Un principe de Pontryagine pour le controle des systemes semilineaires elliptiques

J. Frederic Bonnans, Eduardo Casas

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1099

Programme 5
Automatique, Productique,
Traitement du Signal et des Données

UN PRINCIPE DE PONTRYAGINE POUR LE CONTRÔLE DES SYSTEMES SEMILINEAIRES ELLIPTIQUES

Joseph Frédéric BONNANS
Eduardo CASAS

Octobre 1989

RR.1099

Un Principe de Pontryagine pour le Contrôle des Systèmes Semilinéaires Elliptiques
A Principle of Pontryagin for the Optimal Control of Semilinear Elliptic Systems

Joseph Frédéric Bonnans*- Eduardo Casas†

Août 1989

Résumé

Nous considérons un problème de contrôle d'un système semi-linéaire elliptique avec critère intégral. L'opérateur gouvernant le système est fonction monotone de l'état ; cet opérateur et le critère sont continûment différentiables par rapport à l'état mais éventuellement discontinus par rapport au contrôle. Nous exprimons la variation du critère sous une forme hamiltonienne. Ceci permet d'énoncer des conditions d'optimalité de type Pontryagine, ainsi que des résultats d'optimalité approchée grâce au principe d'Ekeland.

Abstract

We consider a control problem with a semilinear equation of elliptic type and an integral criterion. The operator governing the state equation is supposed to be monotone with respect to the state ; this operator and the criterion are continuously differentiable with respect to the state but may be discontinuous with respect to the control. We write the variation of the criterion under an Hamiltonian form. This allows to state Pontryagin type optimality conditions, as well as results concerning approximate solutions, using Ekeland's principle.

Mots-Clés

Principe de Pontryagine, Hamiltonien, Contrôle Optimal, Principe d'Ekeland, Contraintes sur l'Etat, Systèmes non Linéaires, Equations Elliptiques.

*INRIA, Domaine de Voluceau, BP 105 - Rocquencourt, 78153 Le Chesnay - France

†Departamento de Mátematicas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria, 39005 Santander - Espagne

1 INTRODUCTION

Le principe de Pontryagine [10], [14], [7] s'applique aux problèmes de contrôle d'équations dynamiques. Lorsque les données sont régulières, on peut énoncer des conditions du premier ordre en exprimant la nullité du gradient du critère. Ces conditions, qui font intervenir l'état adjoint du système, expriment la stationarité du hamiltonien (à chaque instant) par rapport au contrôle. Le principe de Pontryagine dit que le contrôle minimise à chaque instant le hamiltonien, et il est donc plus fort que les conditions du premier ordre.

On l'obtient en considérant des variations du contrôle optimal localisée autour d'un instant donné. Dans le cas d'équations différentielles ordinaires, pour des problèmes à données régulières et sans contraintes sur l'état, on peut l'obtenir d'une manière élémentaire (Luenberger [12], p. 261). Cependant il reste valable lorsque la dépendance par rapport au contrôle optimal n'est pas régulière. La métrique d'Ekeland, qui est la mesure de l'ensemble des instants où deux contrôles diffèrent, permet de plonger la technique des variations localisées en temps dans un cadre plus abstrait de principe d'optimalité dans des espaces métriques [5]. Par ailleurs cette métrique permet l'utilisation du principe d'Ekeland [3] qui permet d'exprimer des conditions de type Pontryagine pour des solutions approchées [4].

Dans le cadre du contrôle de problèmes elliptiques, peu de recherches ont été effectuées sur des extensions du principe de Pontryagine. Un exemple de système linéaire assez particulier, sans contraintes sur l'état, est traité dans Lions [11]. Récemment Raitum [15] a donné des résultats pour des systèmes quasi-linéaires comportant un nombre fini de contraintes sur l'état.

Dans cet article, nous allons exprimer les conditions d'optimalité de type Pontryagine en opérant de la façon suivante : formulation hamiltonienne de la variation du critère, d'ou par passage à la limite le principe de Pontryagine pour des solutions locales, expression des conditions d'optimalité approchées par le principe d'Ekeland. Pour simplifier l'exposé nous ferons des hypothèses permettant d'utiliser au mieux les résultats de Stampacchia [17], concernant l'existence et la régularité de solutions d'équations linéaires elliptiques à coefficients bornés, non nécessairement continus.

Dans le cadre de ce schéma général, nous avons arrangé les calculs de manière à simplifier au maximum les preuves. Par exemple notre formulation hamiltonnienne de la variation du critère ne fait intervenir d'interpolation que sur l'état adjoint (et non sur l'état). De plus nous évitons le calcul de la "dérivée" de l'état par rapport à la perturbation localisée, qui aurait amené à considérer des solutions faibles.

Le plan de l'article est le suivant :La section 2 introduit le problème et présente les principaux résultats. La section 3 est consacrée à des résultats techniques sur la régularité de la solution de l'équation d'état et de l'équation adjointe. La section 4 introduit une formule de variation du critère sous forme hamiltonienne et énonce le principe de Pontryagine, pour des problèmes sans contraintes sur l'état. La section 5 utilise le principe d'Ekeland pour énoncer des conditions d'optimalité de solutions approchées.

