

# Etude numerique d'un probleme de plaque thermoelastique

Christophe Lebeltel

► **To cite this version:**

Christophe Lebeltel. Etude numerique d'un probleme de plaque thermoelastique. RR-1270, INRIA. 1990. <inria-00075289>

**HAL Id: inria-00075289**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075289>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.:(1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 1270

*Programme 7  
Calcul Scientifique,  
Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée*

### ETUDE NUMERIQUE D'UN PROBLEME DE PLAQUE THERMOELASTIQUE

**Christophe LEBELTEL**

Juillet 1990



\* R R - 1 2 7 0 \*

Etude numérique d'un problème de  
Plaque thermoélastique

Christophe LEBELTEL\*

Résumé :

Ce rapport traite de la résolution numérique d'un problème de plaque thermoélastique de faible épaisseur, en thermoélasticité linéarisée.

A ce problème, on a initialement appliqué une méthode asymptotique pour s'intéresser au problème limite qui en résulte, posé sur un ouvert de dimension deux.

Numerical Study of a problem of a  
thermoelastic plate

Abstract :

This report presents the numerical resolution of a thermoelastic plate of small thickness, in linearized thermoelasticity.

An asymptotic method was firstly applied to the problem in order to deal with the resulting limit problem, formulated on a two-dimensional open set.

\* Doctorant projet Modulef

## Introduction

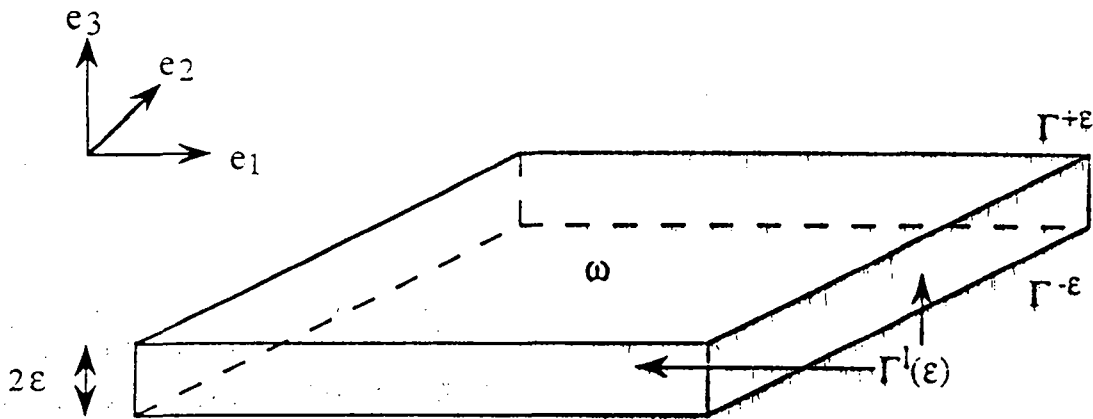
Notre propos est de résoudre numériquement un problème de plaque thermoélastique régie par une loi de comportement, une équation de mouvement et une équation de chaleur, et soumise à une force de volume et à une condition limite de flux sur ses deux surfaces supérieure et inférieure.

Ce rapport fait suite à [5] dans lequel nous avons appliqué la méthode des développements asymptotiques à ce problème, sous différentes hypothèses de changements d'échelle. Ainsi, le problème 3D posé sur un ouvert  $\Omega^\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$  devient un problème 2D posé sur un ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . C'est celui-ci que nous résolvons.

## I) Position du problème, notations

Nous rappelons ici le problème 3D initial.

L'espace est rapporté à une base  $(e_1, e_2, e_3)$ . La plaque représentée par l'ouvert  $\Omega^\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$  est un parallélépipède rectangle d'épaisseur  $2\varepsilon$ .



$$\Omega^\varepsilon = \omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$$

$$\Gamma^{\pm\varepsilon} = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$$

$$\Gamma^k(\varepsilon) = \partial\omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$$

Nous utilisons les deux conventions habituelles :

- . indice latin  $\in \{1; 2; 3\}$
- . indice grec  $\in \{1; 2\}$
- la convention de sommation sur les indices répétés.

Nous notons  $e_{ij}(u)(x) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)(x)$  le tenseur linéarisé des déformations.

La plaque vérifie les équations 3D :

**loi de comportement :**

$$e_{ij}(u^\varepsilon) - \alpha^\varepsilon \theta^\varepsilon \delta_{ij} = \frac{1 + \nu^\varepsilon}{E^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon - \frac{\nu^\varepsilon}{E^\varepsilon} \text{Tr} \sigma^\varepsilon \delta_{ij} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

**équation du mouvement :**

$$\rho^\varepsilon \ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij}^\varepsilon + f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

**équation de chaleur :**

$$\beta^\varepsilon \dot{\theta}^\varepsilon = \frac{k^\varepsilon}{T_0} \partial_{jj} \theta^\varepsilon - \frac{E^\varepsilon \alpha^\varepsilon}{1 - 2\nu^\varepsilon} \text{Tr} e(\dot{u}^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

où  $\nu^\varepsilon$  est le rapport de Poisson

$E^\varepsilon$  est le module d'Young

$\alpha^\varepsilon$  est le coefficient de dilatation thermique

$\rho^\varepsilon$  est la densité de masse

$f_i^\varepsilon$  désignent les composantes de la densité de forces volumiques

$\beta^\varepsilon$  est le coefficient de chaleur spécifique

$k^\varepsilon$  est le coefficient de conductivité de la chaleur

$u^\varepsilon$  est le champ de déplacement

$\sigma^\varepsilon$  est le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

$\theta^\varepsilon$  est la température à l'intérieur de la plaque

$T_0$  est une température de référence supposée connue.

