

Filtrage et lissage des systemes implicites discrets

Xiao-Min Wang, Pierre Bernhard

▶ **To cite this version:**

Xiao-Min Wang, Pierre Bernhard. Filtrage et lissage des systemes implicites discrets. [Rapport de recherche] RR-1083, INRIA. 1989. inria-00075476

HAL Id: inria-00075476
https://inria.hal.science/inria-00075476

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1083

Programme 5
Automatique, Productique,
Traitement du Signal et des Données

FILTRAGE ET LISSAGE DES SYSTEMES IMPLICITES DISCRETS

Xiao-Min WANG
Pierre BERNHARD

Août 1989

RR_1083

Filtrage et Lissage des Systèmes Implicites Discrets

Filtering and Smoothing of Discrete Time Implicit Systems

Xiao-Min WANG et Pierre BERNHARD
Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique
2004 route des Lucioles, Sophia-Antipolis
06565 Valbonne Cedex

Résumé

Nous considérons un système implicite singulier, c'est à dire dont le faisceau de matrices est singulier. On sait que la solution de tels systèmes peut ne pas exister, ou être non unique, ou non causale. On résoud divers problèmes d'estimation, du type filtrage et lissage, en faisant chaque fois les hypothèses adéquates pour que le problème ait un sens. Ainsi, il semble qu'un filtre récursif ne puisse exister que si les solutions du système sont causales. Par contre cette hypothèse n'est pas nécessaire si on se contente d'un filtre implicite de même structure que le système.

Abstract

We consider a singular implicit system, i.e. one for which the main matrix pencil is singular. It is known that for such systems, the solution may not exist, or may be non unique, or noncausal. We solve various estimation problems, like filtering and smoothing, making the required assumptions to make the problem meaningful. For instance, a true filter does not seem to be feasible if the system is not causal, while this hypothesis is not necessary if one only looks for an implicit filter with the same structure as the system itself.

Introduction

Nous nous intéressons au système implicite décrit par

$$Ex_{k+1} = Fx_k + \nu_k, \tag{1.1}$$

$$y_k = Hx_k + \omega_k, \tag{1.2}$$

où la matrice E peut être singulière.

De tels systèmes ont été largement étudiés depuis quelques années. Divers articles cités, en particulier [6] et [9], discutent des applications, qui convrent la commande P.I.D., les modèles économétriques (de Léontief), la discrétisation d'équations aux dérivées partielles, etc.

Dans le cas régulier (où $det(zE - F) \neq 0$), il existe déjà des résultats de structure intéressants concernant la solvabilité, la conditionabilité ([16]), la commandabilité, l'observabilité ([4], [9], [15], [25], [26]), l'accessibilité ([15]), la causalité ([25]), la stabilité ([19]) et la canonicité ([21]).

Contrairement à la plus part des auteurs, dans les articles [1], [3], [6], [7], [8], [13] et [25], on ne suppose pas que le système implicite soit régulier. On n'impose même pas que les matrices E et F soient carrées. Ainsi la solution du système peut ne pas exister, ou si elle existe ne pas être unique. Des résultats existent concernant l'existence de solutions (causales ou pas), les représentations externes, la théorie de la réalisation. L'article [8] traite de la commande optimale quadratique.

Dans cet article, qui constitue la suite logique de [8], on résout l'extension naturelle du problème de filtrage et de lissage aux systèmes implicites singuliers sous des hypothèses duales de celles utilisées en commande.

Le système implicite stochastique est décrit par (1.1),(1.2) où ν_k et ω_k sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance Q et R. Q est symétrique positive semi-définie, et R est symétrique positive définie. x_{k_0} est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\overline{x}_{k_0}$ et de covariance Σ_{k_0}.

Nous supposerons toujours satisfaite l'hypothèse suivante.

Hypothèse H)

1) $(E \quad V)$ est *surjective,*

2) $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ est *injective.*

1. Filtrage de Ex_k par Dualité

1.1. Principe de dualité

• Définition du problème

L'objectif du filtrage par dualité est de calculer, si elle existe, la prédiction $E\hat{x}_{k_1}$ de Ex_{k_1}, qui est linéaire en fonction de $y_{k_0}, y_{k_0+1}, \ldots, y_{k_1-1}$ et $\overline{x}_{k_0}$, telle que le critère

$$J = \mathcal{E}[a^T Ex_{k_1} - a^T E\hat{x}_{k_1}]^2, \tag{1.3}$$

soit minimum quel que soit a ($a \in \mathbf{R}^n$).

