Graphes d'événements stochastiques : temps de cycle moyen et marquage

Nathalie Sauer

▶ **To cite this version:**

Nathalie Sauer. Graphes d'événements stochastiques : temps de cycle moyen et marquage. [Rapport de recherche] RR-1450, INRIA. 1991, pp.12. inria-00075110

HAL Id: inria-00075110
https://inria.hal.science/inria-00075110

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-LORRAINE

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1450

Programme 5
Traitement du Signal,
Automatique et Productique

GRAPHES D'EVENEMENTS STOCHASTIQUES : TEMPS DE CYCLE MOYEN ET MARQUAGE

Nathalie SAUER

Juin 1991

GRAPHES D'EVENEMENTS STOCHASTIQUES : TEMPS DE CYCLE MOYEN ET MARQUAGE

STOCHASTIC EVENT GRAPHS : CYCLE TIME VS. MARKING

Nathalie SAUER

Projet SAGEP
INRIA-Lorraine
CESCOM
Technopôle Metz 2000
4, rue Marconi
57070 METZ
Tél : 87.20.35.00 Fax : 87.76.39.77

Résumé :

Dans ce papier, nous considérons un type particulier de réseaux de Petri appelé graphes d'événements temporisés. Nous examinons le cas où les temps de franchissement sont aléatoires et bornés. Le but est d'obtenir un temps de cycle moyen aussi petit que possible en utilisant un nombre donné de jetons. Nous montrons que sous certaines conditions, la diminution la plus importante du temps de cycle moyen est obtenue lorsqu'on ajoute un jeton dans le circuit élémentaire qui a le temps de cycle moyen le plus grand. Nous illustrons ce résultat avec un exemple.

Mots clés :

Réseaux de Petri stochastiques, Systèmes discrets, Temps de cycle .

Abstract :

In this paper, we consider a special type of Petri nets called timed event graphs. We investigate the case when firing times are stochastic and bounded. The goal is to reach the lowest possible average cycle time using a given number of tokens. We show that under certain conditions, the average cycle time decreases the most when we add one token in the elementary circuit having the greatest average cycle time. We illustrate this result with a small example.

Keywords :

Stochastic Petri nets, Discrete systems, Cycle time.

1. RAPPELS SUR LES RESEAUX DE PETRI

1.1. Définitions

Un **réseau de Petri** est un graphe orienté dont les noeuds sont des places ou des transitions. On peut définir un réseau de Petri comme étant un triplet (P,T,F)

où P : ensemble fini de places.
T : ensemble fini de transitions.
F : ensemble d'arcs reliant les places aux transitions et les transitions aux places.

Les arcs des réseaux peuvent être valués par des entiers positifs. On note alors $a : F \rightarrow IN$ la fonction de valuation des arcs.

On dit qu'un réseau de Petri est muni d'un **marquage** quand il existe une fonction de marquage $M : P \rightarrow IN$ qui à chaque place fait correspondre le nombre de jetons qu'elle contient.

On appelle **graphe d'événements** un réseau de Petri dans lequel chaque place possède une seule transition d'entrée et une seule transition de sortie. On dit qu'un graphe d'événements est **temporisé** si à chaque transition t est associé un temps $\mu(t)$ déterministe ou stochastique.

Une transition t est **franchissable** pour un marquage M si toutes les places p qui précèdent la transition sont telles que $M(p) \geq a(p,t)$. Le **franchissement** ou **mise à feu** d'une transition t consiste à retirer $a(p_e,t)$ jetons dans toutes les places p_e qui précèdent la transition et à ajouter $a(t,p_s)$ jetons dans les places p_s qui suivent la transition.

Un **circuit élémentaire** est un chemin qui relie un sommet à lui-même et tel qu'en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

1.2. Propriétés

Un graphe d'événements est **fortement connexe** s'il existe un chemin orienté qui relie tout sommet du graphe à tout autre sommet.

Un graphe d'événements est **borné** s'il existe un entier positif k tel que pour tout marquage M accessible à partir du marquage initial Mo, et pour toute place p du graphe, $M(p) \leq k$.

Un graphe d'événements marqué est **vivant** si quelque soient la transition t et le marquage M, il existe une séquence de franchissements, qui, partant de M, conduit à un marquage qui permet de franchir la transition t.