Dans notre étude théorique, nous avons supposé l'existence de constantes  $\nu, E, \alpha, \beta, k, \rho$ , indépendantes de  $\varepsilon$  telles que :

$$\forall \varepsilon > 0, \nu^\varepsilon = \nu, E^\varepsilon = E, \alpha^\varepsilon = \alpha, \beta^\varepsilon = \beta, k^\varepsilon = k, \rho^\varepsilon = \varepsilon^2 \rho.$$

Nous imposons à la plaque les :

**conditions aux bords :**

$$\sigma_{i3}^\varepsilon = \pm g_i^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma^{\pm \varepsilon}$$

$$k \partial_3 \theta^\varepsilon n_3^\varepsilon + \gamma^\varepsilon (\theta^\varepsilon - \theta^{\pm \varepsilon}) = q^{\pm \varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma^{\pm \varepsilon}$$

$$\theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{\mathcal{L}}(\varepsilon)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{\mathcal{L}}(\varepsilon)$$

où  $g_i^{\pm \varepsilon}$  désignent les composantes de la densité de forces surfaciques

$\gamma^\varepsilon$  est le coefficient de transfert de chaleur

$\theta^{\pm \varepsilon}(x_1, x_2, t)$  sont deux températures supposées connues

$q^{\pm \varepsilon}$  est le flux de chaleur sur  $\Gamma^{\pm \varepsilon}$  supposé connu

**conditions initiales :**

$$u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon$$

$$\dot{u}^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon$$

$$\theta^\varepsilon(0) = \theta_0^\varepsilon$$

## II) Objectif

Nous nous plaçons dans le cas où l'hypothèse portant sur  $\gamma^\varepsilon$  est :

$\exists \gamma > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que  $\gamma^\varepsilon = \gamma / \varepsilon$  (cf [5] )

et résolvons l'équation qui porte sur le déplacement vertical, dans le problème limite 2D auquel nous avons abouti.

La seule force que nous retenons est le poids propre de la plaque.

Compte tenu de l'hypothèse  $\rho^\varepsilon = \varepsilon^2 \rho$ , la densité volumique de force qui s'exerce sur  $\Omega^\varepsilon$  s'écrit  $f_3^\varepsilon = -\varepsilon^2 \rho g e_3$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. L'étude de la convergence fait apparaître que le choix d'une plaque soumise à son poids est permis si l'on désire que la solution de notre problème nous fournisse une approximation du déplacement réel.

Rappelons quelques notations introduites dans [5] :

Soit  $\Omega = \Omega^1$ .

Au point  $x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$  de  $\Omega^\varepsilon$ , nous associons le point  $x = (x_1 = x_1^\varepsilon, x_2 = x_2^\varepsilon, x_3 = \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon})$  de  $\Omega$

A la fonction  $f_3^\varepsilon$  définie sur  $\Omega^\varepsilon$ , nous associons  $f_3(\varepsilon)$  définie sur  $\Omega$  par  $f_3(\varepsilon)(x) = \varepsilon f_3^\varepsilon(x^\varepsilon)$ .

Alors  $\frac{1}{\varepsilon} f_3(\varepsilon) = f_3^0$  où  $f_3^0 = -\rho g e_3$  est une fonction indépendante de  $\varepsilon$ .

L'étude de la convergence nous conduit à faire les deux hypothèses suivantes :

. Si les vecteurs  $u_{o_3}^\varepsilon$  et  $v_{o_3}^\varepsilon$  définis sur  $\Omega^\varepsilon$  décrivent les conditions initiales du déplacement réel  $u_3^\varepsilon$ , et si  $u_{o_3}(\varepsilon)$  et  $v_{o_3}(\varepsilon)$  définis sur  $\Omega$  par :

$$u_{o_3}(\varepsilon)(x) = \varepsilon u_{o_3}^\varepsilon(x^\varepsilon)$$

$$v_{o_3}(\varepsilon)(x) = \varepsilon v_{o_3}^\varepsilon(x^\varepsilon)$$

leur correspondent par changements d'échelle, les fonctions  $\frac{1}{\varepsilon} u_{o_3}(\varepsilon)$  et  $\frac{1}{\varepsilon} v_{o_3}(\varepsilon)$  tendent, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, vers des fonctions  $u_{o_3}^0$  et  $v_{o_3}^0$



. Il existe deux fonctions  $\theta^\pm$  indépendantes de  $\varepsilon$  définies sur  $\omega \times [0, T]$  telles que  $\theta^{\pm \varepsilon}(x_1, x_2, \pm \varepsilon, t) = \varepsilon \theta^\pm(x_1, x_2, t)$ .