Comme $a^T E\hat{x}_{k_1}$ est linéaire en fonction de $y_{k_0}, y_{k_0+1}, \ldots, y_{k_1-1}$ et $\overline{x}_{k_0}$, nous avons, pour certains coefficients u_k et b qu'il faut déterminer,

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \overline{x}_{k_0}. \tag{1.4}$$

Proposition 1.1. *On peut choisir u_{k+1} et b de façon linéaire en fonction de a, de sorte que $E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} A_{k+1} y_k + B\overline{x}_{k_0}$, où A_{k+1} et B sont indépendants de a.*

Cette proposition sera démontrée dans la suite.

• Dualité

Afin de résoudre le problème du filtrage, nous introduisons une suite des vecteurs z_k décrits par

$$E^T z_{k-1} = F^T z_k + H^T u_k, \tag{1.5}$$

avec la condition initiale

$$z_{k_1} = a. \tag{1.6}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a^T E x_{k_1} &= z_{k_1}^T E x_{k_1} \\ &= z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T E x_{k+1} - z_k^T E x_k]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A partir des équations (1.1) et (1.5), nous avons

$$z_{k+1}^T E x_{k+1} = z_{k+1}^T F x_k + z_{k+1}^T \nu_k, \tag{1.8}$$

$$z_k^T E x_k = z_{k+1}^T F x_k + u_{k+1}^T H x_k. \tag{1.9}$$

En plaçant (1.8) et (1.9) dans (1.7), nous obtenons

$$a^T E x_{k_1} = z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T \nu_k - u_{k+1}^T H x_k]. \tag{1.10}$$

(1.2) et (1.4) donnent

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} [u_{k+1}^T H x_k + u_{k+1}^T \omega_k] + b^T \overline{x}_{k_0}. \tag{1.11}$$

(1.10) et (1.11) nous donnent

$$\begin{aligned} a^T E x_{k_1} - a^T E\hat{x}_{k_1} &= z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T \nu_k + u_{k+1}^T \omega_k] - b^T \overline{x}_{k_0}, \\ &= z_{k_0}^T E[x_{k_0} - \overline{x}_{k_0}] + [z_{k_0}^T E - b^T]\overline{x}_{k_0} \\ &\quad + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T \nu_k + u_{k+1}^T \omega_k]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Le critère (1.3) devient

$$J = [(z_{k_0}^T E - b^T)\overline{x}_{k_0}]^2 + z_{k_0}^T E \Sigma_{k_0} E^T z_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T Q z_{k+1} + u_{k+1}^T R u_{k+1}]. \qquad (1.13)$$

Pour minimiser le critère (1.13), nous devons choisir le vecteur $b = E^T z_{k_0}$. Le critère devient alors

$$J = z_{k_0}^T E \Sigma_{k_0} E^T z_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{k_1} (z_k^T Q z_k + u_k^T R u_k^T). \qquad (1.14)$$

Donc, nous avons le théorème 1.1.1 suivant.

Théorème 1.1. *Le problème du filtrage par dualité du système (1.1) et (1.2) avec le critère (1.3) est équivalent au problème de la commande optimale du système (1.5), (1.6) avec le critère quadratique (1.14).*

Celà montre aussi l'existence des suites $\{z_k\}$ et $\{u_k\}$ dans (1.5) avec le critère (1.14) par l'application des résultats sur la commande optimale, (cf [8]), qu'il ne nous reste plus qu'à utiliser.

• Solution du problème

1.2. Version non récursive

En remplaçant x par z, E par E^T, G par H^T, P par Σ, k par $k-1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ par $k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 1$, nous avons donc le théorème dual du théorème 2.6.1 de [8] pour le problème de filtrage.