Un graphe d'événements fortement connexe possède en particulier les propriétés suivantes :

i) Le nombre de jetons $M(\gamma)$ dans un circuit élémentaire γ est invariant.

ii) Il y a blocage au bout d'un temps fini si et seulement si l'un au moins des circuits élémentaires ne contient aucun jeton à l'instant initial.

2. PROPRIETES DES GRAPHES D'EVENEMENTS DETERMINISTES

Soit Γ l'ensemble des circuits élémentaires d'un graphe d'événements G. Pour chaque circuit élémentaire $\gamma \in \Gamma$, on peut définir le **temps de cycle** par

$$C(\gamma) = \frac{\mu(\gamma)}{M(\gamma)}$$

où $\mu(\gamma)$ est la somme des temps de franchissement des transitions de γ

i.e. $\mu(\gamma) = \sum_{t \in \gamma} \mu(t)$.

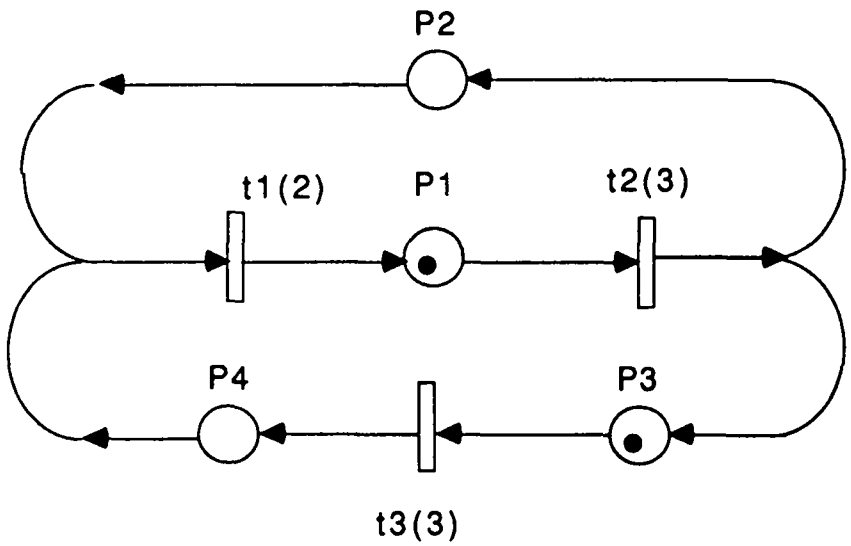
$M(\gamma)$ est la somme des jetons contenus dans γ

i.e. $M(\gamma) = \sum_{p \in \gamma} M(p)$ si, pour le marquage M, aucun jeton n'est en cours de franchissement d'une transition.

Comme le nombre de jetons dans un circuit élémentaire est invariant, ce temps de cycle $C(\gamma)$ caractérise le circuit élémentaire γ.

Si $\gamma^* \in \Gamma$ est tel que $C(\gamma^*) = \text{Max } C(\gamma)$ pour tous les $\gamma \in \Gamma$, alors γ^* est appelé **circuit critique** et $C(\gamma^*) = C^*$ est le temps de cycle du graphe d'événements G. Ce sont les circuits critiques qui définissent la "vitesse de fonctionnement" du graphe d'événements.

Exemple :



Le circuit élémentaire $\gamma 1$ est défini par (t1,p1,t2,p2) et son temps de cycle C1 est égal à $\frac{2+3}{1} = 5$.

Le circuit élémentaire $\gamma 2$ est défini par (t1,p1,t2,p3,t3,p4) et son temps de cycle C2 est égal à $\frac{2+3+3}{2} = 4$.

Le graphe d'événements constitué des circuits élémentaires $\gamma 1$ et $\gamma 2$ a pour temps de cycle C = Max(C1,C2) = 5.

3. PROPRIETES DES GRAPHES D'EVENEMENTS STOCHASTIQUES

Les graphes d'événements stochastiques que nous considérons dans ce papier sont des graphes d'événements dans lesquels le temps de franchissement de chaque transition est une variable aléatoire. Nous ferons l'hypothèse de l'indépendance des durées de franchissements successifs d'une même transition.

BACCELLI (voir [5]) a montré que si les variables aléatoires associées aux transitions sont ergodiques et stationnaires, et si le graphe d'événements est fortement connexe et borné, alors il existe une constante π tel que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{S_k(t)}{k} \overset{ps}{=} \pi \qquad \forall \text{ la transition } t \text{ du graphe.}$$

où $S_k(t)$ est l'instant du k -ième franchissement de la transition t en régime permanent.