2 PRESENTATION DU PROBLEME

Dans toute la suite on désignera par C_i des constantes strictement positives. Soit $n \in I\!N^*$ et $\Omega \subset I\!R^n$ un ouvert borné de frontière Γ lipschitzienne (Nečas [13]). Notons A l'opérateur différentiel

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(x)\partial_{x_i} y(x)),$$

où $a = (a_{ij})$ vérifie

$$a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega), \forall i,j = 1 \quad \text{à} \quad n, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_1 \sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^2, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, \forall \xi \in I\!R^n. \tag{2.2}$$

Dans toute la suite de l'article s désigne un réel tel que $s \geq 2$ et $s > n/2$ (donc $s = 2$ convient si $n \leq 3$). Soit K une partie d'un espace de Banach U et soient ϕ et L deux fonctions de $\Omega \times I\!R \times K$ vers $I\!R$, continûment dérivables par rapport à y, p.p. $x \in \Omega, \forall u \in K$ fixés, telles que $\forall (x,y,u)$ dans $\Omega \times I\!R \times K$ on ait :

$$\begin{aligned} |\phi(x,0,u)| &\leq M_1(x) + C_2\|u\|, & (2.3)\\ 0 \leq \phi'_y(x,y,u) &\leq [M_2(x) + C_3\|u\|]\eta_1(|y|), & (2.4)\\ |L(x,0,u)| &\leq M_3(x) + C_4\|u\|, & (2.5)\\ |L'_y(x,y,u)| &\leq [M_4(x) + C_5\|u\|]\eta_2(|y|), & (2.6) \end{aligned}$$

où les $M_i, i = 1, ..., 4$ désignent des fonctions de $L^s(\Omega)$ tandis que η_1 et η_2 sont des fonctions croissantes : $I\!R^+ \rightarrow I\!R^+$. Les hypothèses (2.1) (2.6) seront supposées vérifiées dans toute la suite (et ne seront donc pas répétées lors de l'énoncé des résultats). Soit l'équation d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} Ay + \phi(x, y(x), u(x)) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \end{array} \right. \tag{2.7}$$

et le critère intégral

$$J(y,u) = \int_\Omega L(x, y(x), u(x))dx.$$

Le problème que nous allons considérer est

$$\min J(y,u); (y,u) \quad \text{satisfait (2.7)} \quad \text{et} \quad u(x) \in K, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{2.8}$$

3 PRELIMINAIRES TECHNIQUES

Soit $\mathcal{U} = L^s(\Omega, U)$. Nous dirons que u est admissible si $u \in \mathcal{U}$ et $u(x) \in K$, p.p. et si l'application $(x,y) \rightarrow (\phi(x,y,u(x)), L(x,y,u(x))$ est pour tout $y \in I\!R$ fonction mesurable de x. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des contrôles admissibles. Puisque cette application est continue par rapport à y pour presque tout x d'après les hypothèses faites sur ϕ et L, elle vérifie les conditions de Carathéodory, ce qui assure que $x \rightarrow (\phi(x,y(x),u(x)), L(x,y(x),u(x))$ est mesurable pour tout y mesurable.

Lemme 3.1 *(voir [17], [6]) Il existe $C_6 > 0$ et $\alpha \in]0,1[$ tel que l'équation*

$$\begin{cases} Ay = f \quad dans \quad \Omega, \\ y = 0 \quad sur \quad \Gamma, \end{cases}$$

admet pour tout $f \in L^s(\Omega)$ une solution unique $y \in H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ et

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C_6 \|f\|_{L^s(\Omega)}.\bullet$$

Dans toute la suite, α désignera la constante fixée par le Lemme 3.1. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Il existe $C_7 > 0$ tels que, $\forall u \in \mathcal{K}$, l'équation (2.7) possède une solution unique $y \in H_0^1(\Omega) \cup C^\alpha(\overline{\Omega})$ telle que*

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_7(1 + \|u\|_{\mathcal{U}}).$$

et

$$\|y\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq \eta_3(\|u\|_{\mathcal{U}}).\bullet$$

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant qui se déduit du Lemme 3.1. :

Lemme 3.2 *Il existe C_8 et C_9 tel que, pour tout $a_0 \in L^s(\Omega), a_0 \geq 0$, l'équation*

$$\begin{cases} Ay + a_0 y = f \quad dans \quad \Omega, \\ y = 0 \quad sur \quad \Gamma, \end{cases} \tag{3.1}$$

a une solution unique $y \in H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$\|y\|_{H_0^1} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_8 \|f\|_{L^s(\Omega)} \tag{3.2}$$

$$\|y\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C_9 \|f\|_{L^s(\Omega)}(1 + \|a_0\|_{L^s(\Omega)}).\bullet \tag{3.3}$$

Démonstration

On sait (voir [17]) que l'équation ci-dessus admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$, l'application $f \to y$ étant continue de $L^s(\Omega)$ vers $H_0^1(\Omega)$, d'où l'estimation de y dans $H_0^1(\Omega)$. Soit f^+ et f^- les parties positives et négatives de f, de sorte que $f = f^+ - f^-$. Notons y^+ et y^- les solutions de (3.1) lorsque le second membre est f^+ et f^-. (y^+ et y^- ne sont pas les parties positives et négatives de y !). Si on obtient les estimations (3.2) et (3.3) pour y^+ et y^- (en remplaçant f par f^+ et f^-) alors on obtient aisément la conclusion du lemme. Il suffit donc de prouver (3.2) et (3.3) lorsque $f \geq 0$.