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses* $(E \quad Q)$ *surjective et* $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *injective, la prédiction de* Ex_{k_1}, *minimisant (1.3) étant donné (1.1) et (1.2), s'écrit*

$$a^T E \hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \overline{x}_{k_0}.$$

les vecteurs u_k, *pour* $k = k_0+1, k_0+2, \ldots, k_1$, *sont déterminés en résolvant le problème de la commande optimale du système (1.5) avec la condition initiale (1.6) et la fonction-coût (1.14), et donc*

$$u_k = R^{-1} H \lambda_k, \qquad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2, \qquad (1.15)$$

$$\begin{pmatrix} z_{k-1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} = M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} z_k, \qquad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2, \qquad (1.16)$$

avec $z_{k_1} = a$, *où* M_{k-1} *est une matrice symétrique et inversible, définie par*

$$M_{k-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix}, \qquad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2, \qquad (1.17)$$

Σ_k est symétrique et positive semi-définie, donnée par

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} H \end{pmatrix} M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} + Q, \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2, \tag{1.18}$$

La condition finale pour (1.18) est

$$\Sigma_{k_0+1} = Q + F\Sigma_{k_0}F^T - F\Sigma_{k_0}H^T(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}H\Sigma_{k_0}F^T, \tag{1.19}$$

u_{k_0+1} s'écrit

$$u_{k_0+1} = -(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}F^T z_{k_0+1}. \tag{1.20}$$

Le vecteur b est

$$b = E^T z_{k_0} = F^T z_{k_0+1} + H^T u_{k_0+1}. \tag{1.21}$$

Preuve de la propostion 1.1

Par récurrence, il est clair que z_{k-1} et λ_k donnés par (1.16), pour $k = k_1$, $k_1 - 1$, ..., $k_0 + 2$, sont linéaires en fonction de z_{k_1}, ainsi u_k et b donnés par (1.15) et (1.21), pour $k = k_1$, $k_1 - 1$, ..., $k_0 + 2$, le sont aussi. La proposition est donc établie, puisque $z_{k_1} = a$. ■

1.3. Version récursive

La prédiction de Ex_k est décrite par (1.4)

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \overline{x}_{k_0}.$$

Si $k_1 > k_0 + 1$, en écrivant

$$M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-1} \\ B_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

dans (1.16), nous avons

$$z_{k-1} = A_{k-1} z_k \qquad \text{et} \qquad \lambda_k = B_{k-1} z_k. \tag{1.23}$$

Ainsi, nous pouvons écrire u_{k+1}, qui est défini par (1.15) pour $k = k_0 + 2, k_0 + 3, ..., k_1 - 1$, en fonction de z_{k_1}. Notons que $z_{k_1} = a$. Nous avons

$$\begin{aligned} u_{k_0+1} &= -(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}F^T z_{k_0+1} \\ &= -(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}F^T \Big(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i\Big) z_{k_1}, \\ u_{k_0+2} &= R^{-1}H\lambda_{k_0+2} \end{aligned}$$

$$= R^{-1}HB_{k_0+1}z_{k_0+2}$$

$$= R^{-1}HB_{k_0+1}(\prod_{i=k_0+2}^{k_1-1} A_i)z_{k_1},$$

.

.

.

$$u_{k_1-1} = R^{-1}HB_{k_1-2}z_{k_1-1} \tag{1.19}$$

$$= R^{-1}HB_{k_1-2}A_{k_1-1}z_{k_1-1} \tag{1.20}$$

$$u_{k_1} = R^{-1}HB_{k_1-1}z_{k_1}. \tag{1.24}$$

On en déduit

$$u_{k+1} = R^{-1}HB_k(\prod_{i=k+1}^{k_1-1} A_i)z_{k_1}. \qquad k = k_0+1, k_0+2, \ldots, k_1-1, \tag{1.25}$$

Nous pouvons également écrire b défini par (1.21) en fonction de z_{k_1}

$$b = F^T z_{k_0+1} + H^T u_{k_0+1},$$

$$= F^T(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i)z_{k_1} - H^T(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}F^T(\prod_{k_0+1}^{k_1-1} A_i)z_{k_1}$$

$$= [I - H^T(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}]F^T(\prod_{k_0+1}^{k_1-1} A_i)z_{k_1} \tag{1.26}$$

