état ou le "pseudo-espace" d'état, on cherche à déterminer l'existence d'attracteurs chaotiques. Afin de définir une relation fonctionnelle qui permette de détecter la présence de chaos, on construit l'application de Poincaré ("return map"). Celle-ci est obtenue en "sectionnant" l'espace d'état par une sous variété de dimension inférieure à celle de l'espace d'état. A partir de l'application de Poincaré, on peut mettre en évidence les attracteurs et déterminer le bassin d'attraction. Ceci passe évidemment par l'étude des frontières du bassin d'attraction.
3. Les propriétés quantitatives de l'attracteur à étudier sont:
 - La sensibilité aux conditions initiales, mesurée, par exemple, par les exposants de Lyapunov.
 - Le spectre de Fourier, mesuré par la transformée de Fourier rapide. Il peut permettre de mettre en évidence la présence de vibrations chaotiques dans le cas d'un spectre large.
 - La dimension fractale de l'attracteur.
4. L'importance des paramètres du système. Le système peut dépendre ou non de paramètres. S'il en dépend, ceux-ci lors de leur variation peuvent mettre en évidence des bifurcations qui sont à déterminer. Par exemple dans l'équation logistique, qui dépend du paramètre λ , définie par:

$$x(t) = \lambda x(t-1)[1 - x(t-1)],$$

le doublement de la période produit des comportements complexes, mesurés par le nombre de Feigenbaum. On part d'un système qui a un mouvement périodique fondamental, et en faisant varier le paramètre λ , le processus arrive à une bifurcation où l'évolution du processus double la période. La valeur critique pour ces doublements est:

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \delta = 4,66.$$

Après cette valeur critique, le processus devient chaotique pour un ensemble de valeurs des paramètres.

Notons aussi qu'un système dynamique déterministe peut être considéré comme chaotique, alors qu'il n'est que pseudo-aléatoire et non déterministe. Dans le cas de la fonction triangulaire, qui ne dépend pas d'un paramètre et qui est définie par:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & 0 < x_n < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n & \text{sinon} \end{cases}$$

le comportement de cette application est souvent considéré comme chaotique, alors qu'elle n'est pas déterministe dans le sens où son passé n'est pas déterminé de manière univoque, puisque

$$x_{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{2}x_n & 0 < x_n < \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}x_n & \text{sinon} \end{cases}$$

5. On peut distinguer plusieurs sortes de mouvements chaotiques:

- Des mouvements chaotiques transients: ce phénomène se repère par la mise en évidence de deux oscillations simultanément périodiques.
- Des mouvements chaotiques intermittents: cela correspond à l'observation de longues périodes de mouvements périodiques avec des explosions de chaos.

6. Des tests peuvent être construits et utilisés pour détecter des chaos. Par exemple:

- A partir des exposants de Lyapunov: si ceux-ci sont positifs ils impliquent une dynamique chaotique car ils mesurent la sensibilité aux conditions initiales.
- A partir de la dimension de l'orbite: si celle-ci est fractale, elle implique l'existence d'un attracteur étrange. L'idée sous jacente étant que l'orbite tend à remplir un sous espace de l'espace d'état, qui est de dimension non entière, ce qui est la marque de l'existence d'un attracteur étrange.

1.3 Définition intuitive

Nous pouvons maintenant donner une définition intuitive de la notion de chaos.

Definition 1.1 Un système dynamique chaotique est un système dynamique déterministe, sensible aux conditions initiales, que l'on ne peut pas prédire sur une longue période.

Remarque 1.2

1. On est amené à distinguer des systèmes avec ou sans paramètres (voir ci-dessus).
2. Un processus chaotique est presque ordonné dans le sens où il obéit à une équation déterministe dans l'espace des phases ou espace d'état, alors que quand on se place dans l'espace des temps où l'on observe le phénomène lui-même, celui-ci est désordonné.
3. Le processus est déterministe dans le sens où si les conditions initiales étaient répétées de manière systématique, l'évolution du système dans le temps serait toujours la même.
4. La sensibilité aux conditions initiales signifie que même si la différence est très petite entre deux valeurs initiales, soit $\delta(x_0)$, alors au temps t , les solutions du système dynamique peuvent être localement radicalement différentes c'est à dire qu'il existe $T_x > 0$ tel que $|\delta(x(t))| \cong |\delta(x_0)| \exp \lambda t$, pour $\lambda > 0$, et $t > T_x$.

L'utilisation des exposants de Lyapunov pose un problème dans la mesure on l'on dispose seulement pour ceux-ci d'une définition formelle et asymptotique, voir paragraphe 2.

5. Un processus chaotique est tel que sa fonction de corrélation décroît vers 0 quand l'horizon tend vers l'infini. Cette propriété de décroissance assure que les solutions divergent les unes des autres. Si la fonction de corrélation est nulle pour des horizons non nuls, alors c'est un processus non corrélé, et on parle de "bruit blanc déterministe".

6. Un processus chaotique est apériodique. Cette notion est importante car même pour des valeurs des paramètres qui mettent le système dans un régime chaotique, les équations dynamiques ont des solutions périodiques pour des valeurs initiales spéciales (appartenant à un ensemble de mesure nulle). De telles solutions fortement ordonnées ne peuvent pas être regardées comme chaotiques, mais périodiques si c'est sur un ensemble de mesure nulle. S'il n'existe pas de paramètres alors une solution périodique est fortement prévisible et donc par intuition non chaotique.
7. On suppose en général qu'un système dynamique chaotique est stationnaire car ainsi ses propriétés statistiques élémentaires ne dépendent pas du temps. De plus, on suppose qu'il existe une mesure invariante liée au système dynamique qui satisfait les conditions initiales.

1.4 Quelles approches utilisées?

Nous allons ici faire un peu de botanique et relever les approches considérées dans la littérature pour traiter le problème des chaos. Les points de vue sont bien sûr différents suivant les domaines d'études concernés. Nous sommes plutôt intéressée par une démarche que nous qualifierons de quantitative. Deux points de vue se distinguent:

1. Une approche "dimension". On cherche à mesurer une dimension permettant de caractériser le processus chaotique. Par exemple dans les modèles de turbulence avec les travaux de Ruelle (1973) et Takens (1981). On quantifie les chaos en estimant un invariant et on cherche une borne inférieure du nombre de variables nécessaires pour caractériser les modèles physiques étudiés. En économétrie, Brock et Dechert (1988), entre autres, construisent des tests d'hypothèse en se servant de la dimension de corrélation et des exposants de Lyapunov.
2. Une approche "modèle de prédiction". Le but est de faire de la prédiction, d'utiliser le moins possible de données, d'identifier la dimension de plongement. Il s'agit d'une approche par espace d'état, voir par exemple, les travaux de Farmer et Sidorovitch (1987), Castagli (1989). Les types de modèles retenus sont: le modèle polynomial, Gabor (1954),

le modèle linéaire par morceaux, Farmer (1982), le modèle rationnel, Bayly, Goldhirsh et Orszag (1987), les modèles de réseaux neuronaux, Lapedes et Farber (1987), les modèles avec fonctions radiales, Castagli (1989), les modèles avec fonctions splines, Nichka, Ellner, McCaffrey et Gallant (1991).

1.5 Domaines d'applications

Les domaines d'application des séries chaotiques sont très étendus. A l'origine ces systèmes dynamiques ont servi à maîtriser les phénomènes de turbulence dans les fluides; dans le domaine de la chimie, il y a l'étude de la réaction de Bélusov-Zabolinsky, l'étude de certains gaz; en physique, on peut noter l'étude du pendule perturbé, des phénomènes optiques; en astronomie, l'étude des étoiles, des galaxies, du satellite hypérion, des quasars; en géophysique, les tremblements de terre; en médecine, les rythmes cardiaques, le sommeil, le comportement épileptique; en biologie, l'étude des populations; en économie, les séries irrégulières, les taux de change, etc...

La bibliographie relative à ces problèmes est très abondante et variée (voir le paragraphe 4). Elle peut soit faire appel à des notions théoriques et mathématiques assez complexes, soit expliquer des phénomènes expérimentaux pour lesquels on essaie de détecter un phénomène chaotique particulier. En mathématiques, l'exemple le plus connu conduisant à un comportement chaotique, ayant une expression analytique, est l'équation logistique, voir aussi ci-dessus, la remarque sur la fonction triangulaire. D'autres applications sont développées en biologie, pour une revue, voir May (1987). Se reporter au paragraphe 4 pour une revue plus générale, bien que non exhaustive, sur les applications.

2 Etude qualitative et quantitative des chaos

Dans cette partie on cherche à caractériser un système dynamique chaotique défini par (1.1), de manière qualitative et quantitative.

2.1 Etude qualitative

Cette étude consiste à étudier:

1. L'évolution de la série $x(n)$.
2. Le spectre et plus particulièrement la puissance du spectre qui consiste à prendre le carré de l'amplitude de Fourier par unité de temps:

$$S(w) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \int_0^n e^{iwt} x(t) dt \right|^2.$$

$S(w)$ indique si le système est périodique ou quasipériodique. S'il est périodique de fréquence w , il a des Dirac en w et des harmoniques en $2w, 3w, \dots$. Quand le spectre obtenu a une large bande, celui-ci est toujours difficile à analyser. Ce phénomène est en général dû, soit à un comportement chaotique, soit à un "bruit", soit au mélange des deux. Le problème consiste à distinguer entre ces deux alternatives.

3. La fonction d'autocorrélation.
4. Les distributions bivariées de la suite d'observations $x(n)$ contre $x(n - \tau)$ pour $\tau \geq 1$.

Si après cette première approche le système étudié semble présenter des non linéarités ou des comportements complexes, on peut aussi l'analyser à partir du bispectre ou d'autres statistiques qui prennent en compte des moments supérieurs à l'ordre 2. En effet les modèles chaotiques sont tous non linéaires (mais tous les modèles non linéaires ne sont pas chaotiques). On peut aussi considérer la distribution des accroissements de la série qui permet d'avoir une idée du type de modèle vers lequel on s'oriente, soit on est en présence d'un modèle avec une distribution à accroissements Δx gaussien, ou bien avec une distribution asymptotique quasi exponentielle $P(\Delta x) \simeq \exp(-\alpha \Delta x)$. La présence de ce dernier phénomène peut être l'indication de ce que les physiciens appellent le phénomène d'intermittence: signal présentant des explosions avec des périodes de calme relatif.

Afin d'avoir une connaissance plus approfondie d'un tel système, on peut essayer de le caractériser par sa dimension, son entropie métrique et les exposants caractéristiques de Lyapunov. Plusieurs approches sont donc possibles.

2.2 Etude quantitative

Nous commençons par présenter la notion de dimension. On en distingue deux types: les dimensions ne dépendant que d'une métrique et celles dépendant d'une métrique et d'une loi de probabilité. On cherche entre autre par cette approche à mesurer la dimension de l'attracteur lié au système dynamique considéré. La dimension d de l'espace d'état représente le nombre de coordonnées indépendantes décrivant la position d'un point sur l'attracteur, c'est donc le nombre de degrés de liberté minimum du système dynamique. L'attracteur que l'on étudie est étrange si sa dimension n'est pas entière. Le système auquel il correspond est alors dit chaotique. Cette dimension est difficile à obtenir, on l'appelle la "embedding" dimension. Plusieurs méthodes ont été proposées pour la mesurer, voir par exemple Broomhead et King (1986), Landa et Rosenblum (1991). Ces estimations sont utiles bien que la connaissance de cette dimension ne soit pas suffisante pour identifier un chaos. Elles donnent une connaissance a priori de d dont on peut se servir lors du calcul de la dimension de corrélation d_c définie en (2.9), qui semble plus facile à calculer et qui permet de caractériser des processus chaotiques. En effet pour calculer cette dernière dimension à l'aide de l'algorithme de Grassberger et Procaccia (1983), on se place dans l'espace des phases, et on se sert de d pour l'obtenir. Si l'on connaît d , le temps de calcul est énormément réduit, car on peut diminuer le nombre d'itérations. Cette remarque peut aussi s'appliquer au calcul des exposants de Lyapunov définis en (2.6).

2.2.1 Dimensions dépendant uniquement d'une métrique.

On considère un espace de points situés dans un espace d'état de dimension d . On recouvre cet espace par des cubes de côté ε . Soit $N(\varepsilon)$ le nombre de cubes nécessaires pour recouvrir cet espace. La dimension de Hausdorff-Besicovitch d_H (Hausdorff, (1919)) qui se confond avec la capacité introduite par Kolmogoroff (1958) est la limite si elle existe,

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}$$

quand ε tend vers 0.