Supposons donc $f \geq 0$. Alors $y \geq 0$ d'après le principe du maximum [17]. Soit z la solution de l'équation

$$\begin{cases} Az &= f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Posons $w = z - y$, il vient alors par différence des équations

$$\begin{cases} Aw &= a_0 y \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Puisque $y \geq 0, Aw \geq 0$ donc $w \geq 0$ et donc $0 \leq y \leq z$. Le Lemme 3.1 implique $\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_6\|f\|_{L^s(\Omega)}$ d'où l'estimation $\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_6\|f\|_{L^s(\Omega)}$ et donc

$$\begin{aligned}\|Ay\|_{L^s(\Omega)} &\leq \|f\|_{L^s(\Omega)} + \|a_0\|_{L^s(\Omega)}\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq (1 + C_6\|a_0\|_{L^s(\Omega)})\|f\|_{L^s(\Omega)}\end{aligned}$$

d'où le résultat avec le lemme 3.1. •

Démonstration du Théorème 3.1

a) Vérifions l'unicité de la solution de (2.7) dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (2.7) dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a, d'après (2.3) et (2.4), $\phi(x, y_i(x), u(x)) \in L^s(\Omega)$ $(i = 1, 2)$. On peut donc multiplier la différence des équations en y_2 et en y_1 par $y_2 - y_1$ et intégrer sur Ω ; il vient, posant $y = y_2 - y_1$:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx + \int_\Omega (\phi(x, y_2(x), u(x)) - \phi(x, y_1(x), u(x)))(y_2(x) - y_1(x))dx = 0$$

Mais la positivité de ϕ'_y (hypothèse (2.4)) implique la positivité de la seconde intégrale ; donc $\int \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx \leq 0$, qui joint à (2.2) et à la condition au bord $y = 0$ implique $y = 0$ sur Ω, donc $y_2 = y_1$.

b) Donnons une estimation a priori de y dans $H_0^1(\Omega)$ et $C^\alpha(\bar\Omega)$, supposant y estimée dans $L^\infty(\Omega)$. Si $y \in L^\infty(\Omega)$ est solution de (2.7), on peut écrire

$$Ay + \phi(., y, u) - \phi(., 0, u) = -\phi(., 0, u) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

d'où, après multiplication par y et intégration par parties (noter que puisque $y \in L^\infty(\Omega)$, $\phi(., y, u)$ et $\phi(., 0, u)$ sont dans $L^s(\Omega)$, donc leur produit par y est intégrable) :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx \quad &+ \quad \int_\Omega [\phi(., y, u) - \phi(., 0, u)] \quad ydx = \\ \int_\Omega \phi(., 0, u)ydx \quad &\leq \quad \|\phi(., 0, u)\|_{L^s(\Omega)}\|y\|_{L^{s'}(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.4}$$

avec $1/s + 1/s' = 1$, donc $s' \leq 2$ de sorte que $\|y\|_{L^{s'}(\Omega)} \leq C_{10}\|y\|_{H_0^1(\Omega)}$. D'après la monotonie de ϕ'_y la seconde intégrale de (3.4) est positive donc, avec (2.3) :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \int a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx &\leq C_{10}\|\phi(., 0, u)\|_{L^s(\Omega)}\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C_{11}(1 + \|u\|_{\mathcal{U}})\|y\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ceci joint à (2.2) implique l'estimation

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{12}(1 + \|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.5}$$

Mais d'après (2.3), (2.4) et le théorème de la moyenne, pour un certain $\hat{y}$ avec $|\hat{y}(x)| \leq |y(x))|$ p.p. :

$$\begin{aligned}\|\phi(x, y, u)\|_{L^s(\Omega)} &\leq \|\phi(x, 0, u)\|_{L^s(\Omega)} + \|\phi'_y(x, \hat{y}, u)\|_{L^s(\Omega)}\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_{13}(1 + \|u\|_{\mathcal{U}})\|y\|_{L^\infty(\Omega)}\eta_1(\|y\|_{L^\infty(\Omega)})\end{aligned}$$

donc avec le Lemme 3.1 :

$$\|y\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C_6 C_{13}(1+\|u\|_{\mathcal{U}})\|y\|_{L^\infty(\Omega)}\eta_1(\|y\|_{L^\infty(\Omega)}). \tag{3.6}$$

c) Il suffit pour achever la preuve de montrer l'existence de y dans $L^\infty(\Omega)$ tel que $\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta_4(\|u\|_{\mathcal{U}})$ avec η_4 croissante : $I\!R^+ \to I\!R^+$. Pour ceci on va utiliser une troncature non locale de $\phi(x,y,u)$ de la manière suivante. Soit $N > 0$; posons, pour $y \in L^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{U}$ donnés (donc $\phi(.,y,u) \in L^s(\Omega)$ d'après (2.3) et (2.4)) :

$$\phi_N(.,y,u) = \begin{cases} \phi(.,y,u) & \text{si} \quad \|\phi(.,y,u)\|_{L^s(\Omega)} \leq N, \\ \frac{N}{\|\phi(.,y,u)\|_{L^s(\Omega)}}\phi(.,y,u) & \text{sinon,} \end{cases}$$

de telle sorte que $\|\phi_N(.,y,u)\|_{L^s(\Omega)} \leq N$. Considérons l'équation approchée

$$\begin{cases} Ay_N + \phi_N(x, y_N(x), u(x)) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ y_N = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Montrons que (3.1) possède une solution $y_N \in H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ par un argument de point fixe. D'après (2.3) et (2.4), l'application $y \to \phi(.,y,u)$ est continue (et même localement lipschitzienne) de $L^\infty(\Omega)$ vers $L^s(\Omega)$, donc $y \to \phi_N(.,y,u)$ est continue et bornée de $L^\infty(\Omega)$ vers $L^s(\Omega)$. Soit l'application $T : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega), T : y \to z$ solution de

$$\begin{cases} Az + \phi_N(x, y(x), u(x)) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma; \end{cases}$$