Sous ces conditions, rappelons le problème limite auquel nous a menés l'étude théorique.

Lorsque  $\varepsilon$  devient petit, la température  $\theta^\varepsilon$  au point  $x^\varepsilon$  de la plaque est voisine de

$$\varepsilon \left( \xi^0 + x_3^\varepsilon \tilde{\xi}^0 \right) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \xi^0(x_1, x_2, t) = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \\ \tilde{\xi}^0(x_1, x_2, t) = \frac{\gamma}{k + \gamma} \frac{\theta^+ - \theta^-}{2} \end{cases}$$

et le déplacement vertical  $u_3^\varepsilon$  au point  $x^\varepsilon$  est voisin de  $u_3(x_1, x_2, t)$ , solution du problème 2D :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad 2\rho \ddot{u}_3 + \frac{2E}{3(1-\nu)} \Delta^2 u_3 = \int_{-1}^{+1} f_3^0 dx_3 - \frac{E\alpha\gamma}{3(1-\nu)(k+\gamma)} \Delta(\theta^+ - \theta^-) \quad \text{dans } \omega \\ (2) \quad u_3 = \partial_n u_3 = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \\ (3) \quad \left| \begin{array}{l} u_3(t=0) = u_{o_3}^0 \\ \dot{u}_3(t=0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} v_{o_3}^0 dx_3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### III) Valeurs numériques des données

Nous considérons le cas d'une plaque dont la base est un rectangle de dimensions  $L = 2\text{m}$ ,  $l = 1\text{m}$ , de demi-épaisseur  $\epsilon = 0,01\text{m}$ .

Nous la supposons en acier, homogène, isotrope et pour laquelle :

$$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 2.10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha = 1,17. 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

$$k = 30 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C} = 34,89 \text{ J/m s}^\circ\text{C}$$

$$\gamma = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Nous prenons deux types de fonction pour  $\theta^+ - \theta^-$  :

$$*) \theta^+ - \theta^- = 10^4 x_1 (2 - x_1) x_2 (1 - x_2) g(t) \text{ où } t \rightarrow g(t) \text{ est une fonction du temps}$$

→ problème évolutif avec un second membre symétrique par rapport au point  $(1 ; 0,5)$ , centre de la plaque, et de signe constant.

$$*) \theta^+ - \theta^- = 10^4 (2 - x_1) \sin(3\pi x_1) x_2 (1 - x_2)$$

→ problème quasi-statique avec un second membre qui ne présente plus de symétrie et dont le signe alterne.

Notons que pour chacun des choix, la condition  $\theta^+ - \theta^-|_{\Gamma} \equiv 0$  que nous impose l'étude théorique se trouve respectée.

Remarquons que dans l'équation (1), la fonction  $\theta^+ - \theta^-$  n'intervient que par son laplacien, de sorte qu'une différence  $\theta^+ - \theta^-$  constante, aussi grande soit-elle, ne produirait aucun effet sur le déplacement vertical.

Dans le second membre de l'équation (1), le terme de poids est, compte tenu des valeurs numériques, négligeable devant le terme de température.

C'est pourquoi nous allons aussi considérer le cas de figure particulier d'une plaque soumise à son seul poids, sans prise en compte de la température. Ainsi pourrons-nous effectuer une comparaison entre l'aspect purement élastique et l'aspect thermoélastique de notre problème.

**Choix de  $g(t)$  :**

Nous résolvons le problème sur l'intervalle  $[0, T]$  où  $T = 300$  s, avec un pas de temps  $\Delta t$  de 30 s.

Nous considérons deux choix de  $g(t)$  :

- une fonction affine croissante :  $g_1(t) = 1 + t/300$

- une fonction exponentielle décroissante :  $g_2(t) = e^{-t/300}$

**conditions initiales :**

Nous supposons que la plaque n'est pas déformée à l'instant initial

$$u_3(t=0) = 0$$

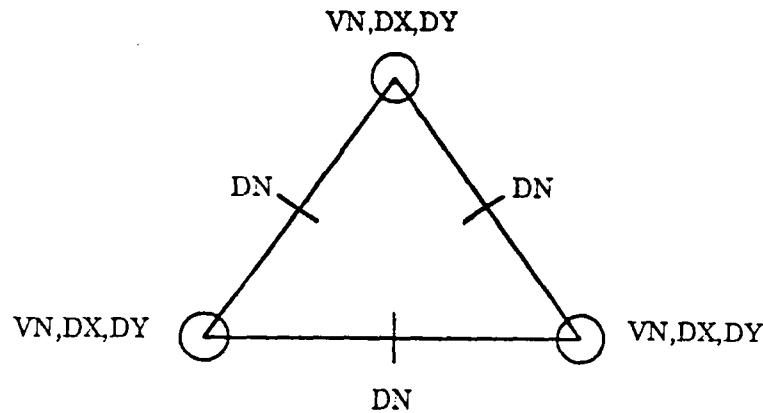
$$\dot{u}_3(t=0) = 0$$

#### IV) Méthode numérique

Nous résolvons numériquement notre problème en utilisant la bibliothèque d'éléments finis de Modulf.

