



**HAL**  
open science

## Maillage aigu

Paul-Louis George, J.M. Nizard

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, J.M. Nizard. Maillage aigu. [Rapport de recherche] RR-1414, INRIA. 1991. inria-00075146

**HAL Id: inria-00075146**

**<https://inria.hal.science/inria-00075146>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCOUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 1414

*Programme 6*  
*Calcul Scientifique, Modélisation et*  
*Logiciels numériques*

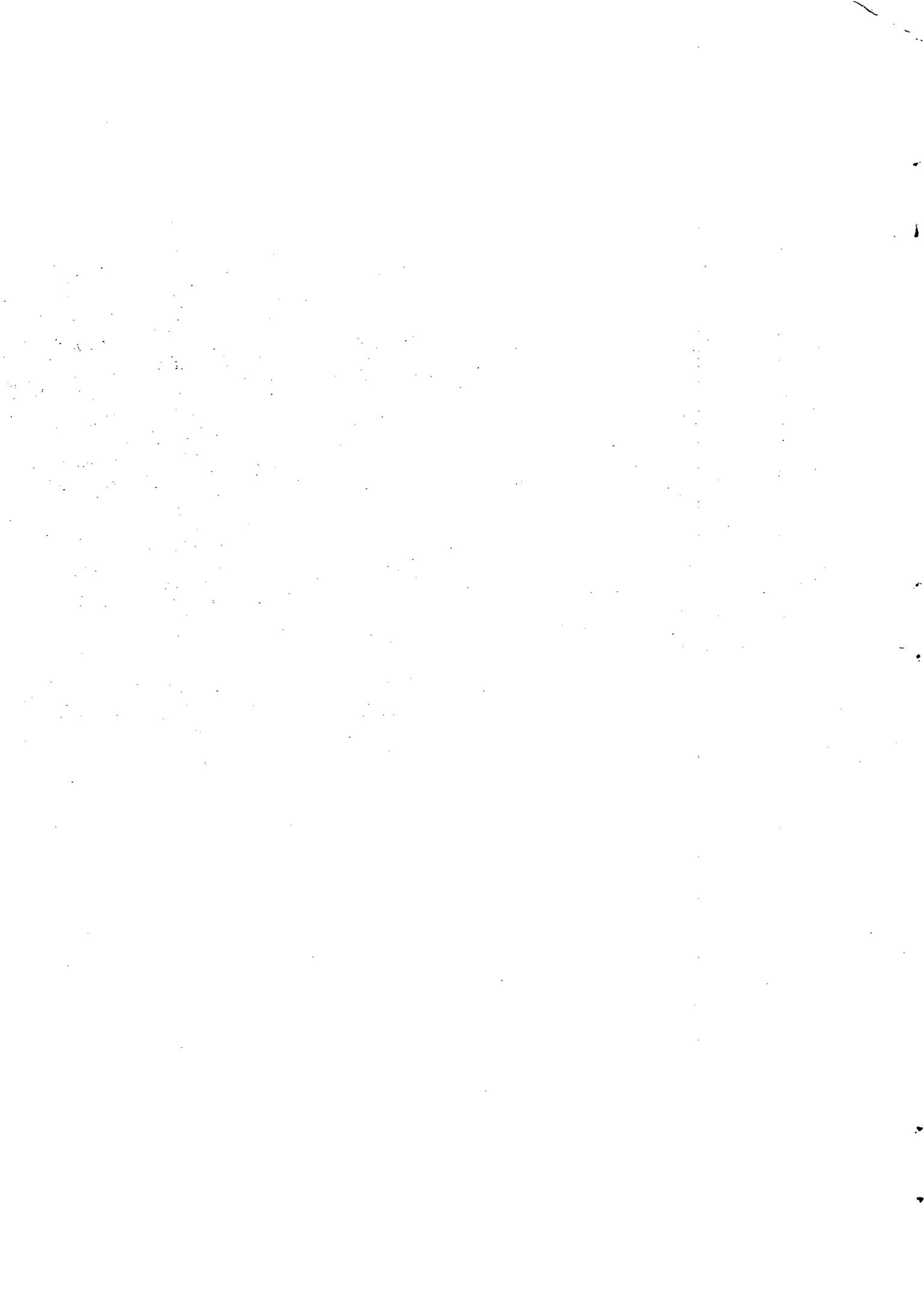
### MAILLAGE AIGU

**Paul-Louis GEORGE**  
**Jean-Michel NIZARD**

Avril 1991



★ R R - 1 4 1 4 ★



Rapport - Maillage aigu

## Maillage aigu

Paul Louis George, Jean Michel Nizard

29 Mars 1991

# Maillage aigu

Paul Louis George, Jean Michel Nizard

INRIA Domaine de Voluceau- Rocquencourt BP 105 -78153 LE CHESNAY FRANCE

## Résumé

*La simulation par la Méthode des Eléments Finis de problèmes physiques modélisés en termes d'équations aux dérivées partielles nécessite dans une première phase la construction d'un maillage du domaine de calcul.*

*Pour certaines classes de problèmes, la qualité de la solution obtenue est meilleure si le maillage, support du calcul, est aigu. Le but de ce papier est de mettre en place des méthodes permettant, dans le cas de la dimension 2 et pour un maillage composé de triangles, d'éliminer le maximum d'angles obtus de ce maillage et dans le cas où cela n'est pas possible, de diminuer la valeur des angles obtus.*

Mots-Clé : Maillages aigus - Modifications locales - Eléments Finis.

## Non obtuse triangulation

## Abstract

*An adequate mesh of the domain of interest for the numerical simulation of a physical problem described in terms of P.D.E. is a natural prerequisite when the Finite Element method is involved. For some class of problems, the accuracy of the solution is better if the mesh is non-obtuse.*

*The purpose of this paper is to discuss a method suitable in 2-dimensional geometries which makes the creation of a non-obtuse mesh from the data of any mesh consisting of triangles possible. The goal is to remove the obtuse angles or at least to minimize the value of these with the only help of local modifications.*

Key-words : Non obtuse triangulation - Local modifications - Finite Elements.

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction et définitions</b>	<b>1</b>
1.1	Rappels et définitions . . . . .	1
1.2	Quelques propriétés élémentaires sur le triangle . . . . .	1
1.3	Evaluation du maillage et analyse des situations . . . . .	2
1.4	Une propriété fondamentale des maillages aigus . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Transformations locales</b>	<b>4</b>
2.1	Régularisation locale . . . . .	4
2.2	Transformation topologique par inversion d'arêtes . . . . .	5
2.3	Suppression de points . . . . .	5
2.4	Ajout de points . . . . .	6
2.5	Conclusions . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Applications particulières des transformations locales</b>	<b>7</b>
3.1	Régularisation locale contrôlée . . . . .	7
3.2	Ajout contrôlé de points . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Méthode globale</b>	<b>10</b>
4.1	Idée générale . . . . .	10
4.2	Algorithme global . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Implémentation de l'algorithme</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Exemples d'application et conclusions</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>17</b>

# 1 Introduction et définitions

## 1.1 Rappels et définitions

Un maillage d'un domaine  $\Omega$  est par définition un ensemble  $\mathcal{T}_h$  recouvrant  $\Omega$ . Cet ensemble est composé de segments, de triangles et de quadrangles en dimension 2 (dans la présente étude, nous nous limitons à ce cas). Les éléments  $K$  d'un tel maillage doivent satisfaire un certain nombre de propriétés générales. La première concerne la *conformité*, au sens de la définition suivante [3]:

**Définition 1 :**  $\mathcal{T}_h$  est un maillage *conforme* de  $\Omega$  si les conditions suivantes sont vérifiées:

1.  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$
2. tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  est d'intérieur non vide
3. l'intersection de 2 éléments de  $\mathcal{T}_h$  doit être soit:
  - réduite à l'ensemble vide,
  - réduite à un point,
  - réduite à une arête.