π représente la **période moyenne** de franchissement d'une transition en régime permanent.

Dans un graphe d'événements à temporisations stochastiques, on peut définir le **temps de cycle moyen** comme étant le temps moyen séparant deux passages successifs d'un jeton en un point quelconque du graphe lorsque le régime permanent est établi.

La théorème suivant nous donne une borne inférieure $\underline{\pi}$ du temps de cycle moyen π.

Théorème 1 (voir [3]) : On a l'inégalité suivante :

$$\pi \geq \underset{t \in T}{\mathbf{Max}} \left(E(\beta t) \right) = \underline{\pi}$$

où T = ensemble des transitions.
C(γ) = variable aléatoire représentant le temps de cycle moyen du circuit élémentaire γ.
Γt = ensemble des circuits élémentaires qui contiennent la transition t.
$\beta t = \underset{\gamma \in \Gamma t}{\text{Max}}\, C(\gamma)$

On peut également définir une borne supérieure $\overline{\pi}$ du temps de cycle moyen. Le théorème suivant nous la donne.

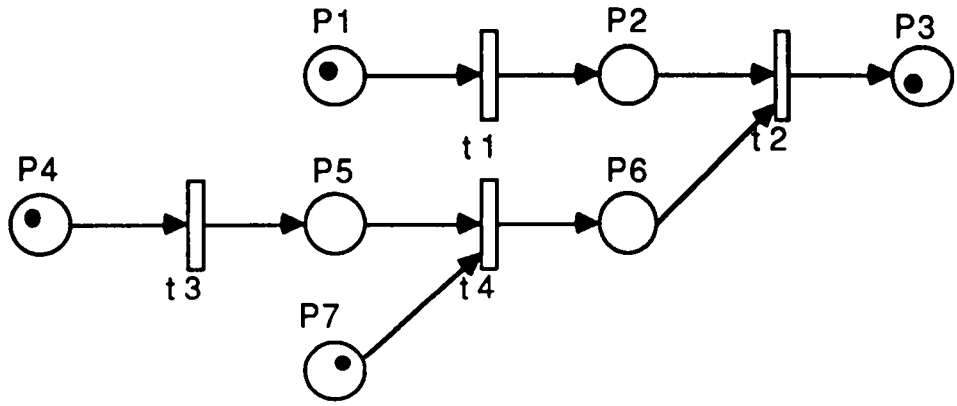
Théorème 2 (voir[3]) : Le temps de cycle moyen est borné supérieurement par :

$$\overline{\pi} = E\left(\underset{z \in Z}{\text{Max}}\ \mu(z) \right)$$

où Z = ensemble des chemins orientés vérifiant les deux propriétés suivantes :
- l'origine et l'extrémité du chemin sont des places marquées.
- il n'existe pas de place marquée entre l'origine et l'extrémité du chemin.

$\mu(z)$ = somme des variables aléatoires associées aux transitions de z.

Exemple:



Dans cet exemple les chemins appartenant à Z sont :
(p1,t1,p2,t2,p3), (p4,t3,p5,t4,p6,t2,p3) et (p7,t4,p6,t2,p3)

Dans le cas d'un circuit élémentaire simple constitué de deux places et de deux transitions qui ont comme temps de franchissement les variables aléatoires X1 et X2, on a des renseignements plus précis sur le temps de cycle moyen d'un graphe d'événements stochastique comme nous le montrent les théorèmes suivants :

Theorème 3 : Si $P(X1 \geq X2) = 1$ alors le temps de cycle moyen est égal à E(X1).

Théorème 4 : Si $P(X2 > X1) > 0$ et si $E(X1) > E(X2)$ alors le temps de cycle moyen est strictement supérieur à E(X1).

On peut remarquer que si l'on a deux jetons dans un circuit élémentaire simple le temps de cycle moyen est égal à E(Max (X1 , X2)).

4. CAS DES TEMPS DE FRANCHISSEMENT BORNES

Dans cette partie, nous étudions le cas où les temps de franchissement des transitions sont des variables aléatoires bornées et plus précisément le cas où toutes ces variables aléatoires Xi ($i \in T$) appartiennent à des intervalles de la forme [ai-εi , ai+εi] quelque soit $i \in T$.