Nous avons choisi l'élément fini Clough-Tocher complet (nom technique Modulf : TRIA CLOT) dont les degrés de liberté sont :

- en chaque sommet, la valeur au noeud et les deux dérivées partielles  $\partial_x, \partial_y$
- en chaque milieu d'arête, la dérivée normale.



Pour la lecture des conditions initiales, nous appelons le préprocesseur COSDXX que nous avons dû adapter au cas d'éléments finis dont le nombre de degrés de liberté par noeud n'est pas constant.

Le maillage que nous utilisons est une triangulation en 144 triangles réguliers, le nombre de noeuds est de 325, ce qui correspond à 507 degrés de liberté.

Pour la résolution du problème évolutif, nous faisons appel au programme Evolmp basé sur la méthode de résolution de Newmark à deux pas, dont nous décrivons brièvement le principe :

$$\text{Soit à résoudre l'équation } \begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \text{ pour } t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

$\Delta t$  étant le pas de temps,

soient  $\{t_n\}$  la suite des instants définie par  $t_0 = 0$  et  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$

$u_{n+i}$  la valeur approchée de  $u(t_{n+i})$

$f_{n+i}$  la valeur de  $f(t_{n+i}, u_{n+i})$

L'algorithme est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^2 \alpha_i u_{n+i} = \Delta t^2 \sum_{i=0}^2 \beta_i f_{n+i} \\ u_0, u_1 \text{ connus} \end{array} \right.$$

avec les valeurs  $\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1$   
 $\beta_0 = 0,25 \quad \beta_1 = 0,5 \quad \beta_2 = 0,25$

A titre indicatif, nous précisons le temps d'une exécution de notre programme, effectuée sur une station de travail apollo 4000, sous système UNIX :

	<u>user - time (s)</u>
*) <u>plaque soumise à son seul poids</u> .....	28
*) <u>effet thermique retenu, avec</u> $\theta^+ - \theta^- = 10^4 x_1 (2 - x_1) x_2 (1 - x_2) (1 + t_{/300})$ .....	27, 7
*) <u>effet thermique retenu, avec</u> $\theta^+ - \theta^- = 10^4 x_1 (2 - x_1) x_2 (1 - x_2) \exp(-t_{/300})$ .....	27, 8
*) <u>effet thermique retenu, avec</u> $\theta^+ - \theta^- = 10^4 (2 - x_1) \sin(3 \pi x_1) x_2 (1 - x_2)$ .....	28, 1

## V) Tracé des courbes

Pour chacun des tests effectués, un tableau de valeurs nous est délivré qui nous procure à chaque pas de temps la valeur de la solution en chaque degré de liberté. Nous utilisons ces fichiers de résultats pour tracer :

### Figure A : cas de la plaque soumise à son seul poids

une vue en coupe transversale suivant le plan (  $x_1$  o  $x_3$  ) de la plaque déformée

### Figures B : cas de la plaque soumise à l'effet thermique, lorsque

$$\theta^+ - \theta^- = 10^4 x_1 (2 - x_1) x_2 (1 - x_2) (1 + t/300)$$

- une vue en coupe transversale suivant le plan (  $x_1$  o  $x_3$  ) de la plaque déformée aux trois instants

·  $t_1 = 60$  s

·  $t_2 = 120$  s

·  $t_3 = 240$  s

- la courbe de variation en fonction du temps du déplacement vertical au point central de la plaque.

### Figures C : cas de la plaque soumise à l'effet thermique, lorsque

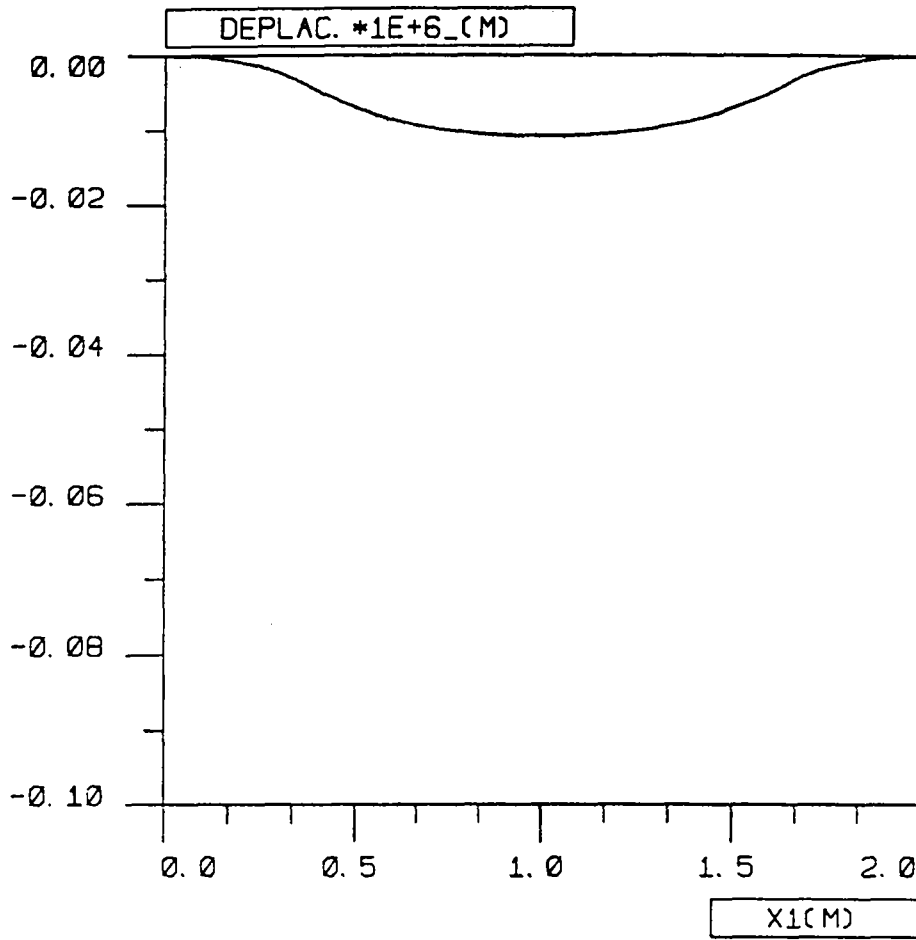
$$\theta^+ - \theta^- = 10^4 x_1 (2 - x_1) x_2 (1 - x_2) \exp(-t/300)$$