□

Cette définition revient à indiquer que  $\mathcal{T}_h$  recouvre  $\Omega$  de manière *conforme*, elle correspond à une approche essentiellement géométrique. Pour certaines classes de problèmes, en électromagnétisme ou dans les simulations des semi-conducteurs par exemple, la présence d'angles obtus est à éviter. Par suite, en nous plaçant dans le cas de mailles triangulaires, nous introduisons la définition suivante:

**Définition 2 :** Un maillage composé de triangles est dit *aigu* si ses éléments n'ont pas d'angle obtus. □

D'autre part, pour alléger l'écriture, on introduit la notation suivante:

**Définition 3 :** Un *obtusangle* est un triangle dont l'un des angles est obtu. □

## 1.2 Quelques propriétés élémentaires sur le triangle

Rappelons brièvement quelques propriétés géométriques élémentaires du triangle:

**Propriété 1:** La somme des trois angles d'un triangle est égal à  $\pi$ .

**Propriété 2:** Le centre du cercle circonscrit à un triangle est à l'extérieur du triangle s'il s'agit d'un obtusangle et à l'intérieur sinon.

**Propriété 3:** Tout point extérieur au cercle passant par les deux extrémités d'un segment définit avec celles-ci un triangle dont les trois angles sont aigus. Par contre, si le point est à l'intérieur du cercle, le triangle est un obtusangle.

### 1.3 Evaluation du maillage et analyse des situations

Etant donné un maillage composé de triangles, obtenu par l'une ou l'autre des méthodes de génération de maillages existantes [3], il s'agit dans un premier temps de détecter les éléments ayant des angles obtus, puis d'analyser les situations correspondantes afin de pouvoir proposer une méthode permettant de supprimer ces angles "gênants"<sup>1</sup>. Tous les maillages à traiter seront pris de type P1 (i.e les points sont confondus avec les nœuds). La détermination des angles, élément par élément, est effectuée grâce à la formule suivante:

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)$$

où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont les vecteurs définis par les deux côtés associés à l'angle considéré.

Par ailleurs, on distinguera deux classes de valeurs d'angles:

- classe 1 :  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$
- classe 2 :  $\frac{2\pi}{3} < \alpha$

qui serviront à l'évaluation du maillage traité.

On définit les deux ensembles locaux suivants:

- **Définition 4.1** : Le *polygone associé à un point*  $P$ , sommet interne du maillage, est le polygone dont la frontière est constituée de l'ensemble des arêtes des triangles, ayant  $P$  comme sommet, opposées à ce point.  $\square$

Un tel polygone peut comprendre a priori un nombre quelconque de triangles.

- **Définition 4.2** : Le *polygone associé à une arête*  $A$ , arête interne du maillage, est le polygone formé par les deux triangles adjacents par cette arête.  $\square$

La méthode proposée va consister à modifier localement ces deux sortes de polygones de façon à supprimer les angles obtus.

### 1.4 Une propriété fondamentale des maillages aigus

Soit  $P$  un point du maillage et  $\mathcal{P}$  le polygone associé à ce point (au sens de la définition 4.1). La cellule définie autour de  $P$  comme le domaine limité par les médiatrices des arêtes issues de  $P$  est strictement incluse dans  $\mathcal{P}$  si le maillage est aigu (figure 1). Dans le cas d'un maillage quelconque, cette construction donne une cellule non incluse dans  $\mathcal{P}$  (figure 2, partie gauche). Pour garder la même propriété, on peut utiliser non plus les médiatrices mais les médianes (même figure, partie droite). Dans ce cas, la propriété d'orthogonalité entre les arêtes du maillage initial et celles formées par les cellules n'est plus vérifiée et par suite ne peut être exploitée.

<sup>1</sup>Notons, par ailleurs, que les méthodes d'Eléments Finis n'apprécient pas outre mesure les angles trop petits.

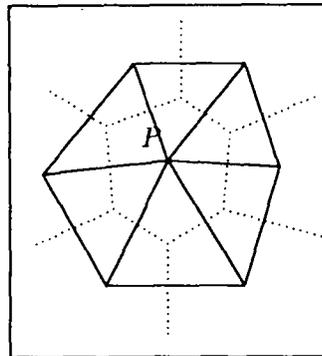


Figure 1: *Cellule autour de  $P$  (maillage aigu).*

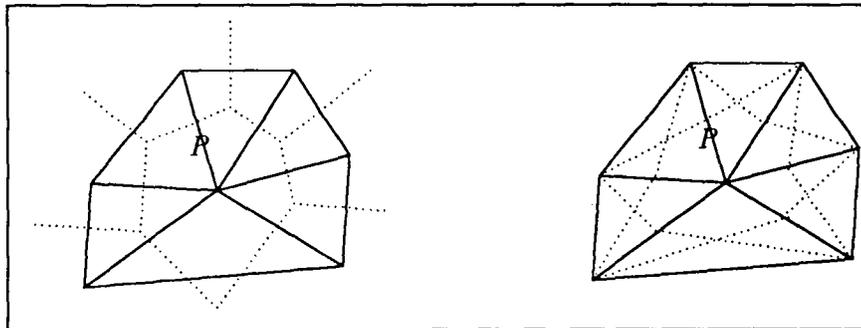


Figure 2: *Cellules construites via les médiatrices et les médianes.*

## 2 Transformations locales

De manière classique, les méthodes permettant de modifier un maillage sont basées sur quelques outils très simples. Parmi ceux-ci on trouve les algorithmes de régularisation, les transformations topologiques, les suppressions ou les ajouts de points. Nous allons d'abord rappeler ces techniques.

### 2.1 Régularisation locale

Une telle opération consiste à modifier le polygone associé à chaque point interne du maillage.

- *Barycentrage simple*: Chaque point est repositionné au barycentre pondéré des sommets du polygone (définition 4.1) qui lui est associé:

$$P = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_j P_{k_j}$$

où  $n$  est le nombre de tels sommets,  $P_{k_j}$  ceux-ci,  $k_j$  leur numéro et  $\omega_j$  un poids associé (avec  $\sum \omega_j = 1$ ).