Cette dimension est indépendante de la fréquence avec laquelle une trajectoire visite les différentes parties de l'attracteur. Pour ε petit, le nombre

minimal de cubes varie avec ε comme ε^{-d_H} . Si l'ensemble des points est réduit à 1 point, alors $N(\varepsilon) = 1$ et $d_H = 0$. C'est aussi la distance euclidienne du point. Si l'ensemble est un segment de longueur l , alors $N(\varepsilon) = l\varepsilon^{-1}$ et $d_H = 1$. Si l'ensemble est constitué de l'ensemble des points d'une surface S , alors $N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-2}$ et $d_H = 2$. Considérons l'ensemble de Cantor constitué d'une infinité de points disjoints, obtenus à partir du segment unité sur lequel on pratique une succession d'opérations qui consiste à enlever tout d'abord le tiers central, puis à recommencer l'opération sur chacun des 3 segments restants, ceci une infinité de fois. La dimension d'un tel ensemble est intermédiaire entre 0 et 1. Pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$, le nombre d'éléments nécessaires pour recouvrir l'objet est $N(\frac{1}{3}) = 2$, pour $\varepsilon = \frac{1}{9}$, on a $N(\frac{1}{9}) = 4$, pour $\varepsilon = (\frac{1}{3})^m$, on a $N(\varepsilon) = 2^m$. On obtient ainsi:

$$d_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log 2^m}{\log 3^m} \simeq 0,63.$$

La distance ainsi calculée permet de caractériser des objets fractals. Si l'on considère le flocon de neige obtenu à partir d'une suite infinie de transformations qui consiste, partant d'un triangle équilatéral, à diviser chaque côté en 3 parties, puis à construire trois nouveaux triangles sur les tiers centraux et à réitérer de manière infinie, on obtient la courbe triadique de Koch qui a pour dimension

$$d_H = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26.$$

2.2.2 Dimensions dépendant d'une métrique et d'une loi de probabilité

Dans le cas précédent, on ne s'intéresse pas à la fréquence avec laquelle une trajectoire d'un attracteur visite les cubes. On peut rajouter une information supplémentaire en considérant la fréquence avec laquelle une orbite "typique" visite les différentes régions de l'attracteur. Pour chaque cube C et pour chaque condition initiale x_0 dans le bassin d'attraction, on définit par $\mu(x_0, C)$ la fraction de temps qu'une trajectoire partant de x_0 passe par C . Si presque tous les x_0 donnent la même valeur pour $\mu(x_0, C)$, on la note $\mu(C)$, sinon on prend le temps moyen. Donc la mesure invariante μ est le temps moyen des mesures de Dirac en chaque point $x(t)$ et peut être définie

par:

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \delta_{x(t)}.$$

μ est la mesure naturelle de l'attracteur. Notons P_i la probabilité pour la trajectoire $x(t)$ au temps t de tomber dans le i ème cube, alors $P_i = \mu(C_i)$.

On obtient une généralisation de la capacité en prenant en compte la fréquence de visites des cubes (Balatoni et Renyi, (1956)). On obtient ainsi la dimension de l'information qui est définie par

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}, \quad (2.1)$$

où

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \log \frac{1}{P_i}.$$

Si tous les cubes ont la même probabilité de visite: $I(\varepsilon) = \log N(\varepsilon)$ et $d_H = d_I$. Dans le cas où les probabilités sont inégales, $I(\varepsilon) < \log N(\varepsilon)$ et $d_H \geq d_I$.

On peut aussi définir les dimensions "généralisées":

$$d^{(q)} = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [\mu_i(C_i)]^q}{\log \varepsilon}. \quad (2.2)$$

Ces dimensions généralisées, quand q augmente, correspondent à la distribution des moments supérieurs du signal. Cette dimension est en général assez stable et est souvent utilisée. Si toutes les dimensions généralisées sont égales, alors le signal ne présente pas de comportement intermittent. Par contre si $d^{(q)} > d^{(q')}$ pour $q > q'$ alors le signal est intermittent.

Il peut être parfois suffisant de se limiter à l'étude d'une partie de l'attracteur, dans ce cas, on définit la V-capacité de la manière suivante:

$$d_H(V) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(\varepsilon, V)}{\log 1/\varepsilon}$$

où $N(\varepsilon, V)$ représente le nombre minimum de cubes de coté ε permettant de couvrir la fraction V de la mesure naturelle de l'attracteur. Les cubes peuvent être choisis de telle manière que leur mesure soit au moins V . Alors $d_H(1) = d_H$.

Takens (1981) a introduit la "pointwise" dimension que l'on définit de la manière suivante: si on note $B_\varepsilon(x)$ une boule de rayon ε centrée en x , x étant un point de l'attracteur, on a l'approximation suivante: $\mu(B_\varepsilon(x)) \sim \varepsilon^{d_p(\varepsilon)}$, où

$$d_p(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_\varepsilon(x))}{\log(\varepsilon)}. \quad (2.3)$$

Cette dimension est indépendante de x , et elle existe si μ est ergodique.

Notons que toutes les dimensions sont difficiles à calculer. Une connaissance géométrique de l'attracteur est nécessaire pour les calculer. Dans la littérature, on rencontre plusieurs conjectures concernant ces dimensions: les dimensions métriques ont toutes la même valeur $d = d_H$, les dimensions dépendant en plus des fréquences ont toutes la même valeur $d' = d_I = d_p(\varepsilon)$, et $d' < d$.

Pour obtenir une dimension, il faut faire le choix d'une mesure appropriée: elle doit être définie positive. Une bonne mesure μ_t peut-être obtenue en considérant la somme des carrés des accroissements du signal sur chacun des $N(\varepsilon)$ cubes (ou segments, en dimension 1), soit:

$$\mu_t(\varepsilon) = \sum_{t'=1}^n (\|x_{t'+1} - x_{t'}\|)^2 \Theta[t' - (t - \varepsilon/2)] \Theta[(t + \varepsilon/2) - t']$$

où Θ est la fonction de Heaviside, n le nombre total de points dans la série, $t - \varepsilon/2$ et $t + \varepsilon/2$ les bords inférieur et supérieur du chaque cube centré au point t , de diamètre ε .

On peut aussi se servir des propriétés de stabilité d'une orbite de l'attracteur pour connaître la dimension de ce dernier à partir du calcul des exposants de Lyapunov.

2.2.3 Exposants de Lyapunov

Cette approche n'est possible que si l'on a une connaissance du comportement analytique du système dynamique que l'on étudie. Supposons donc que le système dynamique soit régi par une équation du type suivant dans $\mathbf{R}$:

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x(n) \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2.4)$$

Considérons 2 valeurs initiales $x(0)$ et $x'(0)$. Au temps n , on a la relation suivante:

$$x(n) - x'(n) = f^n(x(0)) - f^n(x'(0)) \simeq \frac{d}{dx}(f^n)(x(0))(x(0) - x'(0))$$

où

$$f^n(x) = f(f(\dots f(x))) \quad n \text{ fois.}$$

Par la règle de différentiation, on a:

$$\frac{d}{dx}(f^n)(x(0)) = \frac{d}{dx}f(x(n-1)) \times \frac{d}{dx}f(x(n-2)) \dots \frac{d}{dx}f(x(0)). \quad (2.5)$$

Il est raisonnable de supposer que $\frac{d^n}{dx^n}$ croît (ou décroît) exponentiellement en n , en supposant que tous les facteurs dans l'expression (2.5) sont de taille comparable. Il en est de même pour $x(n) - x'(n)$. On peut définir un rapport moyen de croissance à partir de

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |D_{x(0)}(f^n)(\delta x_0)| \quad (2.6)$$

où $\delta x_0 = x(0) - x'(0)$, et où D est le symbole de différentiation. Si la mesure μ sous-jacente est invariante, le nombre λ est indépendant de $x(0)$, μ P.P.. λ est appelé l'exposant de Lyapunov.

Supposons maintenant que $x(n) \in \mathbf{R}^k$, où $x(n)$ est régi par l'équation (1.1) et où $J(x) = (J_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq k}$ représente le jacobien de (1.1):

$$J_{ij}(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}.$$

Notons $j_1(n), \dots, j_p(n)$ les valeurs propres de J_n rangées en ordre croissant où

$$J_n = [J(x(n))J(x(n-1)) \dots J(x(1))].$$

Alors les nombres de Lyapunov sont définis par

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} [j_i(n)]^{1/n}, \quad i = 1, \dots, k$$

(où l'on prend la nième racine positive).

La dimension de Lyapunov (Kaplan et Yorke, (1978)) est définie par

$$d_L = l + \frac{\log(\lambda_1 \dots \lambda_l)}{\log(1/\lambda_{l+1})}$$

où l est la plus grande valeur pour laquelle $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_l \geq 1$. Si $\lambda_1 < 1$, on pose $d_L = 0$. Si $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_l \geq 1$, on pose $d_L = k$. On peut remarquer que $d_H = d_L$.

On définit l'entropie d'une mesure μ par

$$h(\mu) = \sum \text{des exposants de Lyapunov positifs.}$$

où les exposants de Lyapunov sont définis par (2.6). Notons que la somme des exposants de Lyapunov permet de décrire la contraction d'un ensemble. A partir du moment où un attracteur étrange résulte d'un étirement ou d'un repliement, l'un des exposants doit être positif. Inversement un exposant de Lyapunov positif implique la sensibilité aux conditions initiales et décrit donc un phénomène chaotique.

L'approche à partir des exposants de Lyapunov nécessite la connaissance de l'application f , ou son estimation, qui est un problème délicat. On peut aussi considérer l'approche suivante.

2.2.4 Mesure de la corrélation spatiale

Notons $x(t), t = 1, \dots, n$ les observations dont on dispose. Une méthode classique pour obtenir un pseudo-espace des phases est de considérer le vecteur de dimension d : $\mathbf{x}(t)$ construit à partir du signal lui-même et des $(d - 1)$ valeurs retard:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (d - 1)\tau))$$

où τ est un retard choisi de manière appropriée, fixé (voir Fraser et Swinney, (1986)). Les résultats peuvent être rendus indépendants de τ . La procédure de "plongement" ("embedding") peut être vue physiquement comme une substitution de l'espace actuel des observations par l'espace construit à partir des dérivées successives du signal. On s'intéresse aux propriétés du système dynamique dans le pseudo-espace des phases en augmentant la "embedding"

dimension d . A cette fin on définit la dimension de corrélation d_c . Posons

$$C_d^n(r) = \frac{1}{n^2} \sum_{t,t'=1}^n \Theta[r - \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t') \|] \quad (2.7)$$

où Θ est la fonction de Heaviside.

La dimension de corrélation va mesurer la possibilité pour 2 points de la série, dans l'espace des phases reconstruit avec la dimension d , d'être proche de moins d'une distance r . Si le système sous-jacent est gouverné par un attracteur étrange alors on a, pour de petites valeurs de r ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_d^n(r) \rightarrow C_d(r)$$

et quand $r \rightarrow 0$

$$\frac{\log C_d(r)}{\log r} = d^{(2)} \quad (2.8)$$

où $d^{(2)}$ appartient à la classe des dimensions généralisées définies en (2.2).

Afin d'obtenir la dimension d_c , on suit la procédure de Grassberger-Procaccia (1983) qui consiste à représenter $\log C_d(r)$ par rapport à $\log r$ et à regarder sur quelle portion de courbe la représentation est approximativement linéaire. La pente sur cette portion de courbe définit la dimension de corrélation, donc

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_d(r)}{\log r}. \quad (2.9)$$

Pour obtenir d_c , on augmente la valeur de d jusqu'à ce que le rapport (2.9) apparaisse stable. Les propriétés métriques de d_c ont été étudiées par Brock et Dechert (1987).

L'entropie est aussi liée à la dimension de corrélation. On peut la définir par:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} K(d)$$

où

$$K(d) = \frac{1}{\tau} \log \frac{C_d(r)}{C_{d+1}(r)}$$

C'est une approximation de la capacité introduite par Kolmogorov (1958). C'est une mesure du degré de chaoticité du système. Un système non chaotique a une entropie nulle, tandis que des systèmes chaotiques ou stochastiques sont caractérisés par des valeurs finies ou divergentes de K . Cette

entropie est liée à l'exposant de Lyapunov, c'est une borne supérieure de la somme des exposants positifs de Lyapunov. D'un point de vue physique, la quantité $\frac{1}{K}$ est importante, elle fournit un estimateur du temps pendant lequel le système est prédictible.

La convergence de la dimension de corrélation quand d croît et la valeur finie de l'entropie K sont des indicateurs que le système est dominé par un attracteur étrange de dimension faible. Dans la pratique, on reconstruit plusieurs espaces des phases et pour chacun la dimension de corrélation est calculée, quand celle-ci sature, d augmentant, alors le système dynamique est supposé être gouverné par un attracteur étrange.

3 Approche statistique des chaos

3.1 Estimation de f

Le problème de l'estimation de f a été posé depuis longtemps. On peut en particulier se reporter aux travaux cités précédemment concernant les différents types de modèles proposés par Gabor (1954), Farmer (1982), Lapedes et Farber (1987), Bayly, Goldhirsh et Orszag (1987), Castagli (1989).

Une estimation de f par estimateur à noyau est proposé récemment par Cheng et Tong (1991). Nichka, Ellner, McCaffrey et Gallant (1991) utilisent les fonctions splines et les réseaux neuronaux.

3.2 Estimation des dimensions

Le problème de l'estimation des différentes dimensions pour des données empiriques est un problème qui n'est apparu que récemment dans l'étude des systèmes dynamiques, voir Smith (1991). Plusieurs estimateurs ont été proposés dans la littérature concernant la "embedding" dimension, la "pointwise" dimension et la dimension de corrélation. On note toujours $x(t), t = 1, \dots, n$ les observations dont on dispose.

1. Estimation de la "Embedding" dimension.

- On suppose d fixé a priori. Dans l'espace des phases reconstruit à partir des observations, on choisit une base de dimension l .

Comme il n'y a pas de bruit, le développement de $\mathbf{x}(t)$ par rapport à cette base est approché si $l < d$, exact si $l \geq d$. appelons $u_1, \dots, u_l$ les vecteurs de la base, alors $\mathbf{x}(t)$ est représenté dans cette base par

$$\mathbf{x}^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^l [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)) \cdot u_i] u_i$$

où $\mathbf{x}(0)$ est constant. On prend $\mathbf{x}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{x}(t)$. Par cette approche, on essaie d'approximer l'attracteur dans l'espace de dimension d par un ensemble de points de dimension l . Ces vecteurs de base sont choisis de telle manière que l'erreur d'approximation ϵ_l entre $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}^{(l)}(t)$ soit minimale. Plus l est grand, plus cette erreur va décroître. Elle est définie par:

$$\epsilon_l = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(l)}(t))^2$$

La "embedding" dimension de l'attracteur du système dynamique est déterminée par l'apparition d'un plateau caractéristique quand on représente l'erreur ϵ_l en fonction de l .