- mêmes graphiques qu'au cas précédent

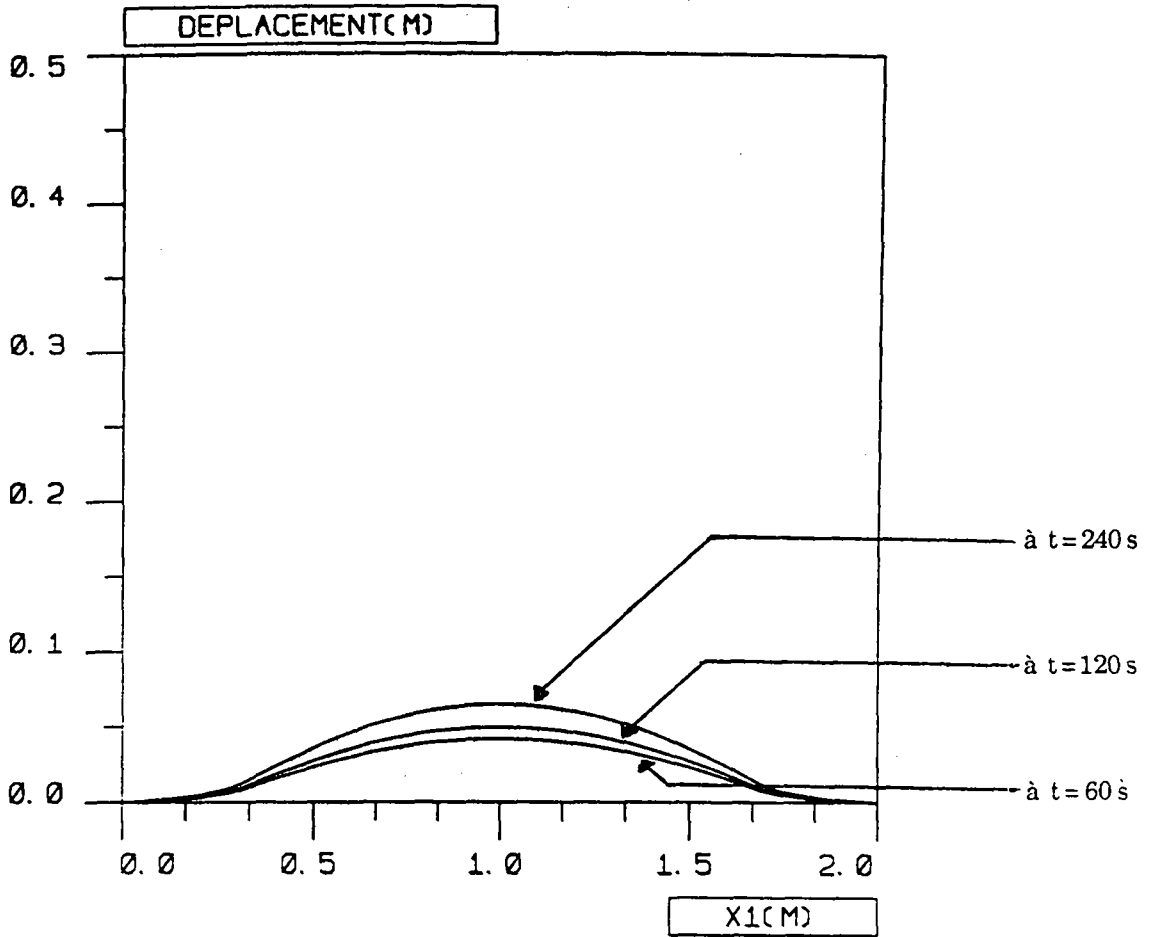
### Figure D : cas de la plaque soumise à l'effet thermique, lorsque