D'après le Lemme 3.1, T est bien à image dans $L^\infty(\Omega)$ et son image est même contenue dans un borné de $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Or l'injection de $C^\alpha(\overline{\Omega})$ dans $L^\infty(\Omega)$ est compacte : T est donc continue de $L^\infty(\Omega)$ vers $L^\infty(\Omega)$, à image dans un compact : d'après le principe de Schauder [8] elle admet un point fixe, qui est donc solution de (3.1).
Si $\|\phi(.,y_N,u)\|_{L^s(\Omega)} \leq N$ alors (d'après la définition de ϕ_N) y_N est solution de (2.7). Ceci sera vrai en particulier d'après (2.3) et (2.4), pour N assez grand, si on a une estimation du type $\|y_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ (indépendant de N) . Pour obtenir une telle estimation, notons que y_N est solution de l'équation linéaire (en z) :

$$\begin{cases} Az + \psi(x)z = -\alpha_N \phi(x,0,u) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$\alpha_N := \min(1, N/\|\phi(.,y_N,u)\|_{L^s(\Omega)})$$
$$\psi(x) = \alpha_N \phi'_y(x,\hat{y},u)$$

avec $\hat{y}(x) \in [0, y_N(x)], \forall x \in \Omega$ telle que

$$\phi'_y(x,\hat{y},u)y_N = \phi(x,y_N(x),u(x)) - \phi(x,0,u(x)) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega$$

(un tel $\hat{y}$ existe puisque ϕ est C^1 par rapport à y p.p. x, u) et donc $\psi(x)y_N = \phi_N(x,y_N,u) - \alpha_N\phi(x,0,u)$ et y_N est donc solution de (3.7). D'après (2.4), et puisque $\alpha_N > 0$, on a $\psi \in L^s(\Omega)$ et $\psi \geq 0$. D'après le Lemme 3.2 et puisque $\alpha_N \leq 1$ on a donc

$$\|y_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_7\|\phi_N(x,0,u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C_7\|\phi(x,0,u)\|_{L^s(\Omega)} = C$$

indépendant de N. On a montré que pour N assez grand, y_N est la solution unique de (2.7) et d'après (2.3)

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_7\|\phi(x,0,u)\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq C_8(1+\|u\|_{\mathcal{U}}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

d) Nous avons montré l'existence de y dans $H_0^1(\Omega)\cap C^\alpha(\overline{\Omega})$; La première estimation du théorème est démontrée par (3.5) et (3.8). Et l'estimation dans $C^\alpha(\overline{\Omega})$ découle de (3.6) et (3.8). •

4 FORMULATION HAMILTONIENNE DE LA VARIATION DU CRITERE ET PRINCIPE DE PONTRYAGINE

Soient u et v deux contrôles dans $\mathcal{K}$ et y_u, y_v les états associés. Définissons les états intermédiaires $\hat{y}$ et $\tilde{y}$ solution de

$$\begin{aligned} \phi(.,y_v,v) &= \phi(.,y_u,v)+\phi'_y(.,\hat{y},v)(y_v-y_u), \\ L(.,y_v,v) &= L(.,y_u,v)+L'_y(.,\tilde{y},v)(y_v-y_u), \end{aligned}$$

avec $\hat{y}(x)$ et $\tilde{y}(x)$ dans $[y_u(x),y_v(x)], \forall x\in\Omega$; puisque y_u et y_v sont bornés, et d'après le théorème de la moyenne, $\hat{y}$ et $\tilde{y}$ existent et sont bornés. Définissons maintenant "l'état adjoint intermédiaire" $p_{u,v}$ solution de

$$\begin{cases} A^\star p_{u,v}+\phi'_y(.,\hat{y},v)p_{u,v}=L'_y(.,\tilde{y},v) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ p_{u,v}=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{4.1}$$

l'opérateur $A^\star$ étant l'adjoint formel de A. Notons que si $u=v$, alors $\hat{y}=\tilde{y}=y$ et $p_{u,v}$ est l'état adjoint associé à u. Vérifions que (4.1) est bien posée dans tous les cas :

Lemme 4.1 *L'équation (4.1) a une solution $p_{u,v}$ unique dans $H_0^1(\Omega)\cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ vérifiant :*

$$\|p_{u,v}\|_{H_0^1(\Omega)}+\|p_{u,v}\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\leq \eta_5(\|u\|_{\mathcal{U}}+\|v\|_{\mathcal{U}}),$$

où η_5 est une fonction croissante : $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$. •

Démonstration
On a avec le théorème 3.1

$$\begin{aligned} \|\hat{y}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \max(\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)},\|y_v\|_{L^\infty(\Omega)}) \\ &\leq C_7(1+\|u\|_{\mathcal{U}}+\|v\|_{\mathcal{U}}) \end{aligned}$$

donc avec (2.4)

$$\begin{aligned} \|\phi'_y(.,\hat{y},v)\|_{L^s(\Omega)} &\leq (\|M_2\|_{L^s(\Omega)}+\|v\|_{\mathcal{U}})\eta_1(\|\hat{y}\|_{L^\infty(\Omega)}), \\ &\leq (\|M_2\|_{L^s(\Omega)}+\|v\|_{\mathcal{U}})\eta_1(C_7(1+\|u\|_{\mathcal{U}}+\|v\|_{\mathcal{U}})). \end{aligned}$$

Utilisant (2.6) on obtient une estimation similaire pour $\|L'_y(.,\tilde{y},v)\|_{L^s(\Omega)}$. La conclusion se déduit alors du Lemme 3.2. •