- Cheng et Tong (1991) propose un estimateur de la "embedding" dimension par validation croisée. Pour cela ils considèrent tout d'abord un estimateur non paramétrique de f en supposant que le système dynamique est régi par le modèle suivant:

$$x(t) = f(x(t-1), \dots, x(t-d)) + \epsilon(t)$$

où $\epsilon(t)$ est un bruit blanc supposé petit. On note $\hat{f}_n$ l'estimateur à noyau de f , l'estimateur $\hat{d}$ de d est celui qui minimise la somme des carrés des erreurs:

$$RSS = \frac{1}{n-s+1} \sum_t (x(t) - \hat{f}_n(x(t)))^2 W_t$$

pour une certaine fonction de poids régulière $W(t)$ et pour un nombre $s > 0$ choisi pour minimiser les effets de bord. Si la série $x(t)$ est bornée, l'estimateur ainsi construit est consistant.

2. Estimation de la "Pointwise" dimension.

Pour la "pointwise" dimension définie par (2.3), Cutler et Dawson (1989, 1990) obtiennent un estimateur consistant en utilisant la distance des plus proches voisins, notée ρ_n , définie par:

$$\rho_n(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \|x(t) - x\|,$$

où x est un point choisi sur la trajectoire. On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\rho_n)}{\log 1/n} = \frac{1}{d_p(\varepsilon)}, \quad \text{en probabilité 1.}$$

Si on peut montrer que les observations $x(t)$ sont obtenues à partir d'une distribution régulière, les auteurs obtiennent la distribution asymptotique d'une transformation linéaire de l'estimateur. Ceci permet alors de construire des intervalles de confiance et un test d'hypothèse sur $d_p(\varepsilon)$. L'approche, ici, n'est pas directe.

3. Estimation de la dimension de "Correlation".

- Pour une suite de nombres réels, $r_1, r_2, \dots, r_m$, la méthode standard pour estimer d_c revient à représenter $\log C_d(r_i)$ en fonction de $\log r_i$ et de prendre la pente b des droites des moindres carrés pour toutes les paires $(\log r_1, \log C_d(r_1)), \dots, (\log r_m, \log C_d(r_m))$. On a alors le théorème suivant dû à Denker et Keller (1986):

Theorème 3.1 *Soit le système dynamique (1.1) supposé ergodique, avec de bonnes propriétés de mélange. Si $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n)$ sont les observations d'une orbite du système, alors:*

- Pour chaque $r > 0$ fixé, $C_d^n(r)$ et $\log C_d^n(r)$ convergent en probabilité 1 vers $C_d(r)$ et $\log C_d(r)$ respectivement quand $n \rightarrow \infty$.*
- Pour chaque vecteur $C_d(r) = (C_d(r_1), \dots, C_d(r_m))$, il existe une matrice définie positive $m \times m$: $U_m = (u_{ij})$ telle que la suite des vecteurs normalisés $\sqrt{n}(C_d^n(r) - C_d(r)) \rightarrow N_m(0, U)$ en distribution quand $n \rightarrow \infty$, où $N_m(0, U)$ représente la loi gaussienne de dimension m , centrée, de matrice de variance-covariance U .*

Remarque 3.2 On a le même résultat avec $\sqrt{n}(\log C_d^n(r) - \log C_d(r))$ avec comme matrice de variance-covariance $V = (v_{ij})$ où $v_{ij} = \frac{u_{ij}}{C_d(r_i)C_d(r_j)}$.

- On peut aussi considérer la relation suivante (Cutler, (1991)):

$$\log C_d(r) = \log\left(\frac{C_d(r)}{r^d}\right) + d_c \log r = \alpha(r) + d_c \log r. \quad (3.1)$$

A partir de la méthode décrite précédemment, $\log C_d(r)$ étant estimé, on obtient la relation suivante

$$\log C_d(r_i) = \alpha(r_i) + d_c \log r_i + e_i$$

où les e_i sont les erreurs dues à l'estimation. Notons $\underline{d}_c(r) = (d_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ la pente de $\frac{S_{r \log r}}{S_{rr}}$, où si l'on considère m points $(u_1, w_1), \dots, (u_m, w_m)$, S_{uv} est définie par $S_{uv} = \sum_{i=1}^m (u_i - \underline{u})(w_i - \underline{w})$, où $\underline{v}$ représente la moyenne arithmétique des valeurs de v . On peut alors calculer le biais de l'estimateur de la pente $\underline{d}_c$ et avoir une idée de son comportement asymptotique.

Theorème 3.3 Supposons que les hypothèses du théorème précédent soient vérifiées et que le vecteur des erreurs $\sqrt{n}(e_1, \dots, e_m)$ suive une loi normale $N_m(0, V)$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{b}(r) = \underline{d}_c(r)$$

où

$$\underline{b}(r) = S_{rr}^{-1} \sum_{i=1}^m (r_i - \underline{r}) \log C_d(r_i).$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\underline{b}(r)] = \underline{d}_c(r)$$

et

$$\sqrt{n}(\underline{b}(r) - \underline{d}_c(r)) \sim N(0, W)$$

où $W = (W_{ij})$, avec

$$W_{ij} = S_{rr}^{-2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (r_i - \underline{r})(r_j - \underline{r}) d_{ij}.$$

Remarque 3.4

- (a) Ce théorème fournit un estimateur consistant de $\underline{d}_c(r)$.
- (b) Le plus utile étant de savoir quand $\underline{d}_c(r)$ est proche de d_c , notons $\underline{e}(r)$ l'erreur:

$$\underline{e}(r) = \underline{d}_c(r) - d_c = S_{rr}^{-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \underline{r}) \alpha(r_i).$$

Le théorème suivant montre comment on peut choisir r pour forcer $\underline{e}(r)$ à tendre vers zéro.

Theorème 3.5 *Supposons que*

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0^-} \frac{\log C_d(r)}{\log r}$$

existe. Alors:

- (a) $\lim_{r \rightarrow 0^-} \left[\frac{\alpha(r)}{\log r} \right] = 0$.
- (b) *Supposons qu'il existe une constante α telle que*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \alpha(r) = \alpha.$$

Posons $\underline{r} = (r_1, \dots, r_m)$ et soit $0 < s < 1$. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} e(s^k \underline{r}) = 0$ alors $\underline{e}(r) \rightarrow 0$.

- (c) *Soit $r_0 > 0$ et $0 < s < 1$. Pour chaque m , soit le vecteur $\underline{r}_m = (s^m r_0, s^{m+1} r_0, \dots, s^{2m-1} r_0)$ alors:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{e}(\underline{r}_m) = 0.$$

Remarque 3.6 Le rôle de la taille des échantillons est fondamental pour s'assurer de la robustesse des estimateurs définis précédemment, (cf, Smith, (1988), Broomhead et Jones (1989)).

- Dans le cas particulier où, pour le calcul de la dimension de l'information définie par (2.1), on choisit comme estimateur "naïf" de P_i , la probabilité d'un point de se trouver dans le i ème cube: $P_i = \frac{n_i}{n}$, où n_i

représente le nombre d'observations se trouvant dans le i ème cube et n le nombre d'observations total, Grassberger (1985, 1988) a montré que pour n fini, on introduit un biais dans le calcul de cette dimension, sauf quand $d = 2$.

- Dans le cas de la dimension de corrélation définie par (2.9) appelons $\hat{d}_c$, l'estimateur de la dimension de corrélation de l'attracteur obtenue en considérant la régression de $\log C_d(r)$ sur $\log r$. Ramsey et Yuan (1989, 1990), de manière empirique, à partir d'exemples d'applications analytiques, dont l'application de Hénon, montrent qu'une explication raisonnable, de l'influence des paramètres n et d sur le calcul de l'estimateur $\hat{d}_c$ est donnée par le modèle suivant:

$$\log[k + \underline{d}_c] = \gamma_1 + \gamma_2 n^{\gamma_3} + \gamma_4 n^{\gamma_5} [\exp(\gamma_6/d^{\gamma_7}) - 1.0] \quad (3.2)$$

où $\underline{d}_c$ est la valeur moyenne de $\hat{d}_c$, et où k, γ_i , pour $i = 1, \dots, 7$ sont des constantes.

Or dans (3.2), l'expression $(\gamma_1 + \gamma_2 n^{\gamma_3})$ indique l'effet fondamental des petits échantillons sur la valeur de $\hat{d}_c$. Pour des variables aléatoires qui évoluent de manière monotone en d : $\gamma_1 = 0$ et γ_2 et γ_3 sont des constantes positives. Donc plus n est grand, plus la valeur limite de $\underline{d}_c$ est une fonction de d_c . Ainsi si on a un attracteur tel que $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_3 < 0$, quand $n \rightarrow \infty$, alors le biais le plus petit fourni par le terme $\gamma_2 n^{\gamma_3}$ tend vers zéro. Donc si $n \rightarrow \infty$, $d_c \rightarrow \infty$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_c}{n} \rightarrow 0$, ou a

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \underline{d}_c) \quad \text{quand } d \rightarrow \infty$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{d}_c = e^{\gamma_1} - 1, \quad \text{quand } d_c \rightarrow \infty.$$

D'autre part le second terme de (3.2) mesure le biais introduit par la dimension de "plongement". Pour des processus aléatoires ou des processus stochastiques, $\gamma_6 < 0$ et $\gamma_7 > 0$. Le facteur $\gamma_4 n^{\gamma_5}$ modifie l'effet du biais dû à d , γ_5 semble être négatif pour des attracteurs et nul pour des variables aléatoires. Donc pour des attracteurs de dimension faible, l'effet du biais sur $\underline{d}_c$ dû à de faibles valeurs de d_c diminue quand n croît.

Ainsi

- L'effet du biais croît avec la "embedding" dimension, mais décroît avec la taille de l'échantillon.
- La variance de l'estimateur de la dimension décroît avec la taille de l'échantillon, mais croît rapidement avec la taille de la "embedding" dimension.
- Il est possible lors de l'estimation de la dimension de corrélation (ou de la "pointwise" dimension) d'introduire des erreurs si l'on ne tient pas assez compte de l'existence de comportements périodiques sous-jacents à la série étudiée. Lors du calcul de la dimension de corrélation à partir de (2.9), celle-ci est souvent approximée dans les algorithmes par $C(r) \sim r^{d_c}$, mais cette approximation n'est plus valable dès que $r \rightarrow 0$. Il semble alors préférable d'utiliser la relation suivante (Theiler, 1988):

$$C(r) = \phi(r)r^{d_c}$$

où la fonction $\phi(r)$ est telle que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \phi(r)}{\log r} = 0$. Le facteur $\phi(r)$ permet de mesurer ce que Mandelbrot (1979) appelle la lacunarité de la texture d'un objet fractal. Il permet de mesurer les oscillations intrinsèques, de l'objet étudié. À partir de cette relation, on peut calculer un estimateur du maximum de vraisemblance de d_c , voir Takens (1985), qui s'écrit sous la forme suivante, pour un $R > 0$:

$$d_c(R) = \frac{C(R)}{\int_0^R \frac{C(r)}{r} dr}.$$

Cet estimateur est biaisé. Il converge si et seulement si:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-dz} \left[\frac{\phi e^{(-z)}}{\phi(R)} - 1 \right] dz = 0.$$

Notons que si $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r)$ n'est pas une constante positive, l'estimateur précédent ne converge pas. Cette situation correspond à la présence d'oscillations périodiques.

3.3 Algorithmes pour le calcul des dimensions.

Plusieurs problèmes se posent:

- Un des problèmes dans l'estimation des dimensions est le temps de calcul. En effet, dans le cas du calcul de la dimension de corrélation d'un attracteur à partir d'un échantillon de taille n , le temps moyen de calcul est de l'ordre de n^2 , voir Grassberger et Procaccia (1983).
- Pour de longues séries, ce qui est le cas en général pour des phénomènes sismiques, physiques, physiologiques, le problème est loin d'être négligeable. Pour la dimension de corrélation, Grassberger (1990) propose un algorithme permettant de minimiser le temps de calcul, Theiler (1990) propose un algorithme permettant de ne pas utiliser l'ensemble des données dont on dispose et qui donne des résultats presque identiques à ceux obtenus avec l'ensemble de données.
- Pour le calcul de d_c il existe aussi un problème lié au choix de l'intervalle de variation de r . En théorie, les propriétés de l'estimateur $\hat{d}_c$ sont obtenus pour $r \rightarrow 0$, alors qu'en réalité les valeurs prises par r ne sont pas proches de zéro et s'écartent d'autant plus de zéro que la "embedding" dimension d augmente. De petites valeurs de r nécessitent une taille d'échantillon très grande pour une valeur de d donnée, pour être capable de déterminer une relation logarithmiquement linéaire entre d_c et r . Celle-ci n'est obtenue que pour quelques valeurs de r . Pour de grandes valeurs de r , la régression de $\log C_d(r)$ sur $\log r$ tend vers 0. Pour r petit, on se trouve face à des problèmes compliqués dus à la présence d'un bruit ou à des problèmes de précision.