4.1. Notations utilisées

Pour une meilleure compréhension des calculs nous avons utilisé des notations plus simples que nous donnons dans ce paragraphe.

- Ci = temps de cycle moyen du i -ième circuit élémentaire γi (les circuits ont été ordonnés).

- C = temps de cycle moyen du graphe d'événements composé des circuits élémentaires γi.

- $C^* = \underset{i \in T}{\text{Max}} (E(Xi))$
où T est l'ensemble de toutes les transitions du graphe d'événements.

- $Ij = \left[\frac{\sum_{i \in \gamma j} (ai - \varepsilon i)}{kj} , \frac{\sum_{i \in \gamma j} (ai + \varepsilon i)}{kj} \right]$ (1)

$= [binfj , bsupj]$ où kj est le nombre de jetons dans le j -ième circuit élémentaire.

- IC est un intervalle dans lequel se trouve C si sa borne supérieure est supérieure à C*

$$IC = [\underset{i \in \Gamma}{\text{Max}} binfi , \underset{i \in \Gamma}{\text{Max}} bsupi] = [binfc , bsupc]$$

où Γ est l'ensemble des circuits élémentaires du graphe d'événements.

On peut constater que l'on a toujours :

- Le temps de cycle moyen C du graphe d'événements est supérieur ou égal au maximum des temps de cycle moyen de tous les circuits élémentaires γi appartenant au graphe.

- $Ci \in Ii \quad \forall i$ si $bsupi > \underset{j \in \gamma i}{\text{Max}} E(Xj)$.

- $C \in IC$ si $bsupc > C^*$.

4.2. Résultats

On se place dans le cas où il n'y a que deux circuits élémentaires.

Si - **C2 > C1** (2.1)

- **C2 ∉ I1** (2.2)

- **bsup2 > C*** (2.3)

(ces conditions sont résumées dans la figure1)

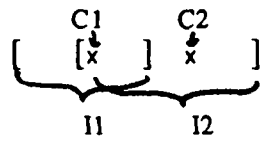


Fig.1 : Conditions 2.

alors :

1er cas :

si C2 > bsup2' (3) (i.e. si C2∉ I2') où I2' est l'intervalle qui remplace I2 après l'ajout d'un jeton dans le deuxième circuit γ2 et bsup2' est sa borne supérieure (voir figure2).

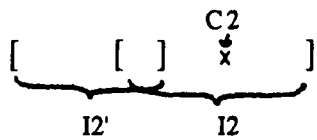


Fig.2 : Conditions 3.

alors le temps de cycle moyen C diminue plus quand on ajoute un jeton dans le deuxième circuit γ2 que lorsqu'on ajoute un jeton dans le premier circuit γ1.

Donc pour se rapprocher le plus rapidement possible de C*, il faut ajouter un jeton dans le circuit élémentaire qui a le temps de cycle moyen le plus grand.

La démonstration se trouve dans le paragraphe 6.

2ème cas :

Si C2 ≤ bsup2' alors

$$k2 \geq \frac{\sum_{i \in \gamma 2} ai}{2 \times \sum_{i \in \gamma 2} \varepsilon i} - \frac{1}{2}$$

où k2 est le nombre de jetons de γ2,

et il n'est pas possible de conclure dans ce cas. On peut simplement remarquer que $C^* < A$

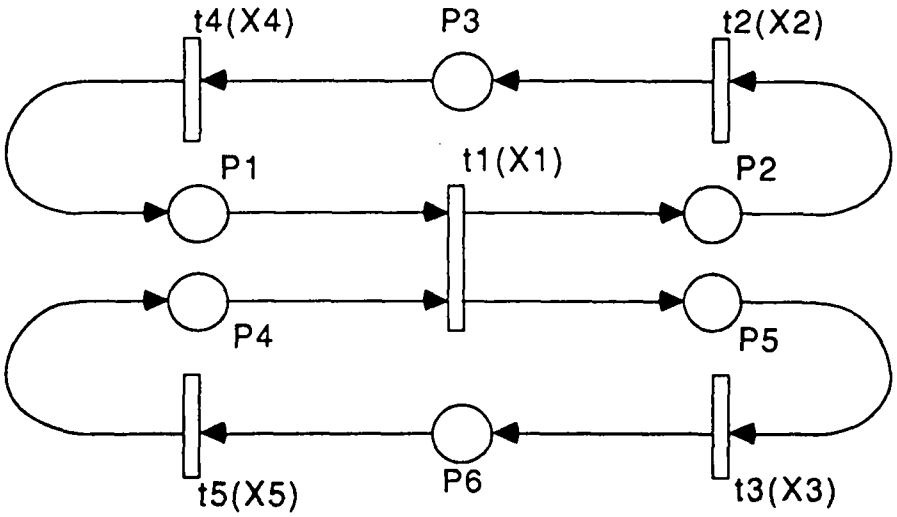
$$\text{où} \quad A = \frac{\sum_{i \in \gamma 2}(ai + \varepsilon i)}{\sum_{i \in \gamma 2}(ai - \varepsilon i)} \times 2 \times \sum_{i \in \gamma 2} \varepsilon i$$