$$\theta^+ - \theta^- = 10^4 (2 - x_1) \sin(3\pi x_1) x_2 (1 - x_2)$$

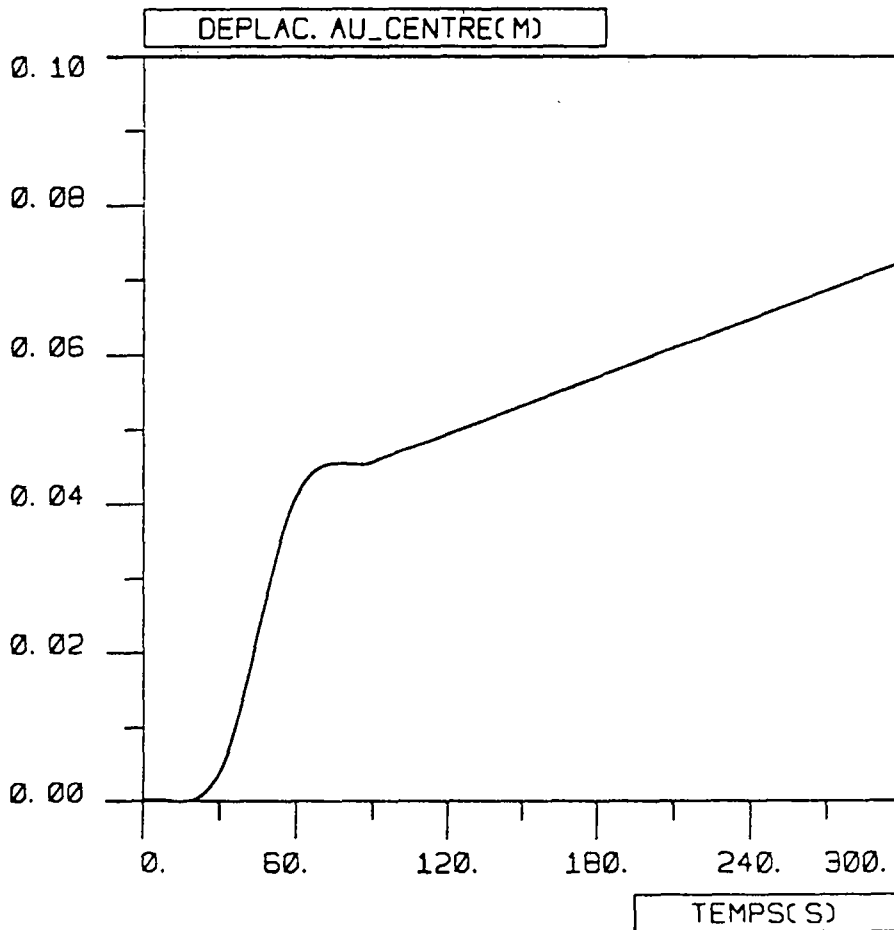
- une vue en coupe transversale suivant le plan (  $x_1$  o  $x_3$  ) de la plaque déformée



Vue en coupe suivant (x1 o x3)