3.4 Tests

Quelques tests commencent à voir le jour dans le but de décider entre une série chaotique et une série aléatoire. En effet un des problèmes les plus importants au moment de faire de l'identification est de pouvoir décider entre un modèle chaotique déterministe et un modèle aléatoire. Ce problème fut posé en particulier par Granger (1989) à partir de données économiques.

1. On peut se servir de la relation (3.2) pour décider si l'on est en présence d'un phénomène chaotique ou aléatoire en déterminant les valeurs de γ_1 et γ_3 . On définit un test de la manière suivante:

$$H_0 : \gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_3 > 0$$

contre

$$H_1 : \gamma_1 > 0 \quad \text{et} \quad \gamma_3 \leq 0.$$

C'est un test de l'hypothèse H_0 : phénomène aléatoire, contre l'hypothèse H_1 : système chaotique.

2. Un autre point de vue est celui qui consiste à avoir une orbite bruitée par un bruit inconnu. Ainsi, si un système dynamique est représenté par une suite $(x_t)_{0 \leq t < n}$ satisfaisant

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad 0 \leq t \leq n-1, \quad (3.3)$$

on définit l'orbite bruitée générée par

$$y(t) = x(t) + \eta(t), \quad \text{où } \|\eta(t)\| < \delta \quad (3.4)$$

avec δ petit. Pour décider entre (3.3) et (3.4), on cherche à réduire $\|\eta(t)\|$. Ce "nouveau" bruit peut aussi être considéré comme provenant des erreurs faites à chaque itération du processus $y(t)$ généré par f , on doit alors rendre petite la quantité suivante:

$$\|y(t+1) - f(x(t))\| < \delta, \quad 0 \leq t \leq n-1.$$

On cherche à tester par cette approche l'existence d'un bruit dynamique.

3. A partir de la démarche de Grassberger et Procaccia (1983), on définit la dimension suivante:

$$C'_d(r) = \frac{1}{\nu} \sum_{\text{pair}} \prod_{k=1}^d \Theta(r - \|x_k(t) - x_k(t')\|) \quad (3.5)$$

où ν représente toutes les paires de vecteurs $x(t), x(t')$ sur lesquelles on somme. Brock, Dechert et Scheinkman (1986) construisent un test à partir de (3.5) en considérant que si $x(t)$ est un bruit blanc alors $N_d(r) = C'_d(r) - [C'_1(r)]^d \sim 0$. Ensuite ils déterminent un facteur $K_d(r)$ (de manière assez peu explicite) tel que $\frac{N_d(r)}{K_d(r)}$ soit une statistique normalement distribuée centrée et de variance 1. A partir de cette statistique, ils construisent un test permettant de tester l'hypothèse H_0 de bruit blanc. En ce qui concerne l'alternative, ce test n'est pas précis. On ne sait pas exactement quelle information ce test fournit concernant la dimension de l'espace d'état du système étudié sous l'alternative.

4. On peut remarquer que $C'_d(r)$ représente la probabilité P que chaque membre de l'une des suites de longueur d soit proche de moins de r de l'un des membres de l'autre suite. Notons $C'_d(r) = P(t_d, t_{d-1}, \dots, t_1)$ où chaque t_k vérifie:

$$|x_{d-k+1}(t) - x_{d-k+1}(t')| \leq r.$$

Si l'on a 2 nombres $x(t)$ et $x(t')$ tels que $|x(t) - x(t')| \leq r$ alors la probabilité que $|x(t+1) - x(t'+1)| \leq r$ est $P(t_2, t_1)$. Mais $P(t_2, t_1) = P(t_2 | t_1)P(t_1)$. Donc $P(t_2 | t_1) = \frac{C'_2}{C'_1}$. Si les variables aléatoires sont non corrélées, alors $P(t_2 | t_1) = P(t_2) = C'_1$ et $C'_2 = C_1'^2$ donc si l'on pose $\delta_1 = 1 - \frac{C_2}{C_1}$ alors sous H_0 : $\delta_1 = 0$. Si $\delta_1 \neq 0$ alors $P(t_2 | t_1) \neq P(t_2)$. Ceci est réalisé en particulier si les variables sont générées par un système déterministe d'ordre 1. Si donc on considère la quantité:

$$\delta_j = 1 - \frac{C_j'^2}{C_{j-1}'C_{j+1}'}, \quad (3.6)$$

celle-ci mesure le degré de dépendance de $x(t)$ avec $x(t - t')$, voir Savit et Green (1991).

5. Afin de faire la distinction entre des observations provenant d'un attracteur de celles provenant d'un non attracteur, on peut utiliser la méthode, développée par Wolf (1990). Il a estimé la dimension de corrélation dans le cas de processus AR(1) et MA(q) en introduisant dans le système dynamique (1.1) un bruit gaussien. Ces dimensions sont comparées à celles d'un bruit faible. Le biais de l'estimateur considéré est calculé. On sait que dans le cas d'un système dynamique tel que (1.1), l'espace d'état est automatiquement déterminé comme le domaine de l'application f , mais en pratique pour un processus stochastique l'interprétation immédiate de la notion d'espace d'état n'est pas évidente. Néanmoins la démarche suivie par Wolf est intéressante car elle montre que le concept de dimension de corrélation peut-être généralisée à des processus stochastiques.
6. Différents algorithmes de réduction du bruit ont été considérés. Kostelich et Yorke (1988), dans le cas où f est connue ont construit un algorithme

basé sur le calcul de l'erreur moyenne:

$$E = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \| f(x(t-1)) - x(t) \|^2 \right)^{1/2}.$$

Hammel (1989) s'est servi du calcul de l'erreur suivante:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log \varepsilon(t)$$

où

$$\varepsilon(t) = \max(\varepsilon_\mu, \| f(x(t-1)) - x(t) \|).$$

Remarque 3.7 Dans les tests d'ajustement, pour discriminer entre processus déterministes et stochastiques, on peut s'intéresser aux distributions jointes des variables aléatoires définies sur un attracteur étrange. On s'intéresse alors à estimer des valeurs extrêmes.

3.5 Prédiction

La prédiction des systèmes dynamiques chaotiques est une des approches considérées pour identifier un chaos. C'est une approche qui est beaucoup plus récente que l'approche qui consiste à mesurer la dimension de l'attracteur. Lorsque l'on fait de la prédiction, il existe deux sources d'erreurs possibles: la dynamique du système lui-même et les fluctuations qui interviennent au moment des mesures. Dans le cas d'un système chaotique, la précision de la prédiction non linéaire décroît plus l'intervalle de prédiction augmente. Dans le cas d'un bruit blanc, la prédiction est indépendante de l'intervalle où l'on se place. Pour des séries courtes, il est difficile de distinguer entre un chaos et un bruit blanc. L'approche prédiction est un moyen de décider si on se trouve en présence d'un chaos ou non.

1. Farmer et Sidorovitch (1987) calculent des prédictors à un pas pour les systèmes chaotiques (1.1) à partir des données passées qui sont le plus "proches" de l'état présent. Ceci conduit à des estimations non paramétriques, à partir d'une approximation locale de la fonction f

définie par (1.1). Deux méthodes sont considérées, soit on approxime $\hat{f}$ à chaque pas et on calcule l'erreur de prédiction à partir du développement de Taylor à l'ordre 2 de f , soit on calcule les prédicteurs de manière itérative, l'erreur est alors plus difficile à calculer.

2. Sugihara et May (1990), en se plaçant dans l'espace d'état, obtiennent le prédicteur pour un point de cet espace, de manière empirique en construisant la plus petite boule de R^d formée des $d + 1$ plus proches voisins de ce point.
3. Si l'on reprend l'approche de Savit et Green (1991), la quantité δ_j définie par (3.6) permet de définir un index de prédictabilité de la manière suivante. Posons

$$S = \frac{C_1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - \delta_j)}.$$

S mesure le degré de chaque sous suite de longueur j de se reproduire dans la série avec un écart de $\pm r$. On a ainsi

$$S = \lim_{j \rightarrow \infty} P(t_i | t_{j-1}, t_{j-2}, \dots, t_1).$$

S varie entre C_1 et 1. Si la série n'est pas plus prédictible qu'un bruit blanc alors $S = C_1$ où $C_1 = P(t_1)$. Si la série est complètement prédictible alors $S = 1$.

4 Revue commentée sur les chaos

Avant d'aborder les chaos de manière approfondie, on peut consulter les livres suivants et certains articles qui donnent un point de vue philosophique sur le sujet: Bergé (1988), Gleick (1989), Mandelbrot (1989), l'Ordre du chaos (1989), Kojève (1990), Bartlett (1990). D'un point de vue plus technique, mais avec un aperçu très complet, on peut se reporter à Thompson et Stewart (1986), Zeitgen et Richter (1986) ainsi qu'au livre sur le sujet édité par Holden (1987).

On peut aussi prendre contact avec les chaos à partir de l'étude des systèmes dynamiques. Un certain nombre de livres répondent à cette approche: Ioss, Hellman et Stora (1983), Cvitanović (1984), Bergé, Pomeau,

et Vidal (1984), Schuster (1984), Moon (1987), Ruelle (1987, 1989), Devaney (1989), Baker et Gollub (1990), Sandefur (1990). Il est utile d'avoir un éclairage sur la théorie des bifurcations et des catastrophes: Guckenheimer et Holmes (1983), Arnold (1984), Demazure (1989).

Si l'on veut avoir une approche plus pragmatique des chaos, on peut jeter un coup d'oeil au livre de Babloyantz (1986) qui propose un certain nombre d'applications intéressantes.

Pour une approche historique, consulter: Duhem (1906), Poincaré (1908), Hadamard (1948).

La bibliographie à partir des articles est très dense, nous allons distinguer plusieurs points de vue. Quelques articles peuvent servir de références: Eckmann et Ruelle (1985), Ruelle (1987, 1990), Sparrow (1989), Farmer (1989).

4.1 Construction théorique de chaos

1. Les systèmes différentiels et les chaos: Ruelle (1976), Guckenheimer (1976, 1983), Guckenheimer et Holmes (1983).
2. Les systèmes dynamiques: Gabor (1954), Campbell et Rose (1983), Berry, Percival et Weiss (1987), Goldhirsh et Orszag (1987), Bayly, Goldhirsh, Orszag (1987), Lapedes et Farber (1987), Brons et Sturis (1991).
3. Etude des chaos par approche analytique: May (1976), Degn (1982), Feigenbaum (1983), Moon (1987), Benedicks et Carleson (1991).
4. Etude des chaos par approche ergodique: Ledrappier (1981), Ruelle (1976, 1987), Eckmann et Ruelle (1985), Fraser (1989).
5. Etude des chaos par approche algorithmique: Takens (1981, 1984), Greenside, Swolf, Swift et Pignarato (1982), Theiler (1988, 1990), Broomhead et Jones (1989), Grassberger (1990).

4.2 Identification des chaos

1. Calcul des exposants de Lyapunov: Packard, crutchfield, Farmer et Shaw (1980), Gerrard, Barbow et Tong (1989), Tong (1989), Grorud et Talay (1990).

2. Calcul des dimensions: Farmer (1982), Farmer, Ott et Yorke (1983), Grassberger et Procaccia (1983), Cutler (1986), Moon (1987), Sparrow (1989), Ruelle (1990).
3. Lien entre les dimensions et les exposants de Lyapunov: Russell, Hanson et Ott (1980), Farmer (1982).
4. Espace des phases et Application de Poincaré: Farmer et Shaw (1980), Guevarra et Glass (1982), Broomhead et King (1986), Packard, Crutchfield, Fraser et Swinney (1986), Fraser et Swinney (1986), Barnett et Choi (1989).
5. Approche prédiction: Farmer et Sidorowitch (1988), Castagli (1989), Farmer (1989), Geweke (1989), Berliner (1990).
6. Approche bayésienne: Berliner (1990).

4.3 Construction de tests

1. Point de vue économique: Abraham, Gollub et Swinney (1982), Brock et Chamberlain (1986), Brock, Dechert et Scheinkman (1986), Sayers (1986), Barnett et Chen (1987, 1988), Brock et Dechert (1987, 1988, 1989), Hsieh (1987, 1988), Frank, Gensay et Stengos (1988), Barnett et Hinnich (1989), Barnett et Choi (1989), Frank, Sayers et Stengos (1989), Granger (1989), Liu (1989), Kugler et Lenz (1990), Liu, Granger et Heller (1991).
2. Point de vue série chronologique: Kostelewitch et Yorke (1989), Scargle (1990), Wolf (1990), Hammel (1990), Sugihara et May (1990), Savit et Green (1991).
3. Point de vue série chronologique à temps continu: Smith (1991), Brons et Sturis (1991).

4.4 Estimation

- Estimation de f : Cheng et Tong (1991), Nichka, Ellner, McCaffrey et Gallant (1991).

- Estimation des dimensions: Mandelbrot (1979), Takens (1985), Smith (1988, 1991), Ramsey et Yuan (1989, 1990), Cutler et Dawson (1989, 1990), Gerrard, Tong et Barbow (1989), Tong (1991), Cutler (1991), Nychka, Ellner, McCaffrey et Gallant (1991), Taylor et Taylor (1991).

4.5 prédiction

- Geweke (1989), Castagli (1989).