Introduisons maintenant le hamiltonien associé au problème (P) :

$$H(x,y,u,p) = L(x,y,u) - p\phi(x,y,u).$$

Proposition 4.1 *(Formulation hamiltonienne de la variation du critère) Soit u et v dans $\mathcal{K}$ et $p_{u,v}$ l'état adjoint intermédiaire associé. Alors*

$$J(y_v,v) = J(y_u,u) + \int_\Omega [H(.,y_u,v,p_{u,v}) - H(.,y_u,u,p_{u,v})]dx. \bullet$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} J(y_v,v) - J(y_u,u) &= \int_\Omega [L(.,y_v,v) - L(.,y_u,u)]dx \\ &= \int_\Omega [L(.,y_u,v) - L(.,y_u,u)]dx + \int_\Omega [L(.,y_v,v) - L(.,y_u,v)]dx \end{aligned}$$

D'après (4.1), la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_\Omega L'_y(.,\tilde{y},v)(y_v - y_u)dx &= \int_\Omega [A^\star p_{u,v} + \phi'_y(.,\hat{y},v)p_{u,v}](y_v - y_u)dx \\ &= \int_\Omega A(y_v - y_u)p_{u,v}dx + \int_\Omega \phi'_y(.,\hat{y},v)(y_v - y_u)p_{u,v}dx \\ &= \int_\Omega [\phi(.,y_u,u) - \phi(.,y_v,v)]p_{u,v}dx + \int_\Omega [\phi(.,y_v,v) - \phi(.,y_u,v)]p_{u,v}dx \\ &= \int_\Omega [\phi(.,y_u,u) - \phi(.,y_u,v)]p_{u,v}dx \end{aligned}$$

d'où le résultat. •

On considère maintenant un type de variation de u assez général . Soit ω une partie mesurable Ω ; on dira que v est une perturbation de u localisée sur ω si $v(x) = u(x)$ p.p. $x \in \Omega - \omega$.

D'après la proposition 4.1, on a bien évidemment :

$$J(y_v,v) = J(y_u,u) + \int_\omega [H(.,y_u,v,p_{u,v}) - H(.,y_u,u,p_{u,v})]dx.$$

Proposition 4.2 *Soit $\{v_k\}$ une suite dans $\mathcal{K}$ de variations de u localisées sur $\{w_k\}, w_k \subset \Omega$. On suppose que $mes(w_k) \to 0$ et que la restriction de v_k (notée encore v_k) sur w_k satisfait*

$$\sup_k \|v_k\|_{L^\infty(w_k)} \leq C < +\infty.$$

Alors les états et état adjoints associés : $y_k := y_{v_k}$ et $p_k := p_{u,v_k}$ convergent dans $H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ vers y_u et p_u. •

Remarque

Puisque ϕ ne dépend pas continûment de u, l'application $u \to y_u$ n'a pas de raison d'être continue, par exemple de $\mathcal{U}$ vers $H_0^1(\Omega)$. Néanmoins la proposition 4.2 établit un résultat de continuité qui utilise une métrique sur l'espace des contrôles explicitée plus loin.

Démonstration de la Proposition 4.2

D'après les hypothèses, $\{v_k\}$ est bornée dans $\mathcal{U}$. D'après le Théorème 3.1, $\{y_k\}$ est donc bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$. La compacité de l'injection $C^\alpha(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ permet d'extraire une sous-suite (notée encore $\{y_k\}$) telle que $y_k \to y$ dans $L^\infty(\Omega)$. Mais d'après (2.3) et (2.4), pour k assez grand :

$$\begin{aligned} |\phi(x, y_k(x), v_k(x))| &\leq M_1(x) + C_2\|v_k(x)\| \\ &+ (M_2(x) + C_3\|v_k(x)\|)\eta_1(2\|y\|_{L^\infty(\Omega)}) \end{aligned}$$

et donc, en posant $c(x) = \max(C, \|u(x)\|_U)$ et en distinguant le cas $x \in w_k$ et $x \in \Omega - w_k$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\phi(x, y_k(x), v_k(x))| \leq M_1(x) &+ C_2 c(x) \\ &+ (M_2(x) + C_3 c(x))\eta_1(2\|y\|_{L^\infty(\Omega)}). \end{aligned}$$

On a ainsi majoré $|\phi(x, y_k(x), v_k(x))|$ par une fonction de $L^s(\Omega)$ indépendante de k; par ailleurs, puisque $y_k \to y$ dans $L^\infty(\Omega)$ et que mes $(w_k) \to 0, \phi(x, y_k(x), v_k(x)) \to \phi(x, y(x), u(x))$ p.p. $x \in \Omega$. Le théorème de Lebesgue implique donc $\phi(., y_k, v_k) \to \phi(., y, u)$ dans $L^s(\Omega)$, donc $Ay_k \to Ay_u$ dans $L^s(\Omega)$, d'où la convergence de y_k vers y_u dans $H_0^1 \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ avec le Lemme 3.1.

La convergence de p_k se prouve par des arguments similaires. •

Soit $x_0 \in \Omega$ et $v \in K$. On dira que $\{v_k\}$ est une suite de variations de u localisées autour de x_0 associée à v si $\{v_k\}$ est une perturbation de u localisée sur $w_k(x_0)$ avec

$$w_k(x_0) = \{x \in \Omega; \|x - x_0\| \leq 1/k\}$$

et

$$v_k = v \quad \text{sur} \quad w_k(x_0).$$

Nous noterons $m_k(x_0) := mes(w_k(x_0))^{-1}$.