Une variante consiste à "relaxer" cette expression qui s'exprime alors comme:

$$P^{m+1} = (1 - \omega)P^m + \frac{\omega}{n} \sum_{j=1}^n \omega_j P_{k_j}^m$$

avec les mêmes notations et  $\omega$  un paramètre de relaxation. Pour un polygone associé non convexe, cette méthode peut créer des points à l'extérieur, par suite, un contrôle est nécessaire. Pour les  $\omega_j$ , coefficients de pondération, plusieurs choix sont possibles. Ainsi,  $\omega_j$  peut être calculé en considérant:

- la somme des surfaces normalisées des 2 triangles associés à chaque sommet du polygone,
  - la longueur des arêtes des triangles incriminés,
  - etc.
- *Méthode itérative*: soit  $P$  un sommet du maillage et  $Q$  une mesure associée (par exemple le maximum des angles des triangles du polygone associé à  $P$ ), on définit un processus itératif de déplacement de  $P$  dans une direction quelconque, dont l'amplitude est initialisée à une valeur donnée. Par itérations successives, on va simuler le déplacement de  $P$  et calculer la valeur  $Q$  correspondante; l'évolution de celle-ci dirige le processus. Dans le cas où le polygone associé (cf. définition 4.1) est non convexe, on doit, de même, vérifier la validité du résultat à chaque itération.

Ces méthodes (ou toutes méthodes du même type) permettent d'obtenir un maillage plus équilibré et par suite les angles des éléments tendent à devenir aigus. Néanmoins, il est clair que le résultat visé n'est pas toujours atteint (il est très facile de produire des contre-exemples allant en ce sens). Aussi, nous allons, dans la suite, définir une variante permettant, sous certaines hypothèses, d'obtenir localement le résultat.

## 2.2 Transformation topologique par inversion d'arêtes

Cette opération consiste à modifier le polygone associé (définition 4.2) à une arête interne du maillage.

- Le polygone associé à une arête est un quadrangle. Si ce dernier est convexe, on peut modifier son maillage en supprimant l'arête commune aux deux éléments et en créant l'arête joignant les deux sommets n'appartenant pas à l'arête commune initiale (cf. [8]). Les deux triangles adjacents par cette nouvelle arête forme un maillage correct différent du maillage initial (voir la figure 3).

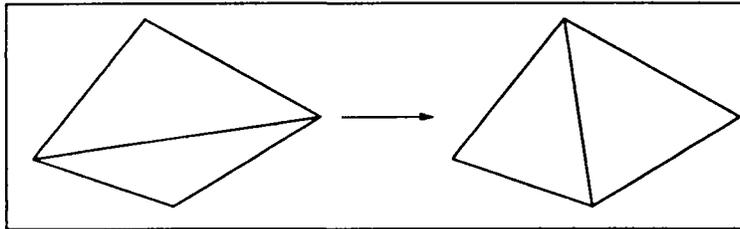


Figure 3: *Inversion d'arête dans un polygone convexe.*

Il est clair que cette opération ne permet de répondre localement au problème que si les nouveaux angles formés satisfont la condition désirée.

Dans ce cas, ce processus donne localement la solution du problème posé. Dans le cas inverse, la transformation pourra être utilisée pour modifier un contexte initial et créer de la sorte une configuration différente que l'on traitera avec une autre méthode.

On sait, par ailleurs, que tout maillage (sans contrainte) peut être rendu de Delaunay en utilisant de manière appropriée ce processus d'inversion de diagonale (cf. [2]). Un tel maillage est tel que pour chaque paire de triangles et les a priori deux maillages possibles, celui qui est retenu est celui pour lequel le plus petit des 6 angles présents est maximum [6]. La figure 3 montre à droite le maillage de Delaunay relatifs aux quatre points donnés, le maillage de gauche, quoique correct, n'est pas de Delaunay. Il faut noter que cette propriété, sans être celle que nous cherchons, est néanmoins intéressante.

## 2.3 Suppression de points

Remarquons d'abord que cette opération ne concerne pas les points situés sur le bord du domaine.

Il est facile de noter que les techniques de régularisation ne peuvent pas donner la solution si le polygone n'est constitué que par 3 ou 4 triangles. En effet, dans le premier cas, l'angle moyen autour du sommet est  $\frac{2\pi}{3}$ , donc au moins 2 angles obtus subsistent. Dans le second cas, la valeur moyenne de l'angle autour du sommet est  $\frac{\pi}{2}$ . La meilleure des configurations pour cette situation est le losange ou le carré (chaque angle vaut alors exactement  $\frac{\pi}{2}$ ), sinon il reste au moins un angle obtu.

Si le polygone associé à un point n'est formé que de trois triangles, il peut être remaillé en un seul triangle, en supprimant le point et les trois arêtes le joignant aux sommets du polygone associé (voir la figure 4). Comme une telle situation comportait au moins deux angles obtus et

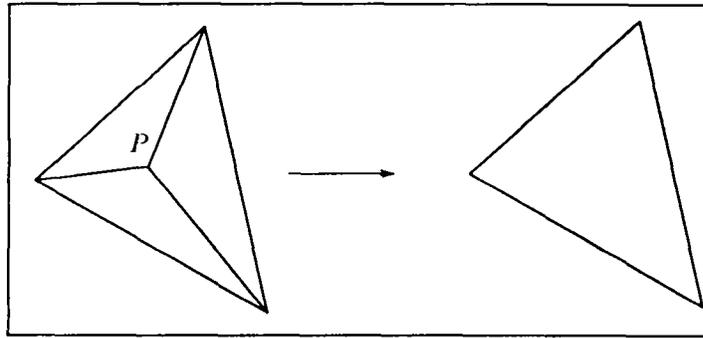


Figure 4: Remaillage d'un polygone à 3 triangles par suppression d'un point.

qu'un triangle en a au plus un, au moins un angle obtu (les deux ou les trois en général) a été éliminé. Par suite, cette méthode peut être appliquée sans prendre de précaution particulière. Cette opération élémentaire peut également être appliquée dans le cas où le polygone associé à un point contient plus de trois triangles. Comme le cas où le nombre de triangles est 4 est un cas "bloquant", on va d'abord faire une inversion de diagonales dans les triangles initiaux pris deux à deux de manière à obtenir un sous polygone ne contenant plus que trois éléments. Ensuite la même technique peut être appliquée (voir la figure 5).

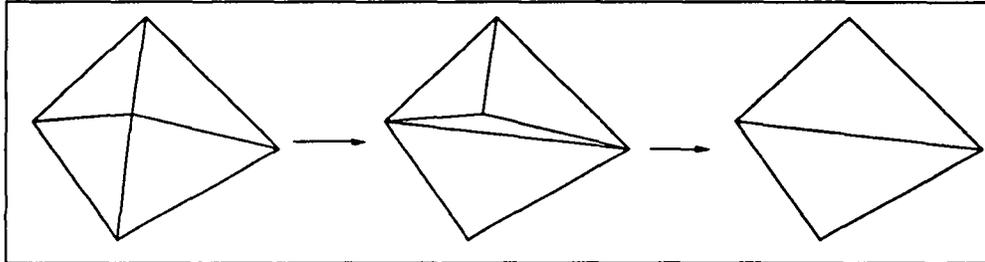


Figure 5: Inversion d'arêtes pour arriver à la configuration précédente et remaillage.