4.6 Applications

- Rythme cardiaque: Roux, Rossi, Bachelard et Vidal (1981), Guevarra et Glass (1982), Glass, Guevarra, Shrier et Perez (1983), Golberger, Barghava, West et Mandell (1985, 1986), West, Golberger, Rovner et Barghava (1985), Babloyantz, Dextrehe (1986), Chialvo, Gilmour et Jalife (1989), Kaplan et Cohen (1989), Garfinkel, Walker, Trelease et Harper (1991).
- Systèmes physiologiques: Babloyantz et Dextrehe (1986), Glass, Beuter et Laroque (1988), Mayer-Kress, Yates, Benton, Keidel, Tirsch, Poppl et Geist (1988), Zbilut, Mayer-Kress et Geist (1988), Babloyantz (1989), Saul, Kaplan et Kitney (1989).
- Physique: Ruelle et Takens (1971, 1976), Kobayashi et Musha (1982), Ruelle (1983), Ghil, Benzi et Parisi (1985), Mandelbrot (1989).
- Chimie: Roux (1983).
- Météorologie: Nicolis et Nicolis (1984).
- Astronomie: Scargle (1989), Vio, Cristiani, Lessi et Provenzale (1991).
- Etudes expérimentales: Kostevitch et Yorke (1989), Hammel (1990).

References

- [1] Abraham N.B., Gollub J.P., Swinney H.L. *Testing nonlinear dynamics*, Physica D **11**, (1984), 252.

- [2] Alhers G. *Low temperature studies of the Rayleigh-Berard instability and turbulence*, Phys. Rev. Letters **33**, (1964), 1185-1188.
- [3] Amsterdamski S., Atlan H., Danchin A., Ekeland I., Largeault J., Morin E., Petitot J., Pomian K., Prigogine I., Ruelle D., Stengers I., Thom R. *La querelle du déterminisme*. Gallimard, (1990).
- [4] Anderson P.W., Arrow K.J., Pines D. (eds.). *The economy as a evolving complex system*. Redwood city. California. Addison Wesley, (1988).
- [5] Arnold V.I. *Catastrophe theory*. Springer Verlag, (1986).
- [6] Babloyantz A. *Molecules, dynamics, and life. An introduction to Self-organization of Matter*. Wiley-interscience publication, (1986).
- [7] Babloyantz A. *Chaotic series in Electrophysiology*. Comm. Edinburg, July 1989, (1989).
- [8] Babloyantz A., Dextexhe A. *Low dimensional chaos in an instance of epilepsy*, Proc. Math. Acad. sci. U.S.A. **83**, (1986), 3513-3517.
- [9] Babloyantz A., Dextexhe A. *Is the normal heart a periodic oscillator?* Biol. Cybern. **58**, (1988), 203-211.
- [10] Babloyantz A., Salazar J.M., Nicolis C. *Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle*, Physics Letters A **111**, (1985), 152-156.
- [11] Baker G.L., Gollub J.P. *Chaotic dynamics. An introduction*. Cambridge, (1990).
- [12] Balatoni J., Renyi A. *Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sci.* **1**, (1956), 9.
- [13] Barnett W., Chen P. *Economic theory as a generator of measurable attractors*, Techn. report, University of Texas, Austin, (1987).
- [14] Barnett W., Chen P. *Deterministic chaos and fractal attractors as tools for nonparametric dynamical econometric inference: with an application to the divisia monetary aggregates*, Math. comput. modelling **10**, (1988), 275-296.

- [15] Barnett W., Chen P. The aggregation theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: an econometric application of mathematical chaos, in *Economic complexity, chaos, sunspots, bubbles and nonlinearity*. Ed. by Barnett, Geweke and Shell. Cambridge Press, (1989).
- [16] Barnett W., Choi S.S. A comparison between the conventional econometric approach to structural inference and the nonparametric chaotic attractor approach, in *Economic complexity, chaos, sunspots, bubbles and nonlinearity*. Ed. by Barnett, Geweke and Shell. Cambridge Press, (1989).
- [17] Barnett W., Hinnich M.J. Has chaos been discovered with economic data? Techn. report, University of Texas, Austin, (1989).
- [18] Bartlett M.S. *Chance or chaos?*, J.R.S.S. A. **153**, (1990), 321-347.
- [19] Bayly B.J., Goldhirsh I, Orszag S.A. Independent degrees of freedom of dynamical systems, Tech. Report, Applied and Computational Mathematics, Princeton Univ, (1987).
- [20] Benedicks M., Carleson L. *The dynamics of the Henon map*, Annals of Mathematics. **133**, (1991), 73-169.
- [21] Bennetin G., Galgani L., Strelcyn J., Phys. Rev. A **14**, (1976), 2338.
- [22] Bergé P. *Le chaos*. Paris. Eyrolles, (1988).
- [23] Bergé P, Pomeau Y., Vidal Ch. *L'ordre dans le chaos*. Paris, Hermann, (1984).
- [24] Berliner I.M. Bayesian analysis in chaotic models. Tech. report n 429, Columbus, (1990).
- [25] Berry M.V., Percival I.C., Weiss N.O. ed. *Dynamical chaos*, Proc. R. Soc. London A **413**, (1987), 1-199.
- [26] Bingham N.H., Goldie G.M., Tengels J.L. *Regular variation*, Cambridge University Press.

- [27] Bowen R. Equilibrium states and the ergodic theory of Asonov Diffeomorphisms. Lect. Notes in Math. **470**, (1975), Springer.
- [28] Brandstater A., Swilt J., Swinney H.L., Phy. Rev. Letters. **51**, (1983), 1442-1445.
- [29] Brock W.A. *Distinguishing random and deterministic systems*, Journal of Economic Theory, (1986).
- [30] Brock W.A., Chamberlain G. Spectral analysis cannot tell a macro-econometrician whether his time series came from a stochastic economy or a deterministic economy, Techn. report. 8419, Univ. of Wisconsin, (1984).
- [31] Brock W.A., Dechert W.D. Theorems on distinguishing deterministic random systems, in Barnett and Als. eds. Dynamic econometric modelling, Cambridge press, 8701, (1987).
- [32] Brock W.A., Dechert W.D. A general class of specification tests: the scalar case, in Proceedings of the business and economic statistics, (1989).
- [33] Brock W.A., Dechert W.D., Scheinkman J.A. A test for independence based on the correlation dimension, Working paper, Economics dept. Univ. of Wisconsin, 8702, (1987).
- [34] Brock W. A., Sayers C.L. Is the business cycle characterized by deterministic chaos? Working paper 8617, Social Systems research institute, University of Wisconsin, Madison, (1986).
- [35] Broomhead D.S., Jones R. *Time Series analysis*, Proc. R. Soc. London A **423**, (1989), 103-121.
- [36] Broomhead D.S., King G.P. *Extracting qualitative dynamics from experimental data*, Physica D **20** , (1986), 217-236.
- [37] Brons M., Sturis J. *Local and global bifurcations in a model of economic long wave*, System Dynamics Review **7**, (1991), 41-60.

- [38] Campbell D., Rose H. eds. *Order in chaos*, proceeding of the international conference, Los Alamos. 1982, Physica D **7**, (1983), 1.
- [39] Castagli M. *Nonlinear prediction of chaotic time series*, Physica D **35**, (1989), 335-356.
- [40] Cheng B., Tong H. On consistent non-parametric order estimation and chaos, Tech. report, Univ. of Kent, (1991).
- [41] Chialvo D.R., Gilmour R.F., Jalife J. *Low dimensional chaos in cardiac time*, Nature **343**, (1990), 563-657.
- [42] Cvitanovic P. ed. *Universality in Chaos*, Adam hilger, Bristol, (1984).
- [43] Coppel W. Maps on an interval, I.M.A. preprint, Series n 26. (1983).
- [44] Cutler C.D. *The Hausdorff dimension distribution of finite measures in Euclidean space*, Can. J. Math. **38**, (1986), 1459-1484.
- [45] Cutler C. D. *Some results on the behavior and estimation of the fractal dimensions of attractors*, Journ. of Stat. physics **62**, (1991), 651-708.
- [46] Cutler C.D., Dawson D.A. *Estimation of dimension for specially distributed data and related limit theorems*, Journ. of Mult. Analysis **28**, (1989), 115-148.
- [47] Cutler C.D. , Dawson D.A. *Nearest-neighbor analysis of a family of fractal distributions*, The annals of Proba **16**, (1990), 256-271.
- [48] Cvitanovic J. *Universality in chaos*, Bristol, Adam Hilger, (1984).
- [49] Demazure M. *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, (1989).
- [50] Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison Wesley Publ. Comp, (1989).
- [51] Douady A., Osterlé J. *Dimension of Hausdorff des attractions*, C.R.A.S. A Paris, **290** (1980), 1135 -1139.
- [52] Duhem P. *La théorie physique. Son objet et sa structure*, Paris Chevalier et Rivière, (1906).

- [53] Eckmann J.P., Ruelle D. *Roads to turbulence in dissipative dynamical systems*, Rev. Mod. Phys. **53**, (1981), 643.
- [54] Eckman J.P., Ruelle D. *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Reviews of Modern Physics **57**, (1985), 617-656.
- [55] Farmer J.D. *Chaotic attractors of an infinite dimensional dynamical system*, Physica D **4**, (1982), 366-393.
- [56] Farmer J.D., Sidorovich V. Exploiting chaos to predict the future and reduce noise, in *Evolution, learning and cognition*, eds. Lee, World Scientific press, (1988).
- [57] Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. *The dimension of chaotic attractor*, Physica D **7**, (1983), 153-180.
- [58] Feigenbaum H.J. *The universal metric properties of nonlinear transformations*, Journ. Statis. Phys. **21**, (1979), 669-706.
- [59] Feigenbaum M.J. *Universal behavior in nonlinear systems*, Physica D **7**, (1983), 16-39.
- [60] Frank M. Gensay R. Stengos T. *International Chaos?*, European Economic Review **32**, (1988), 1569-1584.
- [61] Frank M., Sayers C., Stengos T. Evidence concerning nonlinear structure in provincial unemployment rates, Techn. report, British Columbia, Canada, (1989).
- [62] Fraser A. M. *Information and entropy in strange attractors*, I.E.E.E. Trans. of Inf. theor. **35**, (1989), 245-362.
- [63] Fraser A.M., Swinney H.L. Phys. Review. A **33**, (1986), 1134.
- [64] Frederikson P., Kaplan J.L., Yorke E.D., Yorke J.A. *The Lyapunov dimension of strange attractors*, J. Diff. Eq. **49**, (1983), 185.
- [65] Freeman W.J. Academic Press, N.Y., (1975).
- [66] Froehling H., Crutchfield J., Farmer J.D., Packard, Schaw R. *On determining the dimension of chaotic flows*, Physica D **3**, (1981), 605.

- [67] Gabor D. *Communication Theory and Cybernetics*, Trans. of the Inst. of Radio Engineers CT 1, (1954), 9.
- [68] Garfinkel A.J., Walker D.O., Trelease R.B., Harper R.K., Harper R.M. Nonlinear dynamics of electrocardiographic waveforms following cocaine administration, Tech. report, Los Angeles, (1991).
- [69] Gerrard R., Tong H., Barbow C. Noisy chaos, Comm. in Edinburg, July 1989, (1989).
- [70] Geweke J. Inference and forecasting for chaotic nonlinear time series, Techn. report, Durham, (1989).
- [71] Ghil M., Benzi R., Parisi G. eds. Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics, Amsterdam, North Holland, (1985).
- [72] Glass L., Mackey M.C. From clocks to chaos: the rhythms of life, Princeton University Press, (1988).
- [73] Glass L., Beuter A., Larocque D. *Time delays, oscillations and chaos in physiological control systems*, Math. Biosciences, **90**, (1988), 111-125.
- [74] Glass L., Guevara M.R., Shrier A., Perez R. *Bifurcation and chaos in a periodically simulated cardiac oscillator*, Physica D **7**, (1983), 89-101.
- [75] Gleick J. Chaos making a new science, Penguin Books, (1987).
- [76] Gleick J. La théorie du chaos. Vers une nouvelle science, Albin Michel, (1989).
- [77] Goldberger M.D., Bhargava V., West B.J., Mandell A.J. *Nonlinear dynamics of the heartbeat (II)*, Physica D **17**, (1989), 207-214.
- [78] Goldberger M.D., Bhargava V., West B.J., Mandell A.J. *Some observations on the question: is ventricular fibrillation "chaos"?* Physica D **19**, (1986), 282-289.
- [79] Gollub J.P., Swinney H.L. *On set of a turbulence in a rotating fluid*, Phys. Rev. Letters **35**, (1975), 927-930.

- [80] Granger C.W.J. Stochastic or deterministic nonlinear models? A discussion of the recent literature in Economics, Comm. in N.S.B., workshop in Edinburg, July 1989, (1989).
- [81] Grassberger P. *Do climate attractors exist?* Nature London **323**, (1986), 609-612.
- [82] Grassberger P. *Grassberger replies*, Nature London **326**, (1987), 523.
- [83] Grassberger P. Procaccia I. *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physic D **9**, (1983), 189-208.
- [84] Grandmont J.M., Malgrange P. *Nonlinear economic dynamics*, Journal of economic theory **40**, (1988), 1.
- [85] Greenside H., Wolf A., Swift J., Pignataro T. *The impracticability of a Box Counting Algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors*, Phys. Review A **25**, (1982), 3453.
- [86] Gorod A., Talay D. Approximation of Lyapunov Exponents of nonlinear Stochastic Differential Systems, Rapport INRIA 1341, Paris, (1990).
- [87] Guckenheimer J. A strange, strange attractor, in J.E. Mardens and Cracken, Ed. Springer Verlag, (1976).
- [88] Guckenheimer J. *Persistent properties of bifurcations*, Physica D **7** (1983), 105-110.
- [89] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer Verlag, N.Y., (1983).
- [90] Guevara M.R., Glass L. *Phase locking, period doubling bifurcation and chaos in a mathematical model of a periodically driven oscillator: a theory for the entrainment of biological oscillators and the generation of cardiac dysrhythmias*, J. Math. Biology **14**, (1982), 1-23.
- [91] Guevara M.R., Glass L, Shrier A. *Phase locking, period doubling bifurcation and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells*, Sciences **214**, (1982), 1350-1353.