Proposition 4.3 *Soit $u \in \mathcal{K}$ et $v \in K$. Alors les variations de u localisées autour de x_0 et associées à v satisfont à*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} m_k(x_0)[J(y_k, v_k) - J(y_u, u)] &= H(x_0, y_u(x_0), v, p_u(x_0)) \\ &- H(x_0, y_u(x_0), u(x_0), p_u(x_0)), \end{aligned}$$

pour tout x_0 dans un ensemble $\Omega(u, v)$ qui est de mesure pleine dans Ω.•

La démonstration utilise la notion suivante : soit $f \in L^1(\Omega)$. On dira que $x_0 \in \Omega$ est un point de Lebesgue de f si $\lim_{k\to\infty} m_k(x_0) \int_{w_k(x_0)} f(x)dx = f(x_0)$. L'ensemble des points de Lebesgue de f est de mesure pleine dans Ω .

Démonstration de la proposition 4.3

D'après la proposition 4.2, on a

$$J(y_k, v_k) - J(y_u, u) = \int_{w_k(x_0)} [H(., y_v, v, p_k) - H(., y_u, u, p_k)]dx$$

où $p_k \to p_u$ dans $H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$, soit

$$\begin{aligned} J(y_k, v_k) - J(y_u, u) &= \int_{w_k(x_0)} [H(., y_u, v, p_u) - H(., y_u, u, p_u)]dx \\ &+ \int_{w_k(x_0)} \phi(., y_u, v)(p_u - p_k)dx \\ &+ \int_{w_k(x_0)} \phi(., y_u, u)(p_k - p_u)dx. \end{aligned}$$

Soit $\Omega(u, v)$ l'intersection des ensembles des points de Lebesgue des applications intégrables suivantes :

$$\begin{aligned} x &\to |\phi(x, y_u(x), v)|, \\ x &\to |\phi(x, y_u(x), u(x))|, \\ x &\to H(x, y_u(x), v, p_u(x)), \\ x &\to H(x, y_u(x), u(x), p_u(x)). \end{aligned}$$

Alors, si $x_0 \in \Omega(u, v)$ et puisque $p_k \to p_u$ dans $L^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & m_k(x_0) | \int_{w_k(x_0)} \phi(., y_u, v)(p_u - p_k)dx | \\ & \qquad \le m_k(x_0) \int_{w_k(x_0)} |\phi(., y_u, v)|dx \|p_u - p_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} & m_k(x_0) | \int_{w^k(x_0)} \phi(., y_u, u)(p_u - p_k)dx | \\ & \qquad \le m_k(x_0) \int_{w_k(x_0)} |\phi(., y_u, u)|dx \|p_u - p_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \lim_{k\to\infty} m_k(x_0)[J(y_k, v_k) - J(y_u, u)] \\ & \quad = \lim_{k\to\infty} m_k(x_0) \int_{w_k(x_0)} [H(., y_u, v, p_u) - H(., y_u, u, p_u)]dx \\ & \quad = H(x_0, y_u(x_0), v, p_u(x_0)) - H(x_0, y_u(x_0), u(x_0), p_u(x_0)). \end{aligned}$$

Mais $\Omega(u,v)$ est intersection de quatre ensembles de mesure pleine donc est de mesure pleine, d'où la proposition. •

Nous déduisons du résultat précédent un principe d'optimalité locale.

Théorème 4.1 *Soit $\bar{u}$ une solution* <u>*locale*</u> *dans $\mathcal{U}$ de (P). Alors, $\forall v \in K$ on a :*

$$H(.,y_{\bar{u}},\bar{u},p_{\bar{u}}) \leq H(.,y_{\bar{u}},v,p_{\bar{u}}), \quad p.p. \ sur \quad \Omega.\bullet$$

Démonstration

Soit $v \in K, x_0 \in \Omega$ et $\{v_k\}$ les variations de u localisées autour de x_0 associées à v. Alors $v_k \to \bar{u}$ dans $\mathcal{U}$, donc $J(y_k,v_k) \geq J(y_{\bar{u}},\bar{u})$ pour k assez grand. On conclut alors avec la proposition 4.3.•

Nous dirons qu'une solution locale vérifie le <u>principe de Pontryagine</u> si elle vérifie la relation

$$H(.,y_{\bar{u}},\bar{u},p_{\bar{u}}) = \min_{v\in K} H(.,y_{\bar{u}},v,p_{\bar{u}}), \text{p.p. sur} \quad \Omega.$$

Le principe de Pontryagine implique la conclusion du théorème 4.1. Nous allons énoncer des conditions plus forte que celles tu Théorème 4.1 impliquant le principe de Pontryagine.

Théorème 4.2 *Soit $\bar{u}$ une solution locale de (P) dans $\mathcal{U}$. On suppose qu'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ de mesure pleine tel qu'une des deux hypothèses ci-dessous est vérifiée :*

(i) $\forall v \in K$, l'ensemble des points de Lebesgue des applications $x \to \phi(x,y_{\bar{u}}(x),v), x \to |\phi(x,y_{\bar{u}}(x),v)|, x \to L(x,y_{\bar{u}}(x),v)$ contient Ω_0.

(ii) L'ensemble K est séparable et les applications ϕ et L sont continues par rapport à la troisième variable si $x \in \Omega_0$.

Alors $\bar{u}$ vérifie le principe de Pontryagine. •

<u>Remarque</u> L'hypothèse (i) est en particulier vérifiée si ϕ et L dépendent continûment de x. Par ailleurs l'ensemble K est séparable si U l'est, par exemple si $U = \mathbb{R}$.

Démonstration du Théorème 4.2

Dans le cas (i) on vérifie que l'ensemble $\Omega(u,v)$ qui est défini dans la démonstration de la proposition 4.3 contient Ω_0. On a donc

$$H(.,y_{\bar{u}},\bar{u},p_{\bar{u}}) \leq H(.,y_{\bar{u}},v,p_{\bar{u}}) \quad \text{sur} \quad \Omega_0,$$

donc

$$H(.,y_{\bar{u}},\bar{u},p_{\bar{u}}) = \min_{v\in K} H(.,y_{\bar{u}},v,p_{\bar{u}}) \quad \text{sur} \quad \Omega_0$$

d'où le principe de Pontryagine.