L'algorithme de remaillage sur le sous-polygone constitué de trois triangles donne le résultat. Cette méthode permet donc de traiter le cas des configurations à 4 triangles. Cependant, contrairement aux polygones à 3 triangles, son application doit s'effectuer en contrôlant les angles formés, en particulier pour choisir l'arête à inverser parmi les différentes possibles.

Dans le cas où le polygone est formé de plus de 4 triangles, une technique identique est envisageable a priori. Son contrôle paraît délicat, aussi nous ne la considérerons pas.

## 2.4 Ajout de points

Ajouter un point dans un maillage et reconstruire les éléments au voisinage de celui-ci de manière à obtenir un nouveau maillage correct et satisfaisant la contrainte désirée pose a priori les deux problèmes suivants:

- Où mettre le point (dans un élément, sur une arête) ?

- Comment l'insérer dans la triangulation, i.e. comment trouver l'ensemble des éléments à modifier ou détruire et comment connecter le nouveau point aux points existants ?

Ce type d'approche pour résoudre le problème sera développé en section 3.2 dans un cas particulier.

## 2.5 Conclusions

Les méthodes exposées précédemment (- régularisation locale - inversion d'arêtes - suppression de points) permettent soit de résoudre le problème dans certains cas de figures particuliers soit d'améliorer localement le maillage. Leur application n'est toutefois pas générale car on ne peut pas prévoir à l'avance si le résultat que l'on va obtenir est celui que l'on cherche. Pour ces raisons, nous allons maintenant construire des versions particulières de certaines de ces méthodes donnant localement le résultat.

## 3 Applications particulières des transformations locales

### 3.1 Régularisation locale contrôlée

Dans ce paragraphe, on va décrire une méthode de régularisation permettant dans le cas des polygones convexes comprenant strictement plus de 4 triangles (cas rencontré fréquemment dans les maillages) de savoir a priori s'il existe une zone permettant de repositionner le point définissant le polygone telle que tous les angles obtus disparaissent. Partant de la propriété 3 de la section 1.2, on propose la méthode suivante:

- on construit les demi-disques de diamètre défini par les arêtes qui constituent la frontière du polygone (figure 6)

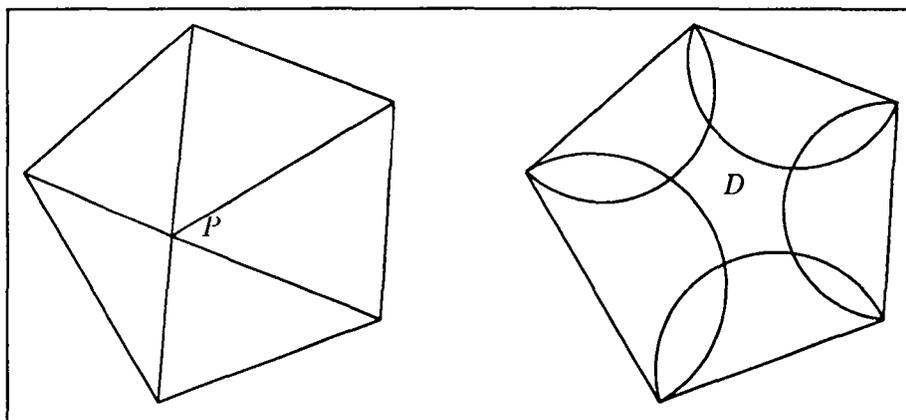


Figure 6: *Le polygone traité, les demi-disques construits et la zone D.*

- on détermine s'il existe une zone non vide dans le polygone qui n'est recouverte par aucun des demi-disques ainsi construits. Si une telle zone existe, d'après la propriété 3, tout point à l'intérieur de cette zone définit des triangles qui ne comportent que des angles aigus autour du point. Pour obtenir le résultat cherché, il suffit de vérifier qu'aucun des

angles opposés à ce point n'est obtus, ceci revient à, le cas échéant, réduire la zone  $D$  en construisant les perpendiculaires aux arêtes du bord du polygone et en ne retenant que la partie de  $D$  ainsi déterminée (voir la figure 7 où, pour l'exemple considéré,  $D$  et  $D$  réduit sont identiques).

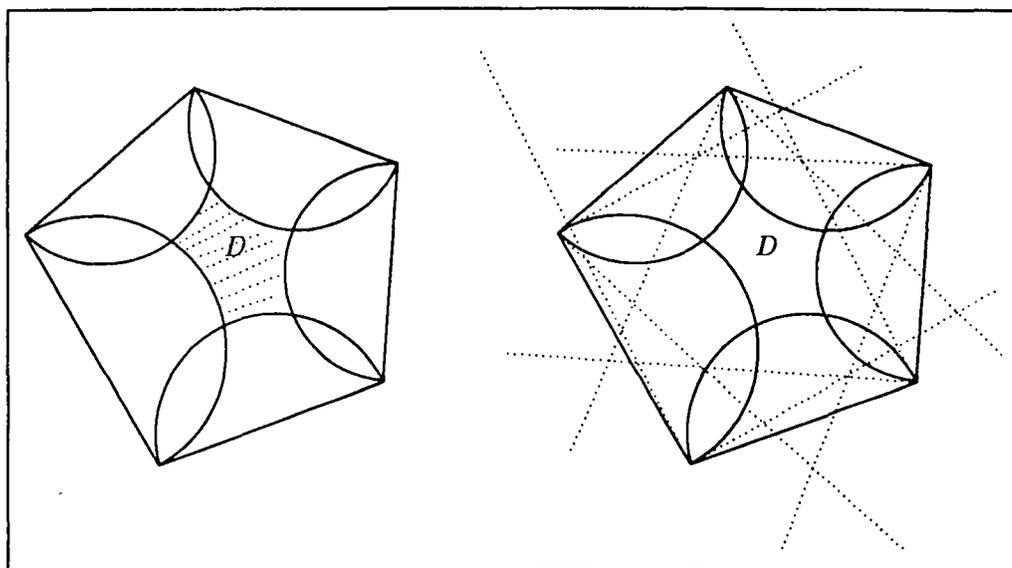


Figure 7:  $D$  (partie droite) et  $D$  réduit (partie gauche) la solution.

En pratique et pour des raisons de rapidité, plutôt que de construire  $D$ , on va prendre comme nouvelle position du point l'isobarycentre des extréma des demi-cercles en vérifiant qu'il est bien placé par rapport aux perpendiculaires mentionnées ci-dessus (l'extrémum d'un demi-cercle est l'intersection du demi-cercle et de la médiatrice de l'arête servant à sa définition).

Dans certains cas, il est possible de trouver deux domaines distincts (voir la figure 8), il suffit alors de prendre un point à l'intérieur de l'un de ces domaines avec la même contrainte que ci-dessus.

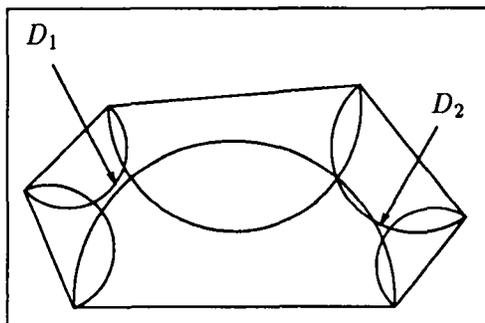


Figure 8: Cas où il existe deux domaines distincts  $D_1$  et  $D_2$  (avant réduction).