- [92] Hadamard J. *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures et Appl. **4**, (1948), 27-73.
- [93] Hammel S.M. *A noise reduction method for chaotic systems*, Physics Letters A **148**, (1990), 421-428.
- [94] Hao B. L. *Chaos*, Singapore, World Scientific, (1984).
- [95] Hausdorff *Dimension and Ausers Mass*, Math. Annalen **79**, (1918) , 157.
- [96] Holden A.V. ed. *Nonlinear Science Theory and Application*, (1987).
- [97] Hopf E. *A mathematical example displaying the features of turbulence*, Comm. Pure Appl. Math. **1**, (1948), 303-322.
- [98] Hsieh D.A. *Testing for nonlinear dependence in foreign exchange rates: 1974-1983*, Tech. report, University of Chicago, (1988).
- [99] Ioss G., Hellman R., Stora R. eds. *Chaotic behaviour of deterministic systems*, North Holland, Amsterdam, (1983).
- [100] Johnson J. *Fractal intensity Point process*, Techn. report, Houston, (1990).
- [101] Kaplan D.T., Yorke J. *Functional differential equations and the approximation of fixed points*, Procceding Bonn, July 1978, Lecture Notes in Math 730, Springer 228, (1978).
- [102] Kaplan D.T., Cohen R.J. *Fibrillation vs random noise: a comparison using dimensionally calculations*, I.E.E.E. Ingin. in medicine and biol. CH2770, **6**, (1989), 92-93.
- [103] Koboyashi M., Musha T. *1/f fluctuation of heartbeat period*, I.E.E.E. Trans BME **29**, (1982), 456-457.
- [104] Kojève A. *L'idée du déterminisme dans la physique classique et dans la physique moderne*, PUF, (1990).
- [105] Kolmogorov A.N. *A new invariant for transitive dynamical systems*, Dokl. Akad. Nank. SSSR. **119**, (1958), 861-864.

- [106] Kostelich E., Yorke J.A., Phys. Rev. A **38**, (1988), 1649.
- [107] Kugler P., Lenz C. Chaos, ARCH and the foreign exchange market: empirical results from weekly data, Techn. report, Bern, (1990).
- [108] Landa P.S., Rosenblum M.G. *Time series analysis for system identification and diagnostics*, Physica D **48**, (1991), 232-254.
- [109] Landau L.D. *On the problem of turbulence*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR. **44**, (1944), 339- 342.
- [110] Lapedes A.S., Farber R. Nonlinear signal processing using neural networks: prediction and system modeling, Tech. report, LA. UR. 87, Los Alamos National Laboratory, (1987).
- [111] Ledrappier F. *Some relations between dimension and Lyapunov exponents*, Comm. Math. Phys. **81**, (1981), 229-238.
- [112] Levy Vehel J. About lacunary, some links between fractal and integral geometry, and an application to texture segmentation, Rapport INRIA, Paris, 1188, (1990).
- [113] Levy Vehel J., Gagalowicz A. Fractal approximation of the 2-D object, Rapport INRIA, Paris, 1187, (1990).
- [114] Liu T., Granger C., Heller W.P. Using the correlation exponent to decide if an economic series is chaotic, Tech. Report Ball State University and UC San Diego, (1991).
- [115] Liu T. *How to decide if a series is chaotic: the estimation of correlation exponent*, Tech. report, (1989).
- [116] L'ordre du chaos, Pour la science, Diffusion Belin, (1989).
- [117] Lorenz E.N. *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. **20**, (1963), 130-141.
- [118] Lorenz E.N., Tellus **16**, (1964) , 1-8.
- [119] Mandelbrot B.B. Fractals: form, chance and Dimension, Freeman: San Francisco, (1977).

- [120] Mandelbrot B.B., C. R. Acad. Sci. A. **288**, (1979), 81.
- [121] Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature, Freeman, San Francisco, (1982).
- [122] Mandelbrot B.B. *Multifractal measures, especially for the geophysicist*, Pageoph. **131**, (1989), 5-42.
- [123] Mandelbrot B.B. A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for the dimension $f(a)$, Fractals ed. Pietronero, N.Y, (1989).
- [124] Mandelbrot B.B. Limit lognormal multifractal measures, in Frontiers of phys. Landau memorial conference, Tel Aviv meeting, 1988, (1989).
- [125] Mandelbrot B. Les objets fractals, Flammarion, (1989).
- [126] Mandelbrot B.B. *New "animalous" multiplicative multifractals: left sided $f(a)$ and the modelling of DLA*, Physica A, (1990).
- [127] Mandelbrot B.B. *Negative fractal dimensions and multifractals*, Physica A **163**, (1990), 306-315.
- [128] Markus M., Huschmitz D., Hess B., FEBS Lett. **172**, (1984), 235-238.
- [129] Markus M., Huschmitz D., Hess B., Biophys. Chem. **22**, (1985), 95-105.
- [130] May R.M. *Simple mathematical models with complicated dynamics*, Nature **261**, (1976), 459-467.
- [131] May R.M. *Chaos and the dynamics of biological populations*, Proc. R. Soc. London A **413**, (1987), 27-44.
- [132] Mayers Kress G. Dimension and entropies in chaotic systems, Springer Series in Synergetics, **32**, Berlin, (1986).
- [133] Mayer-Kress, Yates F.E., Benton L., Keidel M., Tirsch W., Poppl S.J., Geist K. *Dimensional analysis of nonlinear oscillations in brain, heart and muscle*, Math. Biosciences **90**, (1988), 155-182.

- [134] Mc Laughlin J.B., Martin P.C. *Transition to turbulence of a statistical stressed fluid*, Phys. Rev. Letters **20**, (1974), 1189-1192.
- [135] Moon F. C. Chaotic vibrations, Wiley, (1987).
- [136] Nicolis C., Nicolis G. *Is there a climatic attractor ?*, Nature London **311**, (1984), 529- 533.
- [137] Nicolis C, Nicolis G. *Evidence for climatic attractor*, Nature London, (1987), 326.523.
- [138] Nychka D., Ellner S., McCaffrey D., Gallant A.R. Finding Chaos in Noisy Systems, Tech. report, 1996, North Carolina State University, (1991).
- [139] Oseledec V.I. *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Math. Soc. **19**, (1968), 197-231.
- [140] Packard N. H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. *Geometry from time series*, Physical Review Letters **45**, (1980), 712-716.
- [141] Poincaré H. Science et méthode, Paris, Ernest Flammarion, (1908).
- [142] Proccacia I. *Complex or just complicated?*, Nature London, (1988), 333-498.
- [143] Ramsey J.B., Yuan H.S. *Biais and error bars in dimension calculations and their evaluation in some simple models*, Physics letters A **134**, (1989), 287-297.
- [144] Ramsey J.B., Yuan H.S. *The statistical properties of dimension calculation using small data sets*, Nonlinearity **3**, (1990), 155-176.
- [145] Recgtschaffen A, Kales A., U.C.L.A., Los Angeles, (1968).
- [146] Rensing L. Temporal disorders in human oscillatory systems, Springer Series in Synergetics, Vol. 36, Berlin, (1987).
- [147] Roux J.C. *Experimental studies of bifurcations leading to chaos in the belousof-Zhabotinsky reaction*, Physica D **7**, (1983), 57-68.

- [148] Roux J.C., Rossi A., Bachelard S., Vidal C. *Experimental observations of complex dynamical behavior during a chemical reaction*, Physica D **2**, (1981), 395-403.
- [149] Roux J.C., Simayi R.M., SWinney H.L., Physica D **8**, (1983), 257-266.
- [150] Ruelle D. *Some comments on chemical oscillations*, Trans. N.Y. Acad. Sci. II **35**, (1973), 66-71.
- [151] Ruelle D. *Ergodic theory of differential dynamical systems*, (1976).
- [152] Ruelle D. *Five turbulent problems*, Physica D **7**, (1983), 40-44.
- [153] Ruelle D. *Chaotic evolution and strange attractors*, Cambridge University Press, (1987).
- [154] Ruelle D. *Deterministic chaos: the science and the fiction*, Proc. R. Soc. London. A. **427**, (1990), 241-248.
- [155] Ruelle D., Takens F. *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20**, (1971), 167- 192.
- [156] Ruelle D., Takens F., Comm. Math. Phys. **50**, (1976), 69.
- [157] Russel D., Hanson J., Ott E. *Dimensionality and Lyapunov numbers of strange attractors*, Phys. Rev. Letters **45**, (1980), 1175-1178.
- [158] Sandefur J.T. *Discrete dynamical systems, Theory and Applications*, Oxford, (1990).
- [159] Saul J.P., Kaplan D.T., Kitney R.I. *Nonlinear interactions between respiration and heart rate: classical physiology or entrained nonlinear oscillations*, I.E.E.E. **276**, (1989), 299-302.
- [160] Savit R., Green M. *Time series and dependent variables*, Physica D **50**, (1991), 95-116.
- [161] Sayers C.L. *Chaos and the business cycle*, Tech. report, Houston, (1989).

- [162] Scargle J.D. Modelling chaotic and random processes with linear filters, Tech. report, (1989).
- [163] Scargle J.D. *An introduction to chaotic and random time series analysis*, Int. Journ. of Imaging System and Tech., (1989).
- [164] Scargle J.D. *Studies in astronomical time series analysis (III). Fourier analysis. Autocorrelation function. Cross-correlation function*, The Astrophys. journal **343**, (1989), 874-887.
- [165] Scargle J.D. *An introduction to chaotic and random time series analysis. (III)*, Int. Journ. of Imagining Systems and Techn. **1**, (1989), 243-253.
- [166] Scheikman J.A., Le Baron B. *Non linear dynamics and stocks returns*, J. Business, (1989), 311-337.
- [167] Shimata I., Nagashima T., Prog. Theor. Phys. **61**, (1979), 228.
- [168] Shuster H. Deterministic chaos, Physic, Verlag, Weinheim, (1984).
- [169] Sinai Ja. *Gibbs Measure in Ergodic, Theory*. Russ. Math Surveys **4**, (1972), 21-64.
- [170] Smale S. *Differential dynamical systems*, Bull. Am. Math. Soc. **73**, (1967), 747-817.
- [171] Smith L.A. *Intrinsic limits on dimension calculations*, Physics Letters A. **183**, (1988), 283-288.
- [172] Smith R.L. Optimal Estimation of Fractal Dimension, in Nonlinear Modeling and Forecasting, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc. **XII**, eds. M. Castagli and S. Eubank, Addison-Wesley, (1991).
- [173] Smith R.L. Estimating dimension in noisy chaotic time series, Tech. Report, North Carolina, (1991).
- [174] Sparrow C. Dynamical systems, Comm. in Edinburg, July 1989, (1989).
- [175] Stuck B.W., Kleiner B. *A statistical analysis of telephone noise*, The Bell System Technical Journal **53**, (1974), 1263-1320.

- [176] Sugihara G., May R.M. *Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series*, Nature **344**, (1990), 734-741.
- [177] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence, Lecture Notes in Mathematics, **898**, Springer Verlag, Proceedings Warwick 1980, (1981), 366-381.
- [178] Takens F. Lecture notes in mathematics, **1125**, Dynamical systems and bifurcations, Springer Verlag, (1985).
- [179] Taylor C.C., Taylor S.J. *Estimating the dimension of a fractal*, J. R. S. S. B. **53**, (1991), 353-364.
- [180] Theiler J. *Lacunarity in a best estimator of fractal dimension*, Physics Letters A **133**, (1988), 195-200.
- [181] Theiler J. *Statistical precision of dimension estimators*, Physics Review A **41**, (1990), 3038-3051.
- [182] Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear Dynamics and Chaos, (1986).
- [183] Tsonis A.A., Elsner J.B. *The weather attractor on very short time scales*, Nature London **333**, (1988), 545-547.
- [184] Tong H. On the effect of noise on Lyapunov exponents, Techn. report, Kent, (1989).
- [185] Tong H. Constracting aspects of nonlinear time series analysis, Minneapolis, (1990).
- [186] Vidal C., Pacault A. eds. Nonlinear phenomena in chemical dynamics, Berlin Springer, (1981).
- [187] Vio R., Cristiani S., Lessi O., Provenzale A. Time series analysis in astronomy: an application to quasar variability studies, tech. report, Univ. di Padoa, 1991-8, (1991).

- [188] West B.J., Goldberger A.L., Rovner G., Bhargava V. *Non linear dynamics of the heartbeat (I)*, Physica D **17**, (1985), 198-206.
- [189] Whistutz V. *Representation positivity and expansion of Lyapunov exponents for linear stochastic systems*, Contemporary math. **50**, (1986), 93-106.
- [190] Winfree A.T. *When time breaks down*, Princeton University Press, (1988).
- [191] Wolf R.C.L. *A note on the behavior of the correlation integral in the presence of a time series*, Biometrika **77**, (1990), 689-697.
- [192] Zbilut J.P., Mayer-Kress G., Geist K. *Dimensional analysis of heart rate variability in heart transplant recipients*, Math. Biosciences **90**, (1988), 49-70.
- [193] Zeitgen, Richter *Introduction au chaos*, Barnsley, (1986).

5 Annexe: Les chaos comme systèmes dynamiques

5.1 Introduction

Nous nous intéressons ici à la modélisation dynamique car elle est une des méthodes permettant de modéliser un phénomène qui évolue au cours du temps. Nous nous intéressons plus particulièrement aux systèmes non linéaires. En effet ces derniers permettent souvent de mieux modéliser certaines réalités de la vie de tous les jours que ne le font les systèmes linéaires. ceux-ci n'étant souvent que linéarisation des systèmes non linéaires. En général d'ailleurs on utilise le concept de linéarisation dans le but de déterminer le comportement qualitatif des solutions d'un système d'équations linéaires, que l'on ne sait pas en général déterminer directement.

Nous allons dans un premier temps donner un certain nombre de définitions et de propriétés élémentaires sur les systèmes dynamiques discrets d'ordre 1 à valeurs scalaires. Toutes ces définitions et propriétés se généralisent à des systèmes dynamiques à valeurs vectorielles, (voir le paragraphe 5.7).

Parmi les systèmes dynamiques non linéaires nous privilégions ceux dépendant d'un paramètre λ . On cherche alors à découvrir le comportement qualitatif des solutions de tels systèmes pour chaque valeur de λ , au moins pour les valeurs de λ évoluant dynamiquement dans un intervalle raisonnable. Normalement le comportement qualitatif des solutions reste le même pour des λ évoluant dynamiquement dans certains intervalles, mais il peut y avoir des changements importants dûs à ce que l'on appelle des bifurcations. Le but de cette étude est de fournir une approche "simple" de la notion de système chaotique.

5.2 Définitions préliminaires

Nous considérons un système dynamique non linéaire à temps discret défini par la relation

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (5.1)$$

Remarque 5.1 En comparaison avec les équations différentielles ordinaires, la question d'existence des solutions de l'équation précédente est triviale.

Definition 5.2

- Un système dynamique discret d'ordre 1 dans $\mathbf{R}$ est une suite de nombres $x(n), n = 0, 1, \dots$, telle que chaque nombre se définisse à partir du premier nombre de la relation (5.1), où f est une certaine fonction, supposée ici non linéaire.
- Un système dynamique de la forme

$$x(n+m) = f(x(n+m-1), x(n+m-2), \dots, x(n))$$

où m est un nombre fixé est appelé système dynamique discret d'ordre supérieur.

Definition 5.3 Un nombre a est une valeur d'équilibre ou un point fixe pour le système dynamique (5.1) si, étant donné la valeur initiale $x(0) = a$,

$$a = f(a).$$

Remarque 5.4 Pour n'importe quel $k \in \mathbb{N}$, si $x(k) = a$, puis $x(k+1) = f(x(k)) = f(a) = a$ alors $x(l) = a, l \geq k$ est une solution constante pour (5.1).

Définition 5.5 Etant donné le système dynamique (5.1) avec un point fixe a : Le point a est stable ("attracting") s'il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que si $|x(0) - a| < \epsilon$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = a$. Le point a est dit instable ("repelling") s'il existe ϵ tel que si $0 < |x(0) - a| < \epsilon$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \neq a$, pour certaines valeurs de k .

Remarque 5.6

- Considérons le système linéaire suivant:

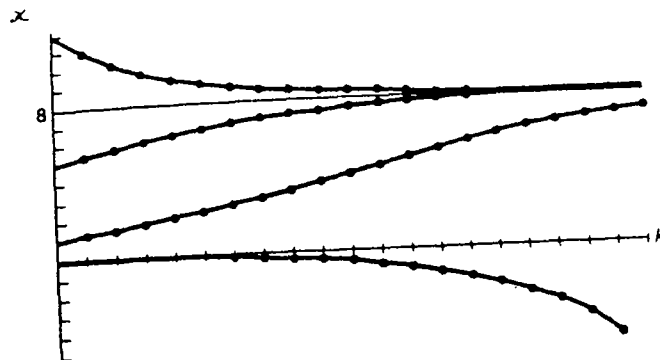
$$x(n+1) = rx(n) + b, \quad r \neq 1.$$

Le point fixe est $a = \frac{b}{(1-r)}$. a est stable si $|r| < 1$. a est instable si $|r| > 1$. Si $r = 1$, $x(0) = x(2) = x(4) = \dots$ et $x(1) = x(3) = x(5) = \dots$. On est en présence d'un 2-cycle. A partir du moment où $x(k)$, ne se rapproche pas ou ne s'éloigne pas du point fixe, quand $k \rightarrow \infty$, le point fixe n'est ni stable, ni instable, il est neutre.

- Un point semi-stable est un point attractif d'un côté, répulsif de l'autre côté.
- **Exemple 5.7** : Soit une représentation de l'équation logistique, à savoir:

$$x(n+1) = 1,2x(n) - 0,025x^2(n).$$

Le point fixe $a = 8$ est attractant et le point fixe $a = 0$ est repoussant.



$$x(n+1) = 1,2x(n) - 0,025x^2(n)$$

- Il est en général impossible de trouver une solution générale à un système dynamique non linéaire. On peut calculer $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(k)$ pour de grandes valeurs de k à l'aide de l'informatique, mais on ne peut pas trouver une solution algébrique pour $x(k)$ en fonction de k . Le problème est donc que l'on n'a jamais de certitude quand au point suivant que l'on va calculer. Néanmoins on peut savoir si un point fixe est attractif. Ceci donne des indications sur le comportement à long terme des solutions du système dynamique.
- On peut toujours utiliser la méthode de Newton pour calculer les points d'équilibre d'un système.
- Une solution $x(k)$ du système dynamique (5.1) est dite périodique de période m si m est le plus petit entier tel que

$$x(k+m) = x(k).$$

5.3 Propriétés liées aux points d'équilibre d'un système dynamique d'ordre un

Theorème 5.7 Soit a un point fixe pour le système dynamique d'ordre 1, (5.1), alors:

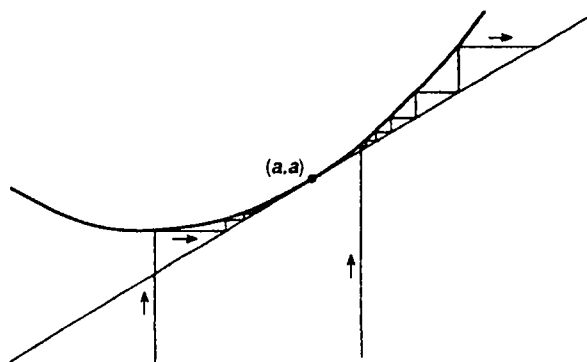
- a est stable si $|f'(a)| < 1$,
- a est instable si $|f'(a)| > 1$. Si $f'(a) = 1$, on ne peut pas conclure.

Nous considérons le cas particulier où $f'(a) = 1$.

Theorème 5.8 Soit a une valeur d'équilibre pour le système dynamique (5.1).

- Si $f'(a) = 1$ et $f''(a) \neq 0$ alors a est semi-stable.
- Si $f'(a) < 0$ alors a est semi-stable par valeurs supérieures à a .
- Si $f'(a) > 0$ alors a est semi-stable par valeurs inférieures à a .

Exemple 5.9



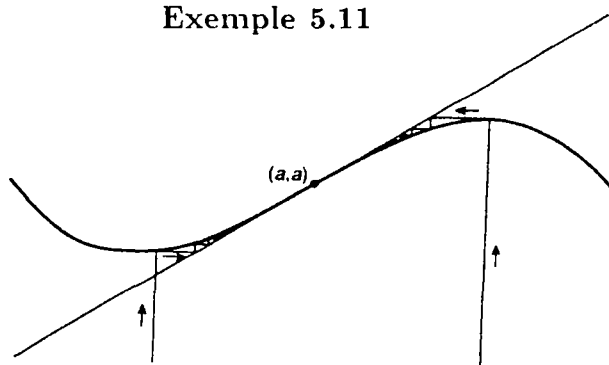
Sur ce dessin, au point d'équilibre (a, a) , $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.

Theorème 5.10 Soit a un point fixe pour le système dynamique (5.1). Supposons $f'(a) = 1$ et $f''(a) = 0$, alors,

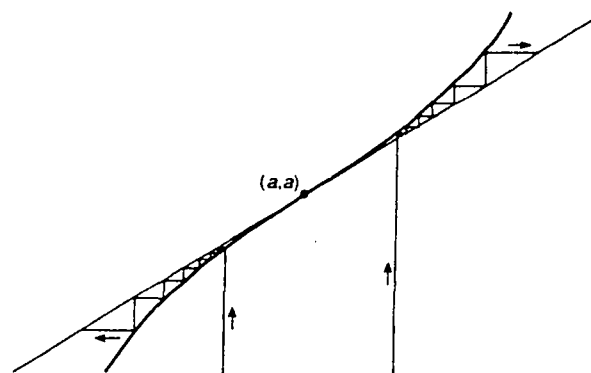
- Si $f'''(a) < 0$, le point fixe est stable.

- Si $f'''(a) > 0$, le point fixe est instable.

Exemple 5.11



point stable



point instable

Remarque 5.12

1. Si a est un point d'équilibre pour le système (5.1), où f est une fonction continue, alors a est aussi une valeur d'équilibre pour le système dynamique

$$x(n+2) = f(f(x(n))). \quad (5.2)$$

Ainsi si a est stable pour (5.1), il est stable pour (5.2) et vice-versa.

2. Cette remarque a son utilité dans le cas où la valeur d'équilibre a , pour le système dynamique (5.1) est telle que $f'(a) = -1$. En effet pour étudier la stabilité de a , on construit (5.2) qui a aussi a pour valeur d'équilibre. Si donc on peut déterminer la stabilité de a pour (5.2), on l'aura pour (5.1).
3. Si on pose $g(x) = f(f(x))$. On calcule $g'(x)$. On calcule ainsi $g'(a)$, $g''(a)$, $g'''(a)$ et on applique les théorèmes précédents.

5.4 Notion de cycle

Définition 5.13

- 2 nombres a_1 et a_2 forment un 2-cycle pour un système dynamique du premier ordre si, quand $x(n) = a_1$ alors $x(n+1) = a_2$ et $x(n+2) = a_1$.
- Un 2-cycle est stable s'il existe des intervalles (c_1, d_1) et (c_2, d_2) respectivement autour de a_1 et a_2 tel que:
 1. Si $x(0) \in (c_1, d_1)$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(2k) = a_1$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} x(2k+1) = a_2$.
 2. Si $x(0) \in (c_2, d_2)$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(2k) = a_2$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} x(2k+1) = a_1$.

Remarque 5.15 Le point a tel que $a = f(f(a))$ est soit un point fixe, soit une partie d'un 2-cycle pour le système dynamique (5.1).

Theorème 5.16 Supposons que le système dynamique (5.1) possède un 2-cycle formé des points a_1 et a_2 . Ce 2-cycle est:

- Stable si $|f'(a_1)f'(a_2)| < 1$.
- Instable si $|f'(a_1)f'(a_2)| > 1$.

Remarque 5.17 Les définitions et propriétés précédentes se généralisent sans difficulté au cas d'un k -cycle. Le problème est que la caractérisation suivante est peu maniable pour étudier les propriétés d'un k -cycle d'un système dynamique non linéaire d'ordre 1: Supposons qu'un système dynamique défini par (5.1) possède un k -cycle formé des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_k$, alors ce k -cycle est:

- Stable si $|f'(a_1) \dots f'(a_k)| < 1$.
- Instable si $|f'(a_1) \dots f'(a_k)| > 1$.

5.5 Théorie élémentaire de la bifurcation

Supposons que le système dynamique (5.1) dépende d'un paramètre λ . On peut considérer les points fixes a comme des fonctions de λ . On peut alors trouver, en fonction de λ , les points fixes qui sont répulsifs. Une telle démarche revient à construire un diagramme de bifurcation.

Exemple 5.18

Considérons par exemple le système dynamique défini par l'équation suivante:

$$x(n+1) = 1,8x(n) - 0,8x^2(n) - \lambda. \quad (5.3)$$

Pour le système (5.3), les points fixes vérifient l'équation

$$a = 1,8a - 0,8a^2 - \lambda.$$

Les solutions sont

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 5\lambda}}{2}. \quad (5.4)$$

- Si $1 - 5\lambda < 0$, soit $\lambda > 0.2$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \rightarrow -\infty$. Il n'y a pas de valeur d'équilibre.
- Si $1 - 5\lambda > 0$, soit $\lambda < 0.2$, il existe deux points d'équilibre donnés par (5.4): a_1 et a_2 . En fait en étudiant $f'(x)$, on voit que pour $-1.05 < \lambda < 0.2$:

- $a_1 = 1 + \sqrt{1 - 5\lambda}$ est un point stable.
- $a_2 = 1 - \sqrt{1 - 5\lambda}$ est un point instable.

- Si $\lambda = 0,2$, la valeur d'équilibre $a = 0.5$ est semi-stable par valeurs supérieures.

On peut résumer ces remarques par le diagramme suivant:

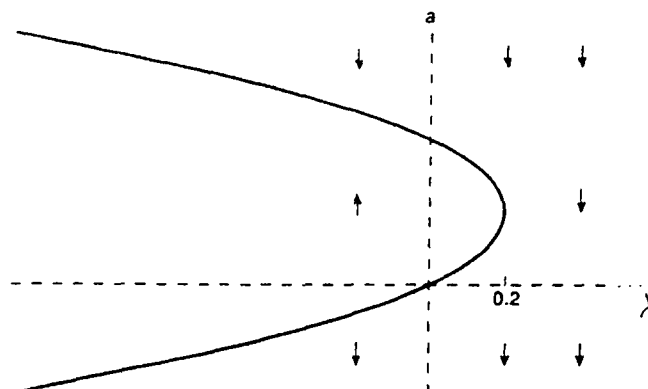


Diagramme de bifurcation pour
 $x(n+1) = 1,8x(n) - 0,8x^2(n) - \lambda$.

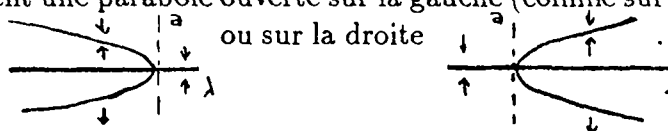
Si on note N_λ le nombre de points d'équilibre du système dynamique (5.1), par exemple pour le modèle (5.3) on a:

$$N_\lambda = \begin{cases} 2 & \text{si } N_\lambda < 0.2 \\ 1 & \text{si } N_\lambda = 0.2 \\ 0 & \text{si } N_\lambda > 0.2. \end{cases}$$

Definition 5.19 Si N_λ n'est pas constant sur l'intervalle $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, alors le nombre λ_0 est appelé bifurcation, et on dit que le système dynamique (5.1) a une bifurcation quand λ dépasse λ_0 .

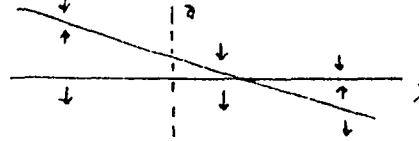
Definition 5.20 Supposons qu'au point de bifurcation λ_0 :

- Les points fixes forment une parabole ouverte sur la gauche (comme sur la figure précédente) ou sur la droite



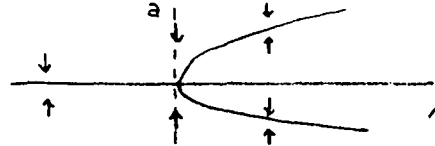
Une telle bifurcation s'appelle selle ("saddle").

- Les points fixes se trouvent par exemple sur 2 droites qui se croisent



Une telle bifurcation s'appelle transcritique ("transcritical").

- Les points fixes forment une parabole ouverte sur la droite ou sur la gauche et une droite coupe cette parabole.



Une telle bifurcation s'appelle fourche ("pitchfork") .

5.6 Notion de chaos

Definition 5.21 Un ensemble de points S est appelé ensemble attracteur pour le système dynamique (5.1), s'il existe un nombre δ tel que si $|x(0) - s| < \delta$ pour $s \in S$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k) - S| = 0$.

Definition 5.22 Un système dynamique ayant pour attracteur S est transitif si pour tout $x(0) \in S$ et pour tout $s \in S$, il existe une sous suite $x(k_j)$ de $x(k)$ telle que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x(0) - s \mid < \delta_\varepsilon \rightarrow \forall s \limsup_{k, j \rightarrow \infty} \mid x(k_j) - s \mid < \varepsilon$.

Definition 5.23 Un système dynamique a une dépendance sensible aux valeurs initiales si, quand on considère 2 valeurs initiales $x(0)$ et $y(0)$ qui sont proches l'une de l'autre, alors $x(k)$ et $y(k)$ peuvent être éloignées l'une de l'autre, i.e., pour chaque $\varepsilon > 0$, tel que $0 < |x(0) - y(0)| < \varepsilon$, alors $\limsup_t |x(K) - y(K)| > \varepsilon$.

Remarque 5.24 Même s'il existe un K pour lequel $x(k)$ et $y(k)$ sont éloignés de plus de ε , il peut exister des valeurs de k pour lesquelles ce ne soit pas le cas.

Définition 5.25 Supposons qu'un système dynamique défini par (5.1) possède les propriétés suivantes:

- (i) Transitif pour son attracteur S .
- (ii) Sensible aux conditions initiales.
- (iii) Ayant des cycles répulsifs proches de son attracteur.

Un tel système dynamique vérifiant (i) et (ii) a un comportement chaotique faible, s'il vérifie aussi (iii), il a un comportement chaotique fort.

Remarque 5.26

- Intuitivement un système dynamique qui est chaotique n'est pas prédictible. Sa dépendance aux conditions initiales rend sa prévision imprécise, mais il est prédictible dans un autre sens à cause de la transitivité.
- L'exemple suivant permet d'illustrer chacune des propriétés données dans la définition 5.24.

Exemple 5.27 : La fonction logistique.

On considère l'équation définie par la relation suivante —

$$x(n+1) = \lambda x(n)(1 - x(n)). \quad (5.5)$$

Cette équation a deux points fixes

- $a = 0$. Il est attractif si $0 < \lambda < 1$.
- $a = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Il est Répulsif si $1 < \lambda \leq 3$.

1. Si $\lambda > 3$, ces deux points fixes sont répulsifs et donc quand $k \rightarrow \infty$, $x(k)$ ne tend pas vers un point fixe, ainsi si $S \equiv (0, \frac{\lambda-1}{\lambda})$, S n'est pas transitif.
2. Si $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}(= 3,45)$, alors le système (5.5) présente un 2-cycle attractif aux points

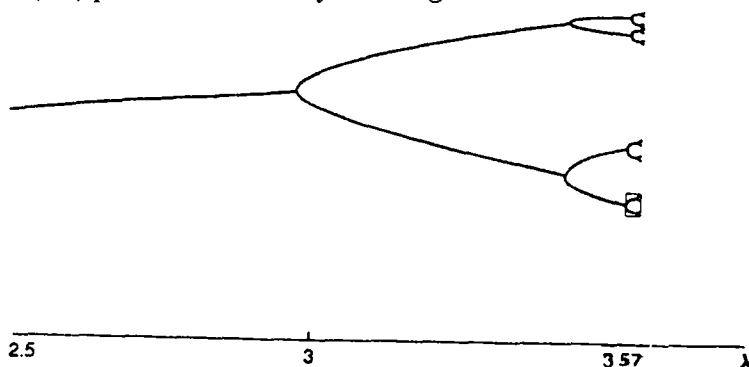
$$\bullet a_1 = \sqrt{\lambda+1} \left(\frac{\sqrt{\lambda+1} + \sqrt{\lambda-3}}{2\lambda} \right)$$

et

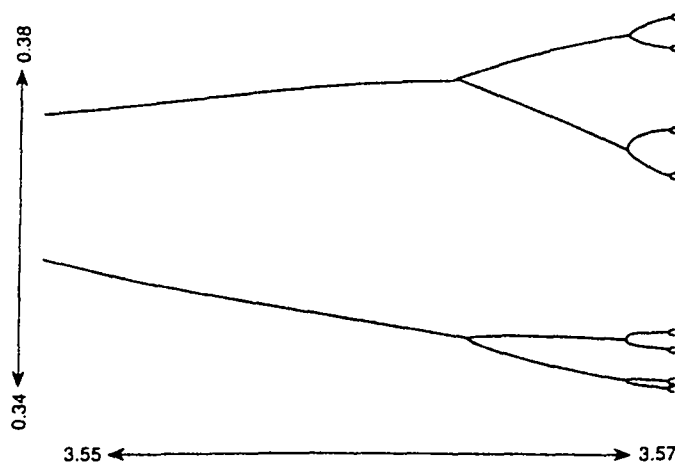
- $a_2 = \sqrt{\lambda + 1} \left(\frac{\sqrt{\lambda+1} - \sqrt{\lambda-3}}{2\lambda} \right)$.

Notons que ce 2-cycle correspond a deux points fixes pour le système $x(n+2) = f(f(x(n)))$ où $f(x) = \lambda x(1-x)$.

3. Si $\lambda = 3,45$, alors on a une bifurcation "pitchfork" telle qu'elle a été définie précédemment. Cela correspond pour le système (5.5) a un point de bifurcation où le cycle du système double.
4. Si $3,45 < \lambda < 3,54$, on a un 4-cycle attractif.
5. Si on continue, on va trouver un nombre C tel que pour $3,54 < \lambda < C$. Le système dynamique (5.5) a un 8-cycle attractif. En fait, on a une suite de nombres $c_1 < c_2 < \dots$ tel que quand $c_n < \lambda < c_{n+1}$, le système dynamique a un 2^n -cycle attractif. Mais on peut voir aussi que les valeurs c_n sont toutes plus petites que 3,57. Ainsi plus le nombre λ est proche de 3,57, plus l'ordre du cycle est grand.



6. Si on agrandit la partie correspondant à $3,55 < \lambda < 3,57$, on a le graphe suivant et ainsi de suite.



Le problème est de savoir ce qui se passe pour $\lambda > 3,57$. Il semble qu'a priori les nombres $x(k)$ ne suivent aucun modèle. Si on calcule $x(k)$, $k = 0, 1, \dots$ pour $\lambda = 3,58$ et que l'on représente ces valeurs sur une droite, il n'apparaît pas de phénomène cyclique, mais des sortes d'agrégats de points en quatre paquets.

On peut voir que le système dynamique

$$x(n+1) = 3,58x(n)(1-x(n)). \quad (5.6)$$

est transitif et est sensible aux conditions initiales, il a aussi un cycle d'ordre 2^n répulsif pour chaque valeur de n . Un tel système dynamique présente donc un comportement chaotique.

5.7 Système dynamique à valeurs vectorielles

On suppose maintenant que $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur de dimension k régi par une équation du type suivant

$$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t)). \quad (5.7)$$

$\mathbf{x}(t) \in R^k$ et f est une fonction non linéaire à valeurs R^k (système dynamique non linéaire d'ordre 1 à valeurs vectorielles).

Exemple 5.28 : $k = 2$

$$f : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{pmatrix} \quad f_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad i = 1, 2.$$

f_1 et f_2 sont 2 fonctions à 2 variables supposées continûment différentiables.

Définition 5.29

- La suite de points de R^k , $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$ $t \in N$ est appelée une orbite (ou une trajectoire) pour l'équation (5.7).
- Un point $A = (a_1, \dots, a_k)$ est un vecteur d'équilibre ou un point fixe pour le système dynamique (5.7) si

$$(a_1, \dots, a_k)' = (f_1(a_1, \dots, a_k), \dots, f_k(a_1, \dots, a_k))'.$$

Remarque 5.30 : $k = 2$.

1. Supposons que a soit un point d'équilibre pour le système dynamique (5.7). Appelons J la matrice des dérivées partielles:

$$f : \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- Si $\|J\| < 1$, alors A est un point d'équilibre stable et $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = a$, si le point d'origine est proche de a .
 - Si $\|J\| > 1$, alors A est instable.
2. Les définitions de cycle, d'attracteur et les propriétés des attracteurs définies précédemment se généralisent au cas vectoriel.
 3. Il est possible aussi que le comportement local en A de l'application f soit gouverné par la linéarisation de la fonction f en A (Guckenheimer et Holmes, (1983)). Si on suppose que les fonctions f_i sont analytiques en A , et si J représente la matrice des premières dérivées de chacune de ces fonctions en A , alors une linéarisation locale en A est la suivante, pour $k = 2$,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \text{un vecteur constant.} \quad (5.8)$$

Cette linéarisation va permettre d'étendre au cas des systèmes non linéaires des résultats bien établis dans le cas linéaire.

Rappel 5.31 :

Quelques propriétés relatives au système dynamique linéaire ($k=2$).

Considérons le système dynamique linéaire défini de la manière suivante:

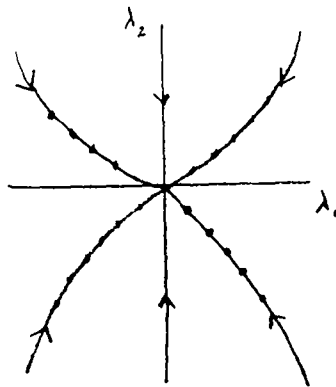
$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

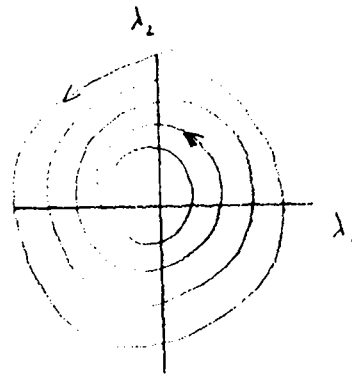
où B est une matrice réelle 2×2 .

- La suite de points $(x(t))_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (5.9) est une orbite pour ce système.
- Tout point initial génère une orbite unique pourvu que B n'ait pas de valeur propre λ_i nulle, $i = 1, 2$. (On suppose que l'on est dans ce cas là). Si $|\lambda_1| \neq 1$ et $|\lambda_2| \neq 1$, l'origine est appelée point fixe hyperbolique.
- Les valeurs propres caractérisent les trajectoires ou orbites de (5.9).
- L'espace engendré par les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres de B de module plus petit que 1 est appelé espace stable, noté E^s ; de même l'espace instable E^u , est engendré par les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres de B de module plus grand que 1. L'espace E^c engendré par les valeurs propres dont le module est égal à 1 est appelé espace du centre.

On obtient ainsi une classification des orbites de la manière suivante pour $k = 2$:



$0 < |\lambda_1| < 1.$
 $0 < |\lambda_2| < 1.$
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$
 (noeud).



$0 < |\lambda_1| < 1.$
 $0 < |\lambda_2| < 1.$
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}.$
 (foyer stable).

- des points fixes.
- des orbites fermées.
- des unions de points fixes et des trajectoires connectées avec ces premiers.

et à distinguer:

- Les orbites homocliniques qui connectent un point à lui même.
- Les orbites hétérocliniques qui connectent des points distincts.

Ces notions généralisent celles définies en dimension 1 et permettent de caractériser les chaos de la même façon qu'en dimension 1.

ISSN 0249 - 6399