Dans le cas (ii), soit $\{v_k\}$ une suite d'éléments de K, dense dans K, et $\Omega_1 = \cap_k \Omega(u,v_k)$. Alors du théorème 4.1 on déduit que

$$H(.,y_{\bar{u}},\bar{u},p_{\bar{u}}) \leq H(.,y_{\bar{u}},v_k,p_{\bar{u}}) \quad \text{sur} \quad \Omega_1,$$

donc, le hamiltonien étant continu par rapport au contrôle sur Ω_0 :

$$H(.,y_{\bar{u}},\bar{u},p_{\bar{u}}) \leq H(.,y_{\bar{u}},v,p_{\bar{u}}), \forall v \in K, \quad \text{sur} \quad \Omega_1 \cap \Omega_0.$$

Mais Ω_1 est de mesure pleine (le complémentaire de Ω_1 est union dénombrable d'ensemble de mesure nulle) donc $\Omega_0 \cap \Omega_1$ également. •.

5 UN PRINCIPE DE PONTRYAGINE POUR LES SOLUTIONS APPROCHEES

Les hypothèses que nous avons faites au début de l'article n'impliquent pas l'existence d'une solution. Il est facile de le vérifier en considérant le cas particulier suivant :

$$\min \int_\Omega (y(x))^2 dx \quad ; \quad u(x) \in \{-1,+1\}, \text{p.p.} \quad x \in \Omega,$$

et (y,u) vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta y = u \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Le critère étant positif, l'infimum du problème est positif. Montrons qu'il est nul. Prenons une suite u_k de contrôles à valeurs dans $\{-1,+1\}$ convergeant faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ (c'est un exercice classique !). Alors y_{u_k} converge faiblement vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$ donc fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire $\int_\Omega (y_{u_k}(x))^2 dx \to 0$. L'infimum est donc bien 0 ; il n'est cependant visiblement jamais atteint.

Nous allons énoncer un principe de type Pontryagin pour certaines solutions approchées du problème (P). Nous dirons que $u \in \mathcal{U}$ est une ε-solution de (P) (avec $\varepsilon > 0$) si $J(y_u, u) \leq \inf(P) + \varepsilon$. Le résultat principal de cette section sera le

Théorème 5.1 *On suppose que* $\inf(P) \in I\!R$. *Alors* $\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0$, *il existe* $u_{\varepsilon,\alpha}$, ε^2-*solution de* (P), *tel que (notant* $y_{\varepsilon,\alpha} = y_{u_{\varepsilon,\alpha}}$ *et* $p_{\varepsilon,\alpha} = p_{u_{\varepsilon,\alpha}}$*) :*

$$H(.,y_{\varepsilon,\alpha},u_{\varepsilon,\alpha},p_{\varepsilon,\alpha}) \leq H(.,y_{\varepsilon,\alpha},v,p_{\varepsilon,\alpha}) + \varepsilon,$$
$$\forall v \in K, \|v\| \leq \alpha, p.p. \quad x \in \Omega. \bullet$$

La démonstration utilise de façon essentielle le

Théorème 5.2 *(dit principe d'Ekeland : voir [3], [4]) Soit* (E,d) *un espace métrique complet,* F *une application s.c.i. (semi-continue inférieurement) :* $E \to I\!R \cup \{+\infty\}$, *et soit* $e_\varepsilon \in E$ *tel que* $F(e_\varepsilon) \leq \inf(F) + \varepsilon^2$. *Alors il existe* $\bar{e}_\varepsilon$ *tel que*

$$F(\bar{e}_\varepsilon) \leq F(e_\varepsilon), d(e_\varepsilon, \bar{e}_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

et

$$F(\bar{e}_\varepsilon) \leq F(e) + \varepsilon d(e, \bar{e}_\varepsilon), \forall e \in E. \bullet$$

En vue de l'utilisation du théorème 5.2, introduisons l'espace suivant (où $\hat{u} \in \mathcal{K}$ et $\alpha > 0$ sont donnés) :

$$E_{\hat{u},\alpha} = \{u \in \mathcal{K}; \quad \text{si} \quad u(x) \neq \hat{u}(x), \quad \text{alors} \quad \|u(x)\| \leq \alpha, p.p. \quad x \in \Omega\},$$

que nous munissons de la métrique d'Ekeland

$$d(u,v) = mes\{x \in \Omega; v(x) \neq u(x)\}.$$

Lemme 5.1 *L'espace $(E_{\hat{u},\alpha}, d)$ est complet pour tout $(\hat{u}, \alpha)$ dans $\mathcal{K} \times I\!R^{+*}$ et l'application $u \to J(y_u, u)$ est continue de $E_{\hat{u},\alpha}$ vers $I\!R$.•*

Démonstration

On vérifie aisément que d est une distance sur $E_{\hat{u},\alpha}$. Soit $\{u_k\}$ une suite de Cauchy de $E_{\hat{u},\alpha}$. Il est clair qu'il existe une fonction u mesurable $\Omega \to U$ telle que $u_k(x) \to u(x) \in K$ et $\|u(x)\| \leq \alpha$ si $u(x) \neq \hat{u}(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$. Donc $\|u(x)\| \leq \|\hat{u}(x)\| + \alpha$ d'où $u \in \mathcal{U}$, $u \in \mathcal{K}$ et donc $u \in E_{\hat{u},\alpha}$ est limite de $\{u_k\}$, ce qui démontre que $(E_{\hat{u},\alpha}, d)$ est complet.