L'avantage de cette méthode par rapport à celle définie au paragraphe 2.1 est que l'on sait avant de bouger un point si cette opération est intéressante. En effet, si le ou les domaines définis précédemment sont vides, aucune méthode basée sur un déplacement de points n'a de chance d'aboutir.

Dans ce dernier cas, il paraît intéressant de bouger des points qui composent l'enveloppe du polygone. Pour cela, plusieurs méthodes de déplacements des points qui composent le polygone peuvent être envisagées, par exemple la méthode itérative vue en 2.1. Plus précisément, il est possible de déterminer des directions de déplacements particulières tendant à faire apparaître une zone  $D$  non vide. Parmi celles-ci, nous avons les deux méthodes suivantes:

- On cherche le cercle circonscrit à un triangle dont l'un des angles au sommet interne du polygone est obtus et, utilisant la propriété 2, on déplace sur ce cercle un des points du triangle, noté  $ABC$ , opposé au sommet de manière à tenter de ramener le centre  $O$  du cercle  $C$  à l'intérieur du triangle  $ABC$ . Cette opération doit se faire en contrôlant que les points proches du bord ne sortent pas du maillage, et surtout en vérifiant qu'il y a une amélioration des angles autour du sommet sans qu'il y ait dégradation des angles voisins modifiés (voir la figure 9).

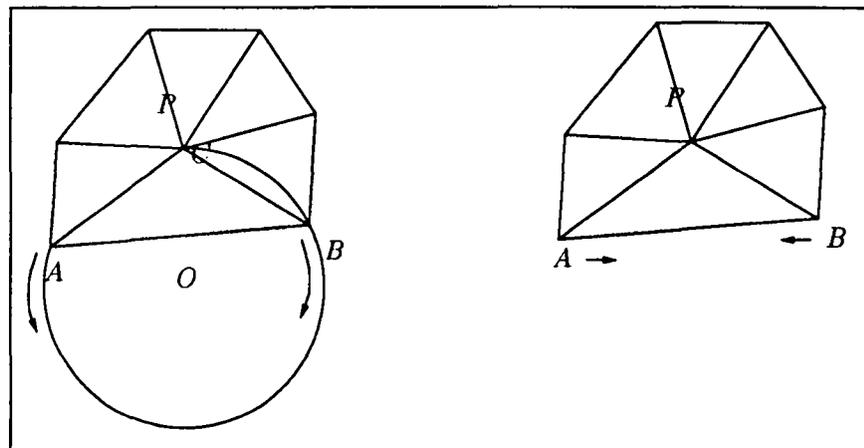


Figure 9: Déplacement des points opposés (méthodes 1 et 2).

- on déplace un des deux points de l'arête qui compose l'enveloppe du polygone dans la direction formée par cette arête. On vérifie l'évolution de tous les angles concernés et lorsque l'évolution du maillage en terme d'angles va dans le sens contraire à ce qui est désiré, on stoppe le déplacement du point (voir la figure 9 également).

### 3.2 Ajout contrôlé de points

Un cas fréquent d'impossibilité est celui formé par trois triangles adjacents deux à deux par une arête. Pour ce motif particulier, on définit un processus d'insertion de point de la manière suivante:

- on considère comme premier triangle un élément possédant un angle obtus,
- on prend comme deuxième triangle l'élément adjacent au précédent par l'arête opposée à son angle obtus,

- le choix du troisième triangle est indifférent: l'un quelconque des éléments adjacents au précédent est possible (on peut regarder en premier celui qui possède le plus grand angle opposé à l'arête commune).

Le polygone formé par ces trois triangles est un polygone à 5 côtés. Dans le cas d'un maillage initial pas trop mauvais, ce polygone est le plus souvent convexe. Dans un tel cas, on crée un point interne  $P$ , par exemple en prenant le barycentre des milieux des deux arêtes communes ou en utilisant la méthode vue en 3.1. En vérifiant que les triangles formés par ce point et toutes les arêtes externes du polygone de départ sont corrects, on remaille le polygone à l'aide de 5 triangles. Si  $P$  est tel qu'il n'existe pas d'angles obtus dans le polygone, la solution est obtenue; dans le cas contraire, la méthode ci-dessus peut être essayée.

L'idée sous-jacente est de réduire les cas bloquants, il est clair que si l'on n'ajoute pas de points à l'intérieur du domaine, la solution n'est pas, en général, possible. Cette opération de création de points, très facile à mettre en œuvre, est le moyen que nous proposons pour avancer.

## 4 Méthode globale

### 4.1 Idée générale

Avec l'ensemble des outils qui ont été définis aux sections 2 et 3, on va mettre en place une méthode globale (quoique heuristique) de traitement d'un maillage pour aboutir à l'objectif fixé.

L'approche retenue pour l'algorithme général est basée sur le *traitement des polygones associés aux arêtes internes* (inversion d'arêtes) en explorant successivement les arêtes et le *traitement des polygones associés aux sommets*, polygones formés par l'ensemble des triangles ayant un sommet commun en explorant successivement les sommets.

En cas d'échec de ces deux techniques, on cherchera à *ajouter des points* à l'intérieur du domaine pour débloquer la situation.

L'algorithme proposé est donné dans ses grandes lignes ci-dessous; il combine les différents outils et pour être efficace implique la connaissance d'un certain nombre d'informations sur le maillage. Par exemple:

- trouver les points qui appartiennent à la frontière du domaine,
- déterminer le nombre d'éléments ayant un sommet en commun,
- trouver les numéros de ces éléments,
- construire le tableau des éléments voisins à un élément donné,
- etc.

Notons qu'une des difficultés pour concevoir cet algorithme est de choisir une stratégie pour combiner les outils disponibles en évitant toute récursivité.

### 4.2 Algorithme global

- **Partie un:** Traitement par arête.
  - Soit  $A$  l'arête interne courante,

- Simuler le processus d'inversion d'arêtes:
  - \* En cas de succès, mettre à jour le maillage,
  - \* En cas d'échec, passer à l'arête suivante.
- **Partie deux:** Traitement par sommet (1).
  - Soit  $P$  le sommet courant,
  - Calculer  $NEP$  le nombre d'éléments possédant  $P$  comme sommet,
    - \* si  $NEP = 3$ : Détruire  $P$ ,
      - Mettre à jour le maillage,
      - Passer au sommet  $P$  suivant.
    - \* Si  $NEP = 4$  et que les 4 angles internes ne sont pas droits: inverser l'arête interne la plus judicieuse et appliquer au sous-polygone induit le processus valable pour  $NEP = 3$ .
      - En cas d'échec, passer au sommet suivant.
    - \* si  $NEP > 4$ : Construire la zone  $D$  (ou les différentes zones possibles).
      - En cas de succès, i.e. il existe une zone admissible pour repositionner  $P$ , déplacer  $P$ , mettre à jour le maillage et passer au sommet  $P$  suivant.
      - En cas d'échec, i.e. on ne trouve pas de zone  $D$ , déplacer un ou plusieurs points de la frontière du polygone et appliquer de nouveau la présente méthode.
    - \* En cas de succès, mettre à jour le maillage et passer au sommet  $P$  suivant,
    - \* En cas d'échec, construire le polygone à 5 côtés et créer un point interne,
      - En cas de succès, mettre à jour le maillage et passer au sommet  $P$  suivant,
      - En cas d'échec, passer au sommet  $P$  suivant.
- **Partie trois:** Traitement par sommet (2).
  - Soit  $P$  le sommet courant,
  - Prendre les  $NEP$  éléments possédant  $P$  comme sommet,
    - \* Selection de l'arête du polygone associé vue par le plus grand angle de ce polygone,
      - Bouger une extrémité de cette arête (pour en diminuer la longueur),
    - \* En cas de succès, mettre à jour le maillage et passer au sommet  $P$  suivant,
    - \* En cas d'échec, passer au sommet  $P$  suivant.

Remarques:

- Une opération est dite couronnée de succès si, d'une part elle est possible et, d'autre part elle diminue soit le nombre d'angles obtus soit leurs valeurs,
- Ne sont considérés dans les "boucles" de l'algorithme que les arêtes internes ou les sommets internes qui posent problème,
- S'ils restent quelques angles obtus après cet algorithme, on peut le relancer plusieurs fois en effectuant des régularisations locales sur l'ensemble du maillage à chaque nouvelle phase tant qu'il y a évolution.

- La solution finale est atteinte quand plus rien n'évolue (cf. exemples numériques ci-dessous).

## 5 Implémentation de l'algorithme

La programmation de l'algorithme décrit dans ce papier a été effectuée en suivant les normes de la bibliothèque *MODULEF*, le programme correspondant (module de nom AIGUNO) s'insère donc comme une nouvelle fonctionnalité de celle-ci [4].

La première étape a trait au corps du programme qui comprend sept sous-routines:

- AIGUXX: programme principal (en fait un préprocesseur),
- AIGUNW: programme qui assure la partie interface utilisateur (sous forme de questions),
- AIGUNO: module de base,
- AIGU11, AIGU12, AIGU13 et AIGU14: sous-routines assurant la partie algorithmique (inversion d'arêtes - traitement des polygones à 3 et 4 triangles et déplacement de points - ajout de points - bouger sur une arête).

La deuxième phase de l'implémentation consiste en l'élaboration des outils de base nécessaires pour manipuler les maillages. Ces outils, au nombre de 5, permettent de:

- passer de la structure NOPO à une structure [liste des sommets, liste des voisins],
- effectuer la transformation inverse,
- calculer les 3 angles d'un triangle,
- construire le tableau donnant, pour chaque point, un élément le possédant,
- trouver si un point est frontalier ou non (i.e. fixe ou mobile).

La troisième étape consiste à programmer la méthode globale explicitée ci-dessus. La principale difficulté de cette partie consiste à gérer correctement l'ensemble des tableaux qui sont modifiés au cours de l'algorithme:

- le tableau des angles,
- celui des numéros des sommets,
- celui des éléments voisins d'un élément,
- celui des éléments ayant un sommet commun,
- le tableau indiquant à quel élément appartient un sommet,
- et le tableau des éléments.

Les sous-routines de bas niveaux qui assurent la partie algorithmique sont les suivantes:

- AIGDET : pour l'élimination d'un sommet dans le cas d'une configuration à 3 éléments,

- AIGINT : pour marquer les sommets internes
- AIGSWA : pour l'inversion d'arêtes dans le cas des polygones à 2 triangles,
- AIGMOV : pour la régularisation contrôlée du sommet d'un polygone,
- AIGU13 : pour la création d'un point interne dans un polygone à 5 côtés,
- AIGU14 : pour bouger l'extrémité d'une arête sur celle-ci.

Pour utiliser le module AIGUNO, on pourra soit l'appeler directement, soit employer le pré-processeur AIGUXX, soit encore choisir le mot-clé AIGU du module général APNOPO (cf. [4]).

## 6 Exemples d'application et conclusions

La méthode proposée a été testée sur des maillages de complexité croissante. Le premier test comprend des situations particulières construites a priori (polygones à 3 ou 4 triangles, etc.) afin de valider telle ou telle phase de la méthode. Les autres tests concernent des maillages concrets.

Maillage	1	2	3	4	5	6
Nombre initial de nœuds	15	285	504	1180	1901	3526
Nombre initial de triangles	16	456	881	2278	3474	6748
Nombre initial d'angles (1)	5	61	74	156	124	421
Nombre initial d'angles (2)	1	-	-	1	1	-
Nombre final d'angles (1)	0	3	3	1	20	23
Nombre final d'angles (2)	0	-	-	0	0	-
Nombre final de nœuds	17	295	523	1179	1976	3575
Nombre final de triangles	20	476	919	2276	3624	6848
Stabilisation	1	2	4	3	6	10

Tableau 5.1 : *Efficacité de la méthode sur quelques exemples.*

Les figures, montrées à titre d'exemple, indiquent d'une part le maillage initial et d'autre part le maillage obtenu après passage du présent module. Les triangles possédant un angle obtu sont colorés en pâle.

A titre de conclusion, on peut noter que:

- les résultats dépendent naturellement du maillage initial,
- si on prend un maillage généré par MODULEF avec aucun angle obtu (ou très peu) et que l'on modifie ce maillage par des déplacements de points ou des inversions d'arêtes, la méthode arrive à reconstruire dans presque tous les cas un maillage proche du maillage initial,
- le traitement local du maillage qui est pratiqué, impose de lancer l'algorithme une ou plusieurs fois selon les cas (le tableau ci-dessus indique le nombre d'itérations effectuées avant stabilisation),

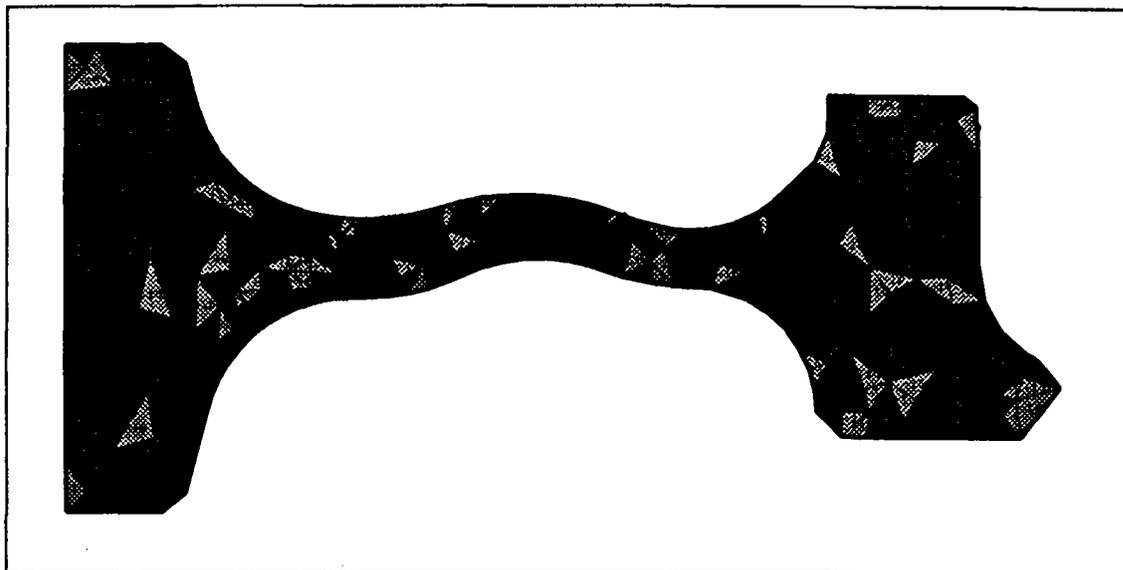


Figure 10: *Coupe d'une roue (maillage initial).*

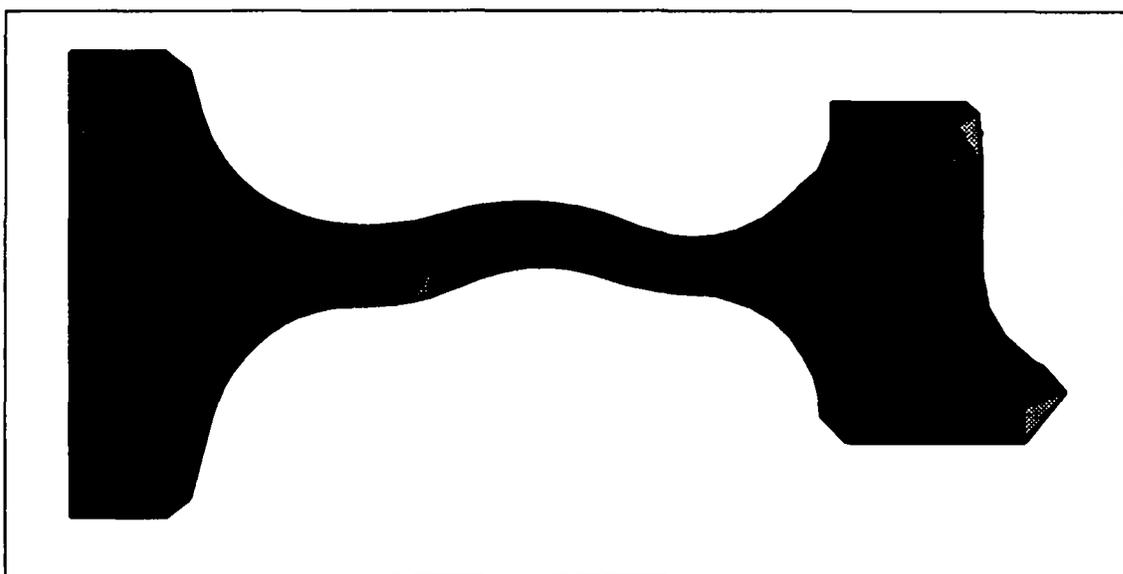


Figure 11: *Coupe d'une roue (maillage final).*

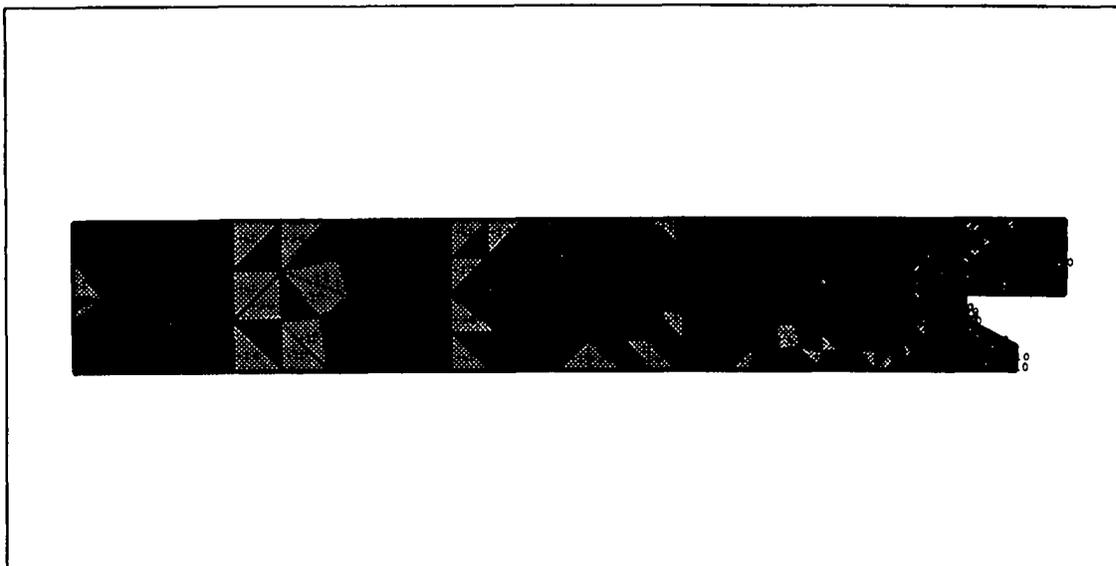


Figure 12: *Culot (maillage initial)*.

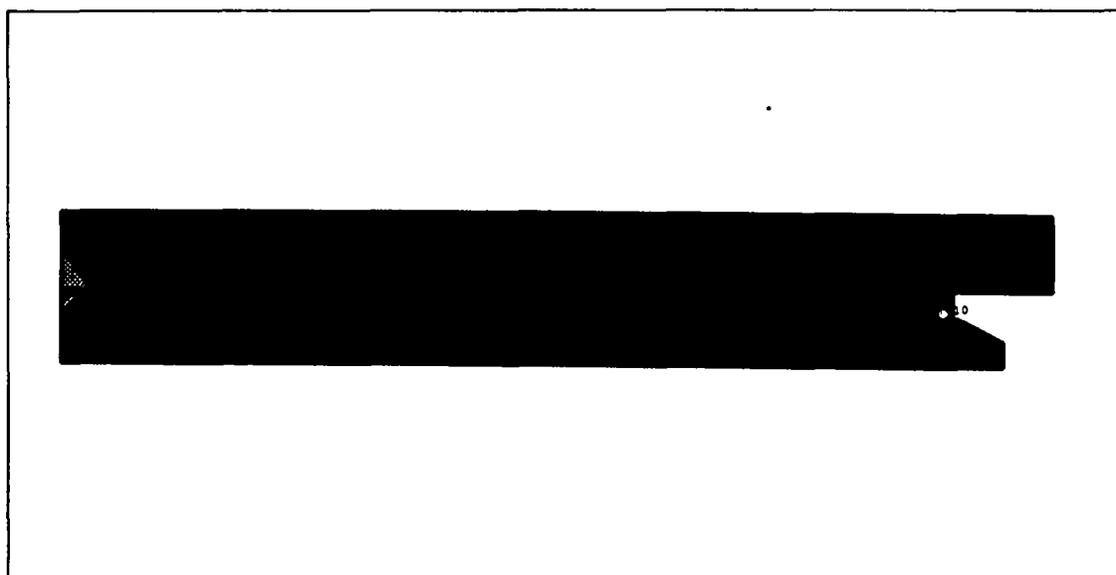


Figure 13: *Culot (maillage final)*.

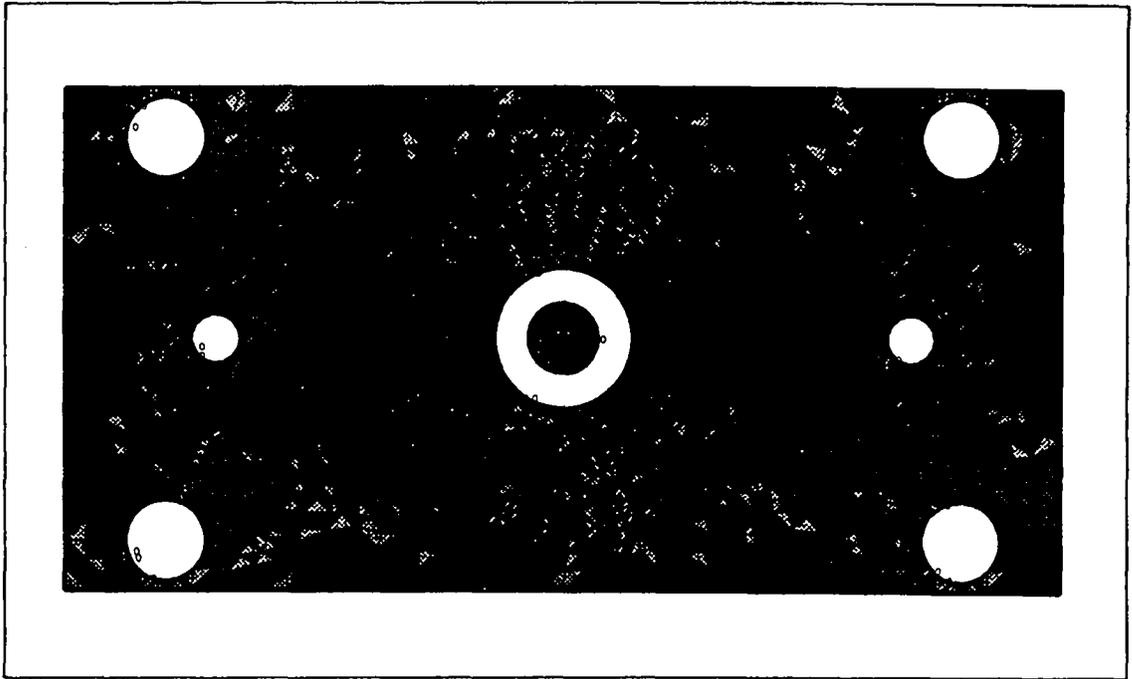


Figure 14: *Circuit (maillage initial)*.

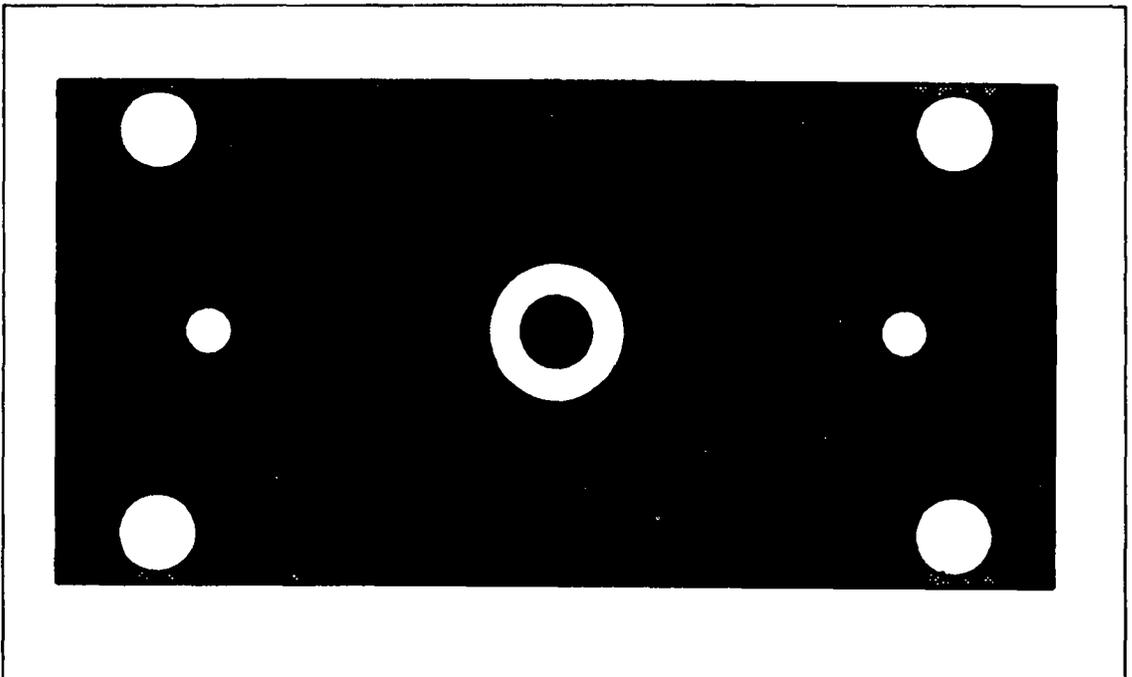


Figure 15: *Circuit (maillage final)*.

- les angles obtus qui ont au départ une valeur supérieure à  $\frac{2\pi}{3}$  arrivent à être éliminés dans pratiquement tous les cas,
- les angles obtus les plus délicats à traiter sont ceux dont la valeur est comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ , les grands angles disparaissent généralement par inversion d'arêtes (cf. ci-dessus),
- la plupart des angles restant après traitement sont des angles bloquants: regardant la frontière ou sur celle-ci (que l'on s'interdit de modifier).

## 7 Bibliographie

- [1] B.S. BAKER, E. GROSSE, C.S. RAFFERTY, Nonobtuse Triangulation of Polygons, *Discrete Comput. Geom.*, n° 3, pp 147-168, 1988.
- [2] C. CHERFILS, F. HERMELINE, Diagonal swap procedure and characterization of 2D-Delaunay triangulations, *M<sup>2</sup>AN*, vol 24, n° 5, pp 613-625, 1990.
- [3] P.L. GEORGE, Génération Automatique de Maillages, Applications aux Méthodes d'Eléments Finis, Masson, collection RMA, n° 16, 1990.
- [4] P.L. GEORGE, Construction et Modification de Maillages, Inria, Rapport Technique n° 104, 1988.
- [5] F. HECHT, E. SALTEL, Emc2: Editeur de maillages et de contours bidimensionnels, Inria, Rapport Technique n° 118, 1990.
- [6] F.P. PREPARATA, M.I. SHAMOS Computational geometry, an introduction, Springer-Verlag, 1985.
- [7] Y. ET R. SORTAIS, La géométrie du triangle, Hermann. Collection Formation des enseignants et formation continue, 1987.
- [8] J.Y. TALON, Algorithmes de génération et d'amélioration de maillages en 2D, Rapport Technique n° 20, Artemis-Imag, 1987.

**ISSN 0249-6399**