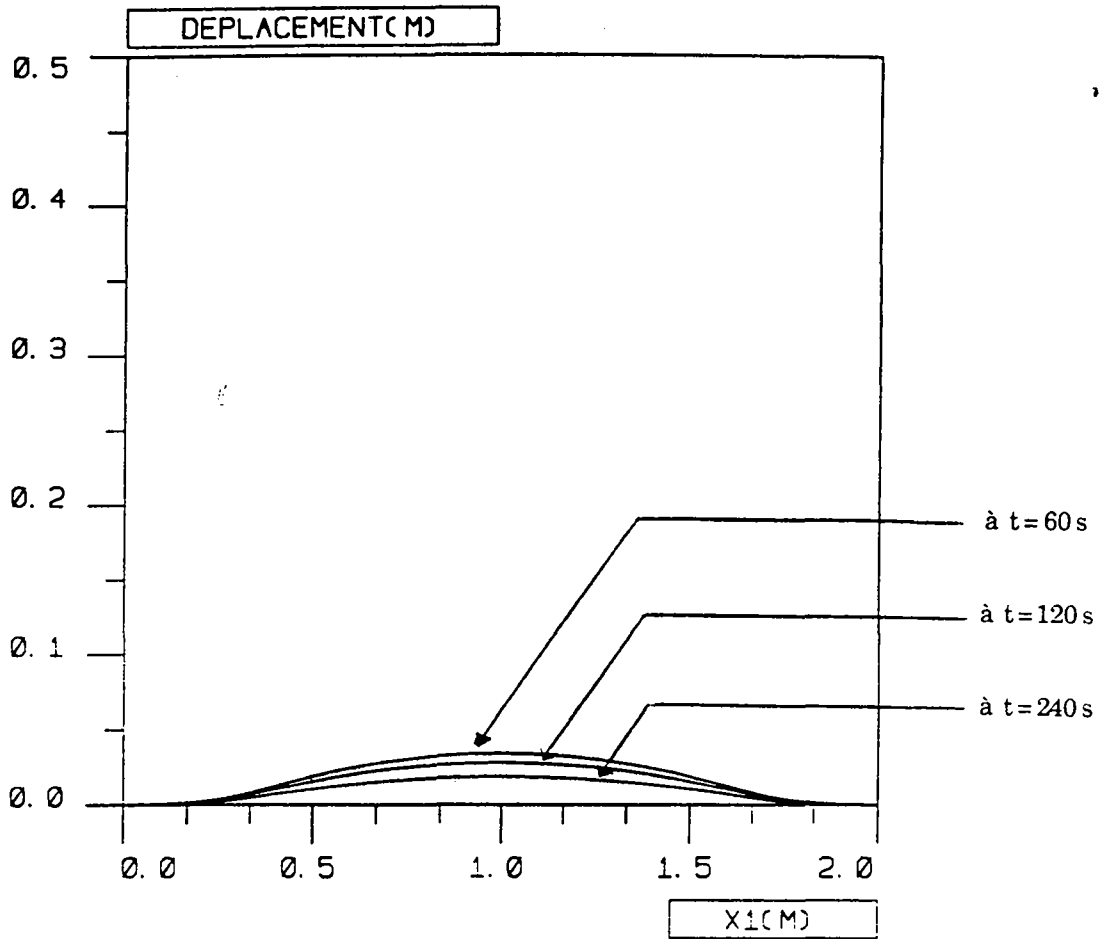


Vues en coupe suivant ( $x_1$  o  $x_3$ )