La continuité de $u \to J(y_u, u)$ dans $E_{\hat{u},\alpha}$ est une conséquence facile de la proposition 4.2 (qui implique la continuité de $u \to y_u$ de $E_{\hat{u},\alpha}$ vers $H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$) et de (2.5)-(2.6). •

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la

Démonstration du Théorème 5.1

Si $\inf(P) \in I\!R$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une ε^2-solution, soit u_ε. D'après le théorème 5.2 et le Lemme 5.1 pour tout $\alpha > 0$ il existe $u_{\varepsilon,\alpha}$ dans $E_{\hat{u},\alpha}$, ε^2-solution de (P) tel que

$$J(y_{\varepsilon,\alpha}, u_{\varepsilon,\alpha}) \leq J(y_u, u) + \varepsilon d(u, u_{\varepsilon,\alpha}), \forall u \in E_{u_\varepsilon,\alpha}. \tag{5.1}$$

Soit $\{v_k\}$ une suite de variations de $u_{\varepsilon,\alpha}$ localisées autour de x_0 et associées à $v \in K$ tel que $\|v\| \leq \alpha$. Si $v_k(x) \neq u_\varepsilon(x)$ on a soit $v_k(x) = u_{\varepsilon,\alpha}(x)$, soit $v_k(x) = v$; dans les deux cas $\|v_k(x)\| \leq \alpha$. Par ailleurs, $v \in K$, donc v_k est dans $E_{u_\varepsilon,\alpha}$. Prenons $u = v_k$ dans (5.1) ; de $d(v_k, u_{\varepsilon,\alpha}) \leq m_k(x_0)^{-1}$ on déduit que

$$m_k(x_0)[J(y_k, v_k) - J(y_{\varepsilon,\alpha}, u_{\varepsilon,\alpha})] \geq -\varepsilon,$$

d'où la conclusion avec la proposition 4.3. •

Nous aimerions obtenir la conclusion du théorème 5.1 avec $\alpha = +\infty$. Néanmoins l'espace $E_{u,\infty}$ n'est pas nécessairement complet (la limite ponctuelle d'une suite de Cauchy pourrait ne pas être intégrable). Même si on suppose $E_{u,\infty}$ complet, il faut des hypothèses supplémentaires pour que $u \to J(y_u, u)$ soit continue ou s.c.i. . Voici un résultat dans ce sens :

Proposition 5.1 *On suppose que les hypothèses (2.3) à (2.6) sont satisfaites aussi avec $C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ (ceci est en particulier vrai si K est borné). Alors la conclusion du théorème 5.1 reste valable si $\alpha = +\infty$.* •

Démonstration

On définit

$$\mathcal{K}_1 = \{u \quad \text{fonctions mesurables} \quad \Omega \to U; u(x) \in K, p.p. \quad x \in \Omega\}.$$

On vérifie aisément que $(\mathcal{K}_1, d)$ est complet. On montre avec (2.3)-(2.6) et l'hypothèse que l'application $u \to y_u$ est continue : $(\mathcal{K}_1, d) \to H_0^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$, et que $u \to J(y_u, u)$ est continue en appliquant le théorème de Lebesgue. Le résultat se démontre alors par les mêmes techniques. •

Bibliographie

[1] J.F. Bonnans, E. Casas, *Contrôle de systèmes elliptiques semi-linéaires comportant des contraintes distribuées sur l'état*, to appear in "Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France seminar Vol. VIII", H. Brezis and J.L. Lions eds.,69-86, Pitman, Harlow.

[2] J.F. Bonnans, E. Casas, *Optimal control of state constrained multistate systems*, SIAM J. Control Optimiz. 27 (1989), 446-455.

[3] I. Ekeland, *Sur les problèmes variationnels*, C.R. Acad. Sci. Paris 275, (1972), 1057-1059.

[4] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 1 (NS) (1979), 447-474.

[5] H.O. Fattorini, H. Frankowska, *Necessary conditions for infinite dimensional control problems*, in Lecture Notes in Control and Information Sciences 111 (1988), 381-392.

[6] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[7] A.D. Ioffe, V. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Nauka, Moscou, 1974 (en russe ; trad. anglaise : North Holland, 1979).

[8] M.A.Krasnosel'skii, P.P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis* Nauka, Moscou, 1975 (trad. anglaise : Springer, Berlin, 1984).

[9] O.A. Ladyzenskaja, N.N. Ural'ceva, *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*, Nauka, Moscou, 1964 (trad. française : Dunod, 1968).

[10] E.B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, J. Wiley, New York, 1967.

[11] J.L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[12] D.G. Luenberger, *Optimization by vector space methods*, J. Wiley, New York, 1979.

[13] J. Nečas, *Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques*, Acad. Sci. Prague, 1967.

[14] L.S. Pontryagine, V.G. Boltjanskii, R.V. Gamkelidze, E.F. Mishchenko, *Théorie mathématique des processus optimaux*, Fizmatgiz, Moscou, 1961,(en russe).

[15] U.E. Raitum, *Maximum principle in optimal control problems for elliptic equations* Zeit. Anal. Anw. 5 (1986), 291-306 (en russe).

[16] J.M. Rakotoson, *Réarrangement relatif dans les équations elliptiques quasi-linéaires avec un second membre distribution : application à un théorème d'existence et de régularité*, J. Diff. Equ. 66 (1987), 391-419.

[17] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 15 (1965), 189-258.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique