Condition suffisante pour la stabilisation globale des systèmes en cascade

Rachid Outbib

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-LORRAINE

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1455

Programme 5
Traitement du Signal,
Automatique et Productique

CONDITION SUFFISANTE POUR LA STABILISATION GLOBALE DES SYSTEMES EN CASCADE

Rachid OUTBIB

Juin 1991

RR-1455

SUFFICIENT CONDITION FOR GLOBAL STABILIZATION OF CASCADE SYSTEMS

Condition suffisante pour la stabilisation globale des systèmes en cascade

Rachid OUTBIB

Projet CONGE - INRIA-LORRAINE

& URA CNRS 399 - M.M.A.S.

CESCOM

Technopôle METZ 2000

4, rue Marconi

57070 METZ

Tél. : 87 20 35 12 - Fax. : 87 76 39 77

FRANCE

Abstract :

In this paper, we propose a condition under which a nonlinear system can be globally asymptotically stabilized with a smooth feedback. Then we show that our result extends the concept of weakly minimum phase systems having relative degree 1, and generalizes the stabilization condition of systems obtained by cascading a linear controllable system and a general nonlinear system.

Résumé :

Dans ce papier, nous proposons une condition sous laquelle un système non linéaire peut être rendu globalement asymptotiquement stable par un feedback régulier. Puis, nous montrons que notre résultat permet d'améliorer le concept des systèmes à phase minimale faible de degré relatif égal à 1 développé récemment, et de généraliser la condition de stabilisation des systèmes obtenus par une cascade d'un système linéaire contrôlable et un système non linéaire général.

Mots clés :

Système non linéaire, système de phase minimale faible, exponentiellement asymptotiquement stable, intégrateur.

1. INTRODUCTION

On considère le système non linéaire suivant

$$\dot{x} = f(x, y) \qquad (1.1.a)$$

$$\dot{y} = g_1(x, y) + ug_2(x, y) \qquad (1.1.b)$$

$$x \in \mathbb{R}^{n2},\ y \in \mathbb{R}^{n2} \text{ et } u \in \mathbb{R}^{m}$$

f, g_1 et g_2 étant des champs de vecteurs C^∞

Le système (1.1.a) représente le système conduit et (1.1.b) le système conducteur. Le système (1.1.) sera dit globalement stabilisable s'il existe un feedback lisse tel que le système bouclé est globalement asymptotiquement stable (G.A.S.).

Dernièrement, BYRNES-ISIDORI ont développé une philosophie de stabilisations des systèmes non linéaires basée sur la théorie des systèmes à phase minimale (cf. [2] - [5]). Cette théorie est basée, d'abord, sur un changement de coordonnées de certains systèmes avec sortie

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + ug(x) \\ y &= h(x) \qquad (1.2.) \\ x &\in \mathbb{R}^n,\ yu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

pour les transformer sous la forme normale :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, \xi_1, \ldots, \zeta_\upsilon) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \qquad (1.3.) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_\upsilon &= u \end{aligned}$$

où $z \in \mathbb{R}^{n-\upsilon}$, ξ_i des scalaires et l'entier υ représente le degré relatif.

Un système est dit globalement à phase minimale si en outre, le système défini sur $\mathbb{R}^{n-\upsilon}$

$$\dot{z} = f(z,0) \qquad (1.4.)$$

appelé "zéro dynamique", admet zéro comme point critique globalement asymptotiquement stable. (Le système est dit à phase minimale faible si il existe une fonction scalaire V(z) définie, positive, et propre telle que $< f(z, 0)\ ,\ \nabla V(z) > \ \leq 0$ pour tout z. i.e. le système admet l'origine pour point singulier stable et l'on dispose d'une fonction de Lyapunov pour le montrer.)

Divers auteurs ont proposé par des arguments élémentaires à la Lyapounov des contrôles stabilisants si le degré relatif est égal à un. [2] [18] [5] [11] [15].