car sinon la condition initiale (2.3) bsup2 > C* n'est plus vérifiée.

La démonstration se trouve dans le paragraphe 6.

4.3. Application numérique

On considère le graphe d'événements suivant :



Les circuits élémentaires $\gamma 1$ et $\gamma 2$ sont définis ainsi :

$\gamma 1$ = (P1,t1,P2,t2,P3,t4)
$\gamma 2$ = (P4,t1,P5,t3,P6,t5).

Les variables aléatoires Xi suivent les lois uniformes suivantes :

X1 : U (1.9 ; 2.1)
X2 : U (1.9 ; 2.1)
X4 : U (1.9 ; 2.1)
X3 : U (1.9 ; 2.2)
X5 : U (2.2 ; 2.4)

On a donc

$\sum_{i \in \gamma 1} ai = 3*2 = 6$ $\qquad$ $\sum_{i \in \gamma 2} ai = 2+2.05+2.3 = 6.35$

$\sum_{i \in \gamma 1} \varepsilon i = 3*0.1 = 0.3$ $\qquad$ $\sum_{i \in \gamma 2} \varepsilon i = 0.1+0.15+0.1 = 0.35$

Dans les tableaux (1) et (2) suivants on trouve en fonction du nombre de jetons, l'intervalle de la formule (1) qui contient le temps de cycle moyen si sa borne supérieure est supérieure à $Cj^* = \max_{i \in \gamma j} (E(Xi))$ pour chaque circuit γj.

On y trouve également les temps de cycle moyen C1 et C2 des circuits élémentaires $\gamma 1$ et $\gamma 2$ calculés par simulation et correspondant à un nombre donné de jetons dans chaque circuit.

nb de jetons ds $\gamma 1$	intervalle de $\gamma 1$	cycle moyen de $\gamma 1$
1	[5.7 ; 6.3]	5.999
2	[2.85 ; 3.15]	3.0026
3	[1.9 ; 2.1]	2.0399

Tableau 1 :Temps de cycle moyen de $\gamma 1$.

nb de jetons ds $\gamma 2$	intervalle de $\gamma 2$	cycle moyen de $\gamma 2$
1	[6 ; 6.7]	6.3489
2	[3 ; 3.35]	3.17
3	[2 ; 2.23]	2.3

Tableau 2 :Temps de cycle moyen de $\gamma 2$.

Dans le tableau 3 qui suit, on a fait apparaître en gras les lignes qui correspondent au bon choix à faire pour obtenir le plus petit temps de cycle moyen du graphe d'événements pour un nombre donné de jetons. Ce tableau contient le temps de cycle moyen du graphe d'événements pour un nombre fixé de jetons dans les circuits élémentaires $\gamma 1$ et $\gamma 2$.

nb de jetons ds $\gamma 1$	nb de jetons ds $\gamma 2$	cycle moyen du graphe
1	**1**	**6.3496**
2	1	6.3493
1	**2**	**5.999**
2	**2**	**3.17839**
3	2	3.17837
2	**3**	**3.0026**
3	**3**	**2.3001**

Tableau 3 : Temps de cycle moyen de graphe.

On constate que lorsqu'on ajoute un jeton dans le circuit élémentaire qui a le temps de cycle moyen le plus faible, le temps de cycle moyen du graphe d'événements ne diminue que très peu contrairement au cas où l'on ajoute un jeton dans le circuit élémentaire qui a le temps de cycle moyen le plus grand.

On peut aussi remarquer que lorsque $bsup2 < C^*$ et $bsup1 < C^*$ le temps de cycle minimum C^* est pratiquement atteint.

5. CONCLUSION

Ce papier nous donne une méthode pour approcher le temps de cycle moyen minimum d'un graphe d'événements avec un minimum de jetons quand les temps de franchissement des transitions sont des variables aléatoires bornées et quand les conditions (2) sont vérifiées. En effet, le résultat démontré pour deux circuits élémentaires se généralise à un graphe d'événements quelconque. Nous savons donc dans quels circuits élémentaires il faut placer les jetons pour se rapprocher le plus vite possible du temps de cycle moyen minimum. On peut ainsi trouver un bon compromis entre le nombre de jetons et le temps de cycle moyen, plus précisément, pour un nombre donné de jetons on peut atteindre le plus petit temps de cycle moyen possible si les conditions (2) sont vérifiées.

6. ANNEXE

Nous donnons dans ce paragraphe la démonstration des résultats annoncés dans la quatrième partie.

On a les hypothèses suivantes :

- $C2 > C1$ (2.1)
- $C2 \notin I1$ (2.2)
- $bsup2 > C^*$ (2.3)

1er cas : $C2 \notin I2'$ i.e $C2 > bsup2'$ (où I2' est l'intervalle qui remplace I2 après l'ajout d'un jeton dans le deuxième circuit $\gamma 2$ et bsup2' est sa borne supérieure).

- Si l'on ajoute un jeton dans le premier circuit $\gamma 1$, C diminue **au maximum** de

$$C - \text{Max}\ (\ C2\ ,\ C^*\ ).$$

- Si l'on ajoute un jeton dans le deuxième circuit $\gamma 2$, comme $C2 \notin I2'$, C diminue **au minimum** de

$$C - \text{Max}\ (\ bsup1\ ,\ bsup2'\ ,\ C^*\ )$$

Or $bsup1 < C2$ car $C2 \notin I1$
$bsup2' < C2$ car $C2 \notin I1$

D'où $C - \text{Max}\ (\ bsup1\ ,\ bsup2'\ ,\ C^*\ ) \geq C - \text{Max}\ (\ C2\ ,\ C^*\ )$

et donc le temps de cycle moyen C diminue plus quand on ajoute un jeton dans $\gamma 2$, c'est à dire dans le circuit qui a le temps de cycle moyen le plus grand quand celui-ci est calculé indépendamment des autres circuits.

2ème cas : $C2 \in I2'$ i.e. si $C2 \leq bsup2'$

$$C2 \in I2' \Rightarrow binf2 \leq bsup2' \quad \text{car } C2 \in I2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in \gamma 2}(ai - \varepsilon i)}{k2} \leq \frac{\sum_{i \in \gamma 2}(ai + \varepsilon i)}{k2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in \gamma 2} ai - (2 \times k2 + 1) \times \sum_{i \in \gamma 2} \varepsilon i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k2 \geq \frac{\sum_{i \in \gamma 2} ai}{2 \times \sum_{i \in \gamma 2} \varepsilon i} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b\sup 2 = \frac{\sum_{i \in \gamma 2}(ai + \varepsilon i)}{k2} \leq \frac{\sum_{i \in \gamma 2}(ai + \varepsilon i)}{\sum_{i \in \gamma 2}(ai - \varepsilon i)} \times 2 \times \sum_{i \in \gamma 2} \varepsilon i = A$$

Donc si $C^* \geq A$ alors $bsup2 \leq C^*$ et la condition initiale $bsup2 > C^*$ n'est plus vérifier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.P. HILLION : "Modelisation et analyse des systèmes de production discrets par les réseaux de Petri temporisés", Thèse d'Etat, 1989.

[2] S.LAFTIT, J.M. PROTH, X.L. XIE : "Optimization of invariant criteria for event graphs", proposed for publication in IEEE Transaction on Automatic Control, February 1991.

[3] S.LAFTIT, J.M. PROTH, X.L. XIE : "Performance evaluation and optimization of stochastic timed event graphs".

[4] H.P. HILLION and J.M. PROTH : "Analyse de fabrications non linéaires et répétitives à l'aide de graphes d'événements temporisés", RAIRO, Vol. 22, n°2, September 1988.

[5] F. BACCELLI : "Ergodic Theory of stochastic Petri Networks", INRIA Research Report n°1037, May 1989.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

ISSN 0249 - 6399