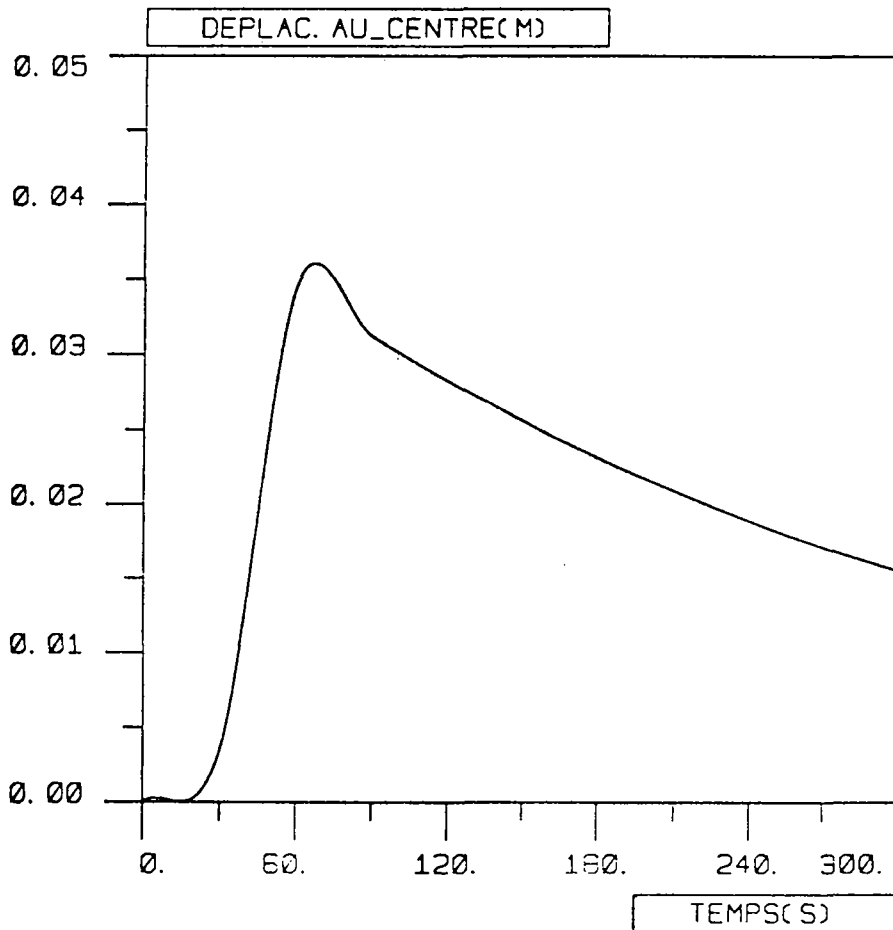


Déplacement vertical au centre de la plaque

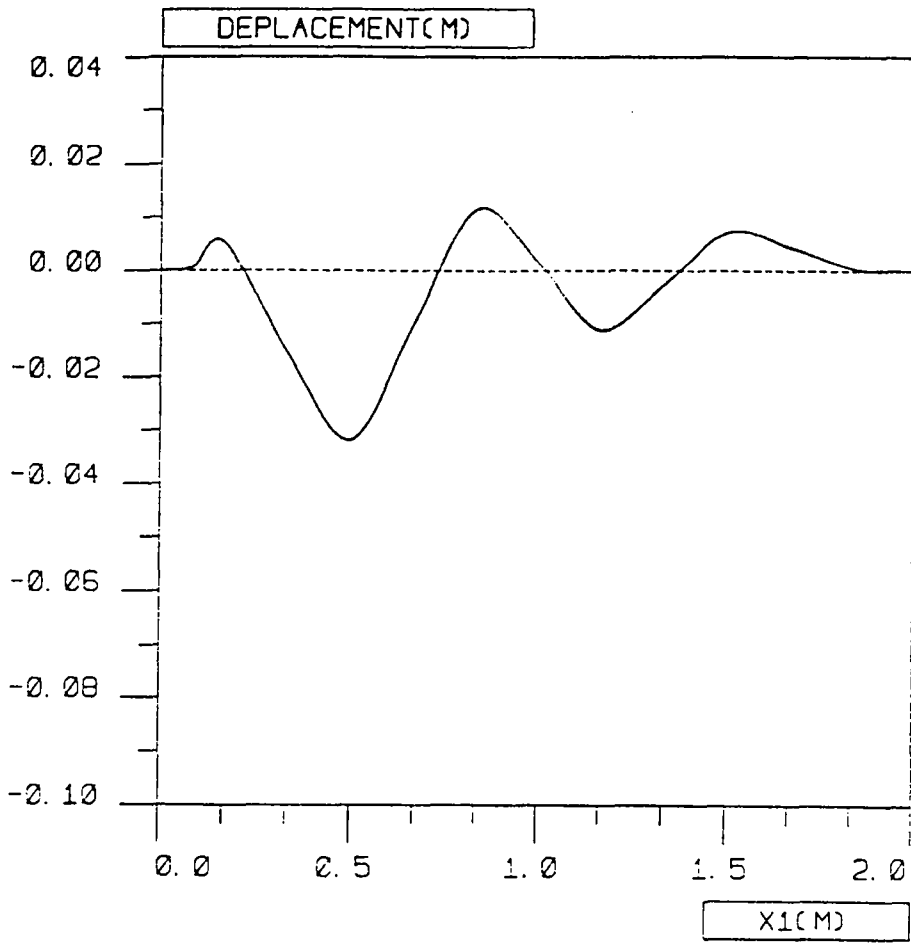




Vues en coupe suivant (x1 o x3)



Déplacement vertical au centre de la plaque



Vue en coupe suivant (x1 o x3)

## VI) Commentaires sur les résultats

Les résultats que nous obtenons et représentons au §V suggèrent les remarques suivantes :

- Lorsque la plaque est soumise à son seul poids, la déformation, dirigée vers le bas, correspond à un déplacement vertical de très faible valeur absolue. De plus, très vite, celui-ci ne subit plus d'évolution au cours du temps.

- Lorsque nous retenons le terme de température, le déplacement vertical devient beaucoup plus important.

Avec un second membre positif et symétrique par rapport au point central, la déformation, dirigée vers le haut, correspond à un gonflement de la plaque. On retrouve sur les valeurs du déplacement, la symétrie vérifiée par la donnée. Ainsi, le déplacement est-il maximal au centre de la plaque ; c'est pourquoi nous avons tracé la courbe de sa valeur en ce point particulier en fonction du temps.

De plus, la variation de la solution en fonction du temps épouse assez vite (dès le troisième pas de temps) celle de la fonction  $g(t)$  :

. lorsque  $g(t) = (1 + t/300)$ , la solution devient affine et croissante

. lorsque  $g(t) = \exp(-t/300)$ , elle devient exponentiellement décroissante

Avec le dernier choix de second membre, la déformation correspond à une ondulation de la plaque (cas de figure D). De même que la donnée, le déplacement ne présente plus de symétrie.

## **Conclusion**

Notre travail a consisté à proposer un modèle de plaque thermoélastique encastree sur sa surface latérale et soumise sur ses deux autres faces à une condition aux limites de flux pour sa température, puis à résoudre, en nous appuyant sur une étude par développements asymptotiques du problème initial, le problème limite 2D vérifié par le déplacement vertical, posé sur la surface moyenne de la plaque.

L'un de ses intérêts à été de mettre en évidence, dans le cadre de notre simulation numérique, la différence importante dans l'ordre de grandeur des valeurs de la solution, selon que la plaque est soumise à son seul poids ou que l'effet thermique est pris en compte.

## Références

- [1] : M. Bernadou, P.L. George, A. Hassim, P. Joly, P. Laug, A. Perronnet, E. Saltel, D. Steer, G. Vanderborck, M. Vidrascu.  
Modulef, "Une bibliothèque d'éléments finis". INRIA éditeur 1985.
- [2] : D. Blanchard, G.A. Francfort.  
Asymptotic thermoelastic behavior of flat plates.  
Quarterly of Applied Mathematics, 1987.
- [3] : P.G. Ciarlet, P. Destuynder.  
A justification of the two - dimensional linear plate model.  
J. Mecanique, Vol. 18, 315 - 344, 1979.
- [4] : P. Destuynder.  
Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire.  
Masson, Paris, 1986.
- [5] : C. Lebeltel.  
Méthode des développements asymptotiques pour un problème de plaque thermoélastique.  
Rapport de recherche INRIA n° 1108, oct. 1989.
- [6] : A. Raoult.  
Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par des méthodes multipas.  
Thèse, Paris VI, 1980.

**ISSN 0249 - 6399**