En ce qui concerne les systèmes à phase minimale d'ordre relatif supérieur ou égal à deux, BYRNES-ISIDORI ont affirmé, d'une part, que le système (1.3.) peut être semi-globalement stabilisable, (i.e pour tout ensemble borné U de $\mathbb{R}^n$, il existe un contrôle lisse qui rend le système localement asymptotiquement stable avec un bassin d'attraction contenant U) [cf. [3] théorème 4.2.4.], d'autre part, que les systèmes exponentiellement à phase minimale, (i.e. la zéro dynamique est exponentiellement asymptotiquement stable) ont la propriété suivante :

Pour un ensemble borné U de $\mathbb{R}^n$, on peut choisir un feedback qui rend le système stable pour les conditions initiales dans U et des petites entrées (cf. [4] théorème 2.2.)

SUSSMANN a montré que ces deux théorèmes étaient faux en exhibant deux contres exemples (cf. [16])

Si l'on considère un système triangulaire $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$

tels que le système $\dot{x} = f(x,0)$ admette l'origine comme point singulier G.A.S. et le système $\dot{y} = g(y)$ admette l'origine pour point singulier G.A.S., alors localement l'origine est stable pour le système triangulaire. Il est clair que sans hypothèses conditionnelles, on ne peut conclure à la stabilité globale [il suffit d'avoir, par exemple, une séparatrice dans le "plan (x,y)"]

De la même façon, contrairement à ce qu'on cru BYRNES et ISIDORI, on ne pourra conclure pour la stabilité semi-globale. L'exemple de SUSSMANN utilise une séparatrice qui limitera le bassin d'attraction .

Comme généralisation de la forme normale (1.3.), KOKOTOVIC-SUSSMANN ont étudié la forme générale

$$\dot{z} = f(z, \xi) \qquad (1.5.a)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu \qquad (1.5.b)$$

$$y = C\xi$$

$$z \in \mathbb{R}^n \ , \ \xi \in \mathbb{R}^\nu \ \text{ et } \ y, u \in \mathbb{R}^m$$

A, B et C sont des matrices de dimensions convenables où la paire (A,B) est contrôlable et la fonction f admet la décomposition $f(x,\xi) = f_0(x,\xi) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x, \xi)$ de sorte que le système

$$\dot{x} = f_0(x,\xi) \qquad (1.6.)$$

soit globalement asymptotiquement stable uniformément en ξ.

Le résultat principal de [11] est que sous une certaine condition, le système (1.5.) est globalement stabilisable. Cette condition est basée sur le lemme positif réel (cf. [1] [17]) et le principe de la démonstration est de se ramener à l'application du principe de LASALLE.

Dans ce papier, nous nous proposons de donner une condition suffisante pour stabiliser le système (1.1.) dans le cas général. On montrera qu'en utilisant notre technique, on peut non seulement améliorer la méthode de stabilisation (introduite récemment dans [6]) de certains systèmes à phase minimale faible d'ordre relatif égal à un, mais on peut généraliser le résultat principal de [11]. En particulier, nous stabilisons avec cette méthode les exemples suivants :

Exemple 1.1. :

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -(x-1)^2 x + y^a \\ &\dot{y} = u \qquad\qquad (1.7.) \\ &a \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ce système présente la particularité qu'il ne vérifie ni les conditions du théorème (2.1.) de [11] ($\dot{x} = -x(x-1)^2$ est seulement stable) ni celles du théorème (5.4.) de [6] (cf. paragraphe III)

Exemple 1.2. :

Dans le paragraphe III, on montrera qu'en améliorant un résultat classique concernant les systèmes en chaînes d'intégrateurs, on peut stabiliser d'une façon élémentaire l'exemple des "cubiques" problème proposé par CROUCH-IRVING [8]

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y^3 \\ &\dot{y} = z^3 \qquad\qquad (1.8.) \\ &\dot{z} = u \end{aligned}$$

DEFINITIONS ET NOTATIONS

On dira qu'une distribution $\mathcal{D}$ et une fonction V de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ C^1 vérifient la condition J.Q. si l'origine est le seul point de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\forall\, \tau \in \mathcal{D} \quad \tau.V(\xi) = < \tau.\nabla V(\xi) > = 0 \quad (\mathcal{D}.V(x) = 0)$$

où ∇V représente le gradient de V.

Soient deux fonctions C^{∞}

$$f : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

$$\text{et } g = (g_1, \ldots, g_m) : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{m * (n_1+n_2)}$$

On notera $\mathcal{D}(f,g)$ la distribution définie par $\mathcal{D}(f,g) = \text{Span}\left\{f, ad_f^k\, g_i \ (i = 1, \ldots, m)\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\}$

Une fonction scalaire V(x) est dite propre si pour tout réel α, l'ensemble $\{x/\,(x) \leq \alpha\}$ est compact.

2. RESULTAT PRINCIPAL

On suppose qu'il existe deux fonctions scalaires C^1 définies positivement et propres

$$V_1 : \mathbb{R}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$V_2 : \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que le système

$$\dot{x} = f(x, y) \qquad (1.1.)$$

$$\dot{y} = g_1(x, y) + u g_2(x, y)$$

vérifie l'hypothèse suivante.

Hypothèse A

A1] Hypothèse sur le système conduit

La fonction f admet la décomposition suivante :

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y)\ \nabla V_2(y)$$

où f_0 vérifie $\forall\, y \in IR^{n_2}$. $f_0(0, y) = 0$

.. $< f_0\,(x, y), \nabla V_1\,(x) > \ \leq 0$

A2] Hypothèse sur le système conducteur

Il existe une fonction h de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que

$\forall\, x \in \mathbb{R}^{n_1}$. $G(x,0) = 0$

.. $< \nabla V_2(y)\ ,\ G(x,y) > \ \leq 0$

où

$$G(x, y) = g_1\,(x, y) + h\,(x, y)\, g_2\,(x, y) + \nabla V_1\,(x)\, f_1\,(x, y)$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix} f \\ g_1 + hg_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ g_2 \end{pmatrix}$$

et $W(x,y) = V_1(x) + V_2(y)$

Théorème 2.1. | Si $\mathscr{D}(X,Y)$ et W vérifient la condition J.Q. alors le système (1.1.) est globalement stabilisable

Preuve :
En effectuant la transformation linéaire en contrôle $u = v + h$ le système (1.1.) devient

$$\dot{z} = X(z) + vY(z) \qquad (2.1.)$$

où $z = (x,y)$

Ce système vérifie $X.W(z) = \langle X, \nabla W \rangle (z) \leq 0$. On applique alors la technique classique qui consiste à prendre $v(z) = -\ Y.W(z)$ (cf. JURDJEVIC-QUINN [9], GAUTHIER-BORNARD[7], K.K. LEE and A. ARAPOSTHATIS [10], ...).

Il est clair que le système bouclé est stable. Pour montrer qu'il est G.A.S., on raisonne par absurde. En supposant qu'il existe $\hat{x} \neq 0$ dans le plus grand ensemble invariant I de $\Omega = \{W^* = 0\}$, on peut montrer (cf. par exemple [7] qui traîte le cas $X.W(z) = 0 \ \ \forall z$) que $\mathscr{D}(X,Y).W(\hat{x}) = 0$, ceci contredit l'hypothèse du théorème. Comme l'ensemble I est réduit à l'origine, on applique le principe d'invariance de LASALLE pour conclure.

Remarque 3.1. :

Si le système conduit (1.1.a) vérifie $f_0(x,y) = \big(f_{01}(x_1,y)\ ,\ f_{02}(x_2,y)\big)$ et $V_1(x) = V_{11}(x_1) + V_{12}(x_2)$ tel que $< f_{01}(x_1,y)\ ,\ \nabla V_{11}(x_1) >$ définie, négative, uniformément en y alors l'ensemble $\{\ (x,y) \,/\, \mathscr{D}(X,Y).\ W(x,y) = 0\}$ est inclus dans $\{(x_1,x_2,y) \,/\, x_1 = 0\}$ ainsi l'hypothèse que $\mathscr{D}(X,Y)$, W vérifient la condition J.Q. peut être exprimée dans le sous-espace $\{x_1 = 0\}$ où la distribution et la fonction de Lyapounov ne dépendent que de x_2 et y.

3. APPLICATIONS

3.1. SYSTEMES D'ORDRE RELATIF EGAL A UN

Dans le cas particulier où g_2 est inversible pour tout couple (x,y), il suffit de prendre

$$h(x,y) = [g_2(x,y)]^{-1}\left(- g_1(x,y) - \nabla V_1(x)\, f_1(x,y)\right)$$

On déduit comme premier corollaire du théorème 2.1. le résultat suivant

Corollaire 3.1. Si l'hypothèse [A1] est vérifiée, g_2 est inversible pour tout couple (x,y) et $\mathscr{D}\left(f_0(x,0)\,,\, f_1(x,0)\right)$, $V_1(x)$ vérifient la condition J.Q. Alors le système (1.1.) est globalement stabilisable.

Dans ce qui suit, nous allons montrer l'intérêt de prendre (quand ceci est possible) une autre fonction de Lyapounov que $V_2(y) = y^T y$. Soit le système défini dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + yg(y) \\ \dot{y} &= u \end{aligned} \qquad (3.1.)$$

On suppose qu'il vérifie l'hypothèse B suivante

Hypothèse B

(i) il existe une fonction V, C^1, définie positive, propre telle que

$$< f(x)\,,\, \nabla V(x) > \;\leq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^2$$

(ii) f possède x_0 comme autre point critique que l'origine.

(iii) la fonction $g_1(y) = yg(y)$ est le gradient d'une fonction G(y) définie, positive, propre

(iv) g est C^1 tel que $g(0) = 0$

D'après le théorème 2.1., on peut prendre $\begin{cases} u(x,y) = - \nabla V(x) - yg(y) \\ W(x,y) = V(x) + G(y) \end{cases}$

Il est clair que le système bouclé est G.A.S.

Si comme dans [5] [6], on choisissait la fonction de Lyapounov $V(x) + \frac{1}{2}y^2$ au lieu de celle que nous proposons. Alors, pour tout contrôle C^1, soit le système bouclé possède $(x_0,0)$ comme autre point critique de l'origine, soit la fonction de Lyapounov considérée n'est pas décroissante sur les trajectoires du système bouclé et l'on ne peut donc pas conclure sur la globale stabilité asymptotique.

Exemple 1.1. (bis)

Si a est pair , il est facile de voir que le système ne peut pas être stabilisable puisque si alors $x(t) \geq 1$ pour $t \geq 0$. On suppose alors que a est impair, et on prend

$$W(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{a+1}y^{a+1}$$
$$u(x,y) = - x - y$$

3.2. CHAINE D'INTEGRATEURS

Supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \qquad (3.2.)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}$$

vérifie l'hypothèse suivante

Hypothèse C`

Il existe deux fonctions C^∞ $\bar{u}(x)$ et $V(x)$ telles que

(i) V propre, définie positive

(ii) $< f(x,\bar{u}(x))\, , \nabla v(x) > \ \leq 0$

Après un changement de variables et une transformation linéaire en contrôle, le système (3.2.) devient

$$\dot{x} = f(x,\bar{u}(x)) + y_1\, f_1(x,y_1)$$
$$\dot{y}_1 = v$$

Corollaire 3.2. | Si $\mathcal{D}\left(f(x,\bar{u}(x)\, , f_1(x,0)\right)$ et V(x) vérifient la condition J.Q., alors le système (3.2.) est globalement stabilisable

Ce résultat représente une amélioration d'un lemme qui apparaît souvent dans la littérature (cf. par exemple [12] [15])

Exemple 1.2. (bis)

Soit le système défini sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^3 \\ \dot{y} &= v^3 \end{aligned} \qquad (3.4.)$$

Il est facile de voir que pour $v = -x$ et $V(x,y) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{4}x^4$ le système bouclé est stable (et non G.A.S.). En effectuant le changement de variables $z := z - x$ et la transformation linéaire convenable, (1.8.) devient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^3 \\ \dot{y} &= (z - x)^3 \\ \dot{z} &= u_1 \end{aligned} \qquad (3.5.)$$

Si on prend $u_1(x,y,z) = - y^3(z^2 - 3xz + 3x^2) - z$

et $W(x,y,z) = V(x,y) + \frac{1}{2}z^2$

On vérifie aisément que le système bouclé est G.A.S.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[01] B.O. ANDERSON and S. VONGPANITLERD
"Network Analysis and Synthesis "
Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ, 1973)

[02] C.I. BYRNES and A. ISIDORI
" A frequency domain philosophy for nonlinear systems with applications to stabilization and adaptative control"
In Procc. 33rd IEEE - Conf. Decision Contr. (1984) - pp. 1569-1573

[03] C.I. BYRNES and A. ISIDORI
"Global feedback stabilization of nonlinear minimale systems"
In Procc. 24 th IEEE Conf. Decision Contr. (1985) - pp. 1031-1037

[04] C.I. BYRNES and A. ISIDORI
"Feedback stabilization about attractions and the problem of asymptotic disturbance rejection"
In Procc. 27 th IEEE Conf. Decision Contr. (1988) - pp. 32-36

[05] C.I. BYRNES and A. ISIDORI
"New results and examples in nonlinear feedback stabilization"
Syst. Contr. Lett. (1989) Vol. 12 pp. 437-442

[06] C.I. BYRNES , A. ISIDORI , J.C. WILLEMS
"Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear system"

[07] J.P. GAUTHIER and G. BORNARD
"Stabilisation des systèmes non linéaires outils mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des systèmes et le traitement du signal
Vol. 1 (Eds. I.D. LANDAU) PARIS : CNRS (1981) pp. 307-324

[08] M. IRVING and P.E. CROUCH
On sufficient conditions for local asymptotic stability of nonlinear systems whose linearisation is uncontrollable
Control Theory Centre Report 119 (1983) - University of Warwick

[09] V. JURDJEVIC and QUINN : Controllability and stability
J. Differential Equations 28 (1978) pp. 381-389

[10] N. KALOUPTSIDIS and J. TSINIAS
Stability improvement of nonlinear systems by feedback
IEEE Automat. Control 29 (1984) pp. 364-367

[11] P.V. KOKOTOVIC and H.J. SUSSMANN
A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems
Systems Control Lett. 13 (1989) pp. 125-133

[12] K.K. LEE and A. ARAPOSTHATIS
Remarks on smooth-feedback stabilization of nonlinear systems
Systems Control Lett. 10 (1989) pp. 41-44

[13] I. KUPKA and J.P. GAUTHIER
A separation principal for bilinear systems with dissipative drift
To appear

[14] J. LASALLE and SLEFSCHATZ
Stability by Liapounov's direct method with applications
Academic Press - New York (1961)

[15] E.D. SONTAG and H.J. SUSSMANN
Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body.
Systems Control Lett. 12 (1988) pp.213-217

[16] H.J. SUSSMANN
Limitation on the stabilizability of globally minimum phase systems
IEEE Transaction on Automatic Control - Vol. 35, N° 1 (1990)

[17] CG. TAO and P.A. IOANNOU
Strictly positive real matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich lemma,
IEEE Trans. Automat. Control 33(12) (1988) pp. 1183-1185

[18] J. TSINIAS
Sufficient Lyapounovlike conditions for stabilization
Math. Control Signals Systems 2 (1989) pp. 343-347

ISSN 0249-6399