Donc, $a^T E\hat{x}_{k_1}$ prend la forme suivante

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = a^T(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i)^T F\Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}y_{k_0} \tag{1.22}$$

$$- a^T(\prod_{i=k_0+2}^{k_1-1} A_i)^T B_{k_0+1}^T H^T R^{-1}y_{k_0+1} \tag{1.23}$$

.

$$- a^T A_{k_1-1}^T B_{k_1-2}^T H^T R^{-1}y_{k_1-2}$$

$$- a^T B_{k_1-1}^T H^T R^{-1}y_{k_1-1}$$

$$- a^T(\prod_{k_0+1}^{k_1-1} A_i)^T F[I - \Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}H]\overline{x}_{k_0}. \tag{1.27}$$

Ainsi

$$E\hat{x}_{k_1} = (\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i)^T F\Sigma_{k_0}(R+H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}y_{k_0}$$
$$-(\prod_{i=k_0+2}^{k_1-1} A_i)^T B_{k_0+1}^T H^T R^{-1} y_{k_0+1}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$-A_{k_1-1}^T B_{k_1-2}^T H^T R^{-1} y_{k_1-2}$$
$$-B_{k_1-1}^T H^T R^{-1} y_{k_1-1}$$
$$-(\prod_{k_0+1}^{k_1-1} A_i)^T F[I-\Sigma_{k_0}(R+H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}H]\overline{x}_{k_0}$$
$$=\sum_{j=k_0+2}^{k_1-1}[(\prod_{i=j}^{k_1-1} A_i)^T B_{j-1}^T H^T R^{-1} y_{j-1}] + B_{k_1-1}^T H^T R^{-1} y_{k_1-1}$$
$$+(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i)^T F[\overline{x}_{k_0}+\Sigma_{k_0}(R+H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}(y_{k_0}-H\overline{x}_{k_0})]. \qquad (1.28)$$

Simultanément, nous avons la prédiction de $a^T E\hat{x}_{k_1+1}$

$$a^T E\hat{x}_{k_1+1} = z_{k_1+1}^T(\prod_{i=k_0+1}^{k_1} A_i)^T F\Sigma_{k_0}(R+H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}y_{k_0}$$
$$-z_{k_1+1}^T(\prod_{i=k_0+2}^{k_1} A_i)^T B_{k_0+1}^T H^T R^{-1} y_{k_0+1}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$-z_{k_1+1}^T(\prod_{k_1-1}^{k_1} A_i)^T B_{k_1-2}^T H^T R^{-1} y_{k_1-2}$$
$$-z_{k_1+1}^T A_{k_1}^T B_{k_1-1}^T H^T R^{-1} y_{k_1-1}$$
$$-z_{k_1+1}^T B_{k_1}^T H^T R^{-1} y_{k_1}$$
$$+z_{k_1+1}^T(\prod_{k_0+1}^{k_1} A_i)^T F[I-\Sigma_{k_0}(R+H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}H]\overline{x}_{k_0}. \qquad (1.29)$$

Notons que $z_{k_1+1}=a$, ainsi nous avons

$$E\hat{x}_{k_1+1} = A_{k_1}^T\{\sum_{j=k_0+2}^{k_1-1}[(\prod_{i=j}^{k_1-1} A_i)^T B_{j-1}^T H^T R^{-1} y_{j-1}] + B_{k_1-1}^T H^T R^{-1} y_{k_1-1}$$

$$+\Big(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i\Big)^T F[\overline{x}_{k_0} + \Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}(y_{k_0} - H\overline{x}_{k_0})]\} - B_{k_1}^T H^T R^{-1} y_{k_1}$$
$$= A_{k_1}^T E\hat{x}_{k_1} - B_{k_1}^T H^T R^{-1} y_{k_1}$$
$$= (A_{k_1}^T \quad B_{k_1}^T)\begin{pmatrix} E\hat{x}_{k_1} \\ -H^T R^{-1} y_{k_1} \end{pmatrix}$$
$$= (0 \quad F) M_{k_1}^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k_1} \\ -H^T R^{-1} y_{k_1} \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

On en déduit le filtre recursif

$$E\hat{x}_{k_1+1} = (0 \quad F) M_{k_1}^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k_1} \\ -H^T R^{-1} y_{k_1} \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Considérons maintenant $k_1 = k_0 + 1$, en remplaçant u_{k_0+1} par $-(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}F^T z_{k_0+1}$ et b par $F^T z_{k_0+1} - H^T(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}\Sigma_{k_0}F^T z_{k_0+1}$ dans (1.4), nous avons

$$E\hat{x}_{k_0+1} = F\overline{x}_{k_0} + F\Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}(y_{k_0} - H\overline{x}_{k_0}). \tag{1.32}$$

Notons que $z_{k_1} = z_{k_0+1} = a$.

Donc, on a démontré le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Sous l' hypothèse* **H)**, *il existe une prédiction linéaire optimale de* Ex_k *qui prend la forme recursive suivante:*

$$E\hat{x}_{k+1} = (0 \quad F) M_k^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}, \quad k > k_0,$$
$$E\hat{x}_{k_0+1} = F\overline{x}_{k_0} + F\Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}(y_{k_0} - H\overline{x}_{k_0}), \tag{1.33}$$

où M_k *est une matrice symétrique et inversible, definie par*

$$M_k = \begin{pmatrix} \Sigma_k & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix}, \quad k > k_0. \tag{1.34}$$

Σ_k *est symétrique et positive définie*

$$\Sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} M_k^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} \end{pmatrix} M_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} + Q, \quad k > k_0. \tag{1.35}$$

La condition initiale Σ_{k_0+1} *est donnée par*

$$\Sigma_{k_0+1} = F\Sigma_{k_0}F^T - F\Sigma_{k_0}H^T(R + H\Sigma_{k_0}H^T)^{-1}H\Sigma_{k_0}F^T + Q. \tag{1.36}$$

1.4. Cas $E = I$: le filtre de Kalman

Proposition 1.4. *Si E est la matrice identité, le théorème 1.1.3 se ramène au filtre de Kalman.*

Preuve

Comme dans l'équation (2.6.10) de [8] nous avons pour la matrice M_k définie par (1.4)

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} H^T\hat{R}^{-1}H & I - H^T\hat{R}^{-1}H\Sigma_k \\ I - \Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}H & \Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}H\Sigma_k - \Sigma_k \end{pmatrix}, \tag{1.37}$$

où $\hat{R}^{-1} = (R + H\Sigma_k H^T)^{-1}$. La prédiction de x_{k+1} définie dans le théorème 1.1.3 devient

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (0 \quad F)\, M_k^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix} \\ &= F\,(\, I - \Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}H \quad \Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}H\Sigma_k - \Sigma_k\,) \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Notons que

$$\begin{aligned} [\Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}H\Sigma_k - \Sigma_k]H^T R^{-1} &= \Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}[H\Sigma_k H^T - (R + H\Sigma_k H^T)]R^{-1} \\ &= -\Sigma_k H^T\hat{R}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

On en déduit donc le filtre de Kalman

$$\hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + F\Sigma_k(R + H\Sigma_k H^T)^{-1}(y_k - H\hat{x}_k). \tag{1.40}$$

Ainsi, la proposition est établie. ■

1.5. Résultat asymptotique

Simultanément, le problème du fitrage en faisant tendre l'intervalle $k_1 - k_0$ vers l'infini est résolu par la dualité du problème de la commande à temps final infini.

On conclut le théorème suivant.

Théorème 1.5. *On suppose le système dual $E^T z_{k-1} = F^T z_k + H^T u_k$ stablisable et détectable par Q. Alors la solution Σ_k des équations (1.35)(1.36) converge vers l'unique solution positive semi-définie de l'équation de Riccati suivante:*

$$\overline{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T \overline{M} \begin{pmatrix} \overline{\Sigma} & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} H \end{pmatrix} \overline{M} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T + Q. \tag{1.41}$$

où

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{\Sigma} & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix}$$

. *Le filtre asymptotique est donné par*

$$E\hat{x}_{k+1} = (0 \quad F)\overline{M}^{-1}\begin{pmatrix} E\hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

2. Filtrage Complet de x_k

• Définition du système

Pour des raisons de commodité, nous sommes amenés à modifier légèrement les notations. Le système implicite stochastique linéaire sera décrit par

$$E^0 x^0_{k+1} = F^0 x^0_k + V^0 \nu^0_k, \tag{2.1}$$
$$y^0_k = H^0 x^0_k + \omega^0_k, \tag{2.2}$$

où, ν^0_k et ω^0_k sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & R^0 \end{pmatrix}$. R est positive définie. L'état initial x_0 est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\overline{x}^0_0$ et de convariance Σ^0_0.

Nous allons présenter la théorie du filtrage complet de x^0_k sous l'hypothèse **H)** et l'hypothèse complémentaire que le système admet des solutions causales, (au sens de [6]), pour toute suite $\{v^0_k\}$.

2.1. Transformation du système

En faisant des changements de base dans l'espace d'état $x^0_k = A_1 \begin{pmatrix} x^1_1(k) \\ x^1_2(k) \end{pmatrix}$ et dans le domaine de l'équation (2.1) et en écivant $B_1 E^0 A_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 V^0 = \begin{pmatrix} V^1_1 \\ V^1_2 \end{pmatrix}$ et $H^0 A_1 = (H^1_1 \quad H^1_2)$ avec A_1 et B_1 régulières, le système (2.1) et (2.2) prend la forme suivante

$$x^1_1(k+1) = F^1_1 x^1_1(k) + F^1_2 x^1_2(k) + V^1_1 \nu^0_k, \tag{2.3}$$
$$0 = F^1_3 x^1_1(k) + F^1_4 x^1_2(k) + V^1_2 \nu^0_k, \tag{2.4}$$
$$y^0_k = H^1_1 x^1_1(k) + H^1_2 x^1_2(k) + \omega^0_k. \tag{2.5}$$

Sous l'hypothèse $(E^0 \quad V^0)$ surjective, c'est-à-dire $\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V^1_1 \\ V^1_2 \end{pmatrix}\right)$ surjective, nous avons V^1_2 surjective, ainsi il existe A_2 inversible, telle que $V^1_2 A_2 = (0 \quad I)$. En écrivant $\nu^0_k = A_2 \nu^1_k$ et en décomposant $\nu^1_k = \begin{pmatrix} \nu^1_1(k) \\ \nu^1_2(k) \end{pmatrix}$ et $V^1_1 A_2 = (V^2_1 \quad V^2_2)$ dans (2.3) et (2.4), nous obtenons

$$x^1_1(k+1) = F^1_1 x^1_1(k) + F^1_2 x^1_2(k) + V^2_1 \nu^1_1(k) + V^2_2 \nu^1_2(k), \tag{2.6a}$$
$$0 = F^1_3 x^1_1(k) + F^1_4 x^1_2(k) + \nu^1_2(k), \tag{2.6b}$$

avec $\mathcal{E}(\nu_k^1 \nu_k^{1T}) = A_2^{-1} A_2^{-T} = Q^1 = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_{12}^1 \\ Q_{21}^1 & Q_2^1 \end{pmatrix}$ positive définie.

Remarquons que le problème de filtrage du système implicite n'a de sens que s'il existe des solutions causales au sens de l'article [6].

Remarque 2.1. *Sous l'hypothèse* $(E^0 \quad V^0)$ *surjective, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des solutions causales au système (2.1) quel que soit* $\nu^0(\cdot)$ *est que* F_4^1 *dans (2.6) soit surjective.*

Preuve

La condition nécessaire et suffisante pour cette existence est (voir [6])

$$Im V^0 \subset E^0 \mathcal{V}^* + F^0 Ker E^0, \tag{2.7}$$

où $\mathcal{V}^*$ est le sous espace maximum satisfaisant $F^0 \mathcal{V}^* \subset E^0 \mathcal{V}^*$ avec

$$E^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^0 = \begin{pmatrix} F_1^1 & F_2^1 \\ F_3^1 & F_4^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V^0 = \begin{pmatrix} V_1^2 & V_2^2 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ une matrice engendrant $\mathcal{V}^*$, (2.7) s'ecrit

$$Im \begin{pmatrix} V_1^2 & V_2^2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \subset Im \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} + Im \begin{pmatrix} F_2^1 \\ F_4^1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Donc F_4^1 surjective est nécessaire.

Réciproquement, si F_4^1 est surjective, la forme (2.6) du système montre qu'il existe des solutions causales quel que soit $\nu^0(\cdot)$. ■

Ainsi, il existe A_3 inversible telle que $F_4^1 A_3 = (-I \quad 0)$ car F_4^1 est surjective.

En écrivant $x_1^1(k) = x_1^2(k)$, $x_2^1(k) = A_3 \begin{pmatrix} x_2^2(k) \\ x_3^2(k) \end{pmatrix}$, $F_1^1 = F_1^2$, $F_2^1 A_3 = (F_2^2 \quad F_3^2)$, $F_3^1 = F_4^2$, $H_1^1 = H_1^2$ et $H_2^1 A_3 = (H_2^2 \quad H_2^3)$ dans (2.6), (2.7) et (2.5), nous avons

$$x_1^2(k+1) = F_1^2 x_1^2(k) + F_2^2 x_2^2(k) + F_3^2 x_3^2(k) + V_1^2 \nu_1^1(k) + V_2^2 \nu_2^1(k), \tag{2.9}$$

$$0 = F_4^2 x_1^2(k) - x_2^2(k) + \nu_2^1(k), \tag{2.10}$$

$$y_k^0 = H_1^2 x_1^2(k) + H_2^2 x_2^2(k) + H_3^2 x_3^2(k) + \omega_k^0. \tag{2.11}$$

Sous l'hypothèse $\begin{pmatrix} E^0 \\ H^0 \end{pmatrix}$ injective, $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (H_1^2 \quad H_2^2 \quad H_3^2) \end{pmatrix}$ l'est, ainsi H_3^2 l'est. Il existe donc B_1 inversible, telle que $B_1 H_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$.

En multipliant l'équation (2.11) à gauche par B_1 et en écrivant $B_1 y_k^0 = y_k^1 = \begin{pmatrix} y_1^1(k) \\ y_2^1(k) \end{pmatrix}$, $B_1 \omega_k^0 = \omega_k^1$ et $B_1 (H_1^2 \quad H_2^2 \quad H_3^2) = (H_1^3 \quad H_2^3 \quad H_3^3)$, l'équation (2.11) devient

$$y_k^1 = H_1^3 x_1^2(k) + H_2^3 x_2^2(k) + H_3^3 x_3^2(k) + \omega_k^1, \tag{2.12}$$

où $H_3^3 = B_1 H_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ et $\mathcal{E}(\omega_k^1 \omega_k^{1T}) = B_1 R^0 B_1^T = R^1 > 0$.

En remplaçant $\nu_2^1(k)$ dans (2.9) par son expression, $\nu_2^1(k) = -F_4^2 x_1^2(k) + x_2^2(k)$, prise dans (2.10), (2.9) devient

$$x_1^2(k+1) = (F_1^2 - V_2^2 F_4^2) x_1^2(k) + (F_2^2 + V_2^2) x_2^2(k) + F_3^2 x_3^2(k) + V_1^2 \nu_1^1(k), \tag{2.13}$$

et en posant $F_1^2 - V_2^2 F_4^2 = F_1^3$, $F_2^2 + V_2^2 = F_2^3$ et $F_3^2 = F_3^3$, nous avons

$$x_1^2(k+1) = F_1^3 x_1^2(k) + F_2^3 x_2^2(k) + F_3^3 x_3^2(k) + V_1^2 \nu_1^1(k). \tag{2.14}$$

A l'instant $k+1$, l'équation (2.10) s'écrit

$$x_2^2(k+1) = F_4^2 x_1^2(k+1) + \nu_2^1(k+1). \tag{2.15}$$

En substituant (2.14) dans (2.15) et en écrivant $F_4^2 F_1^3 = F_4^3$, $F_4^2 F_2^3 = F_5^3$, $F_4^2 F_3^3 = F_6^3$ et $F_4^2 V_1^2 = V_2^2$, nous obtenons

$$x_2^2(k+1) = F_4^3 x_1^2(k) + F_5^3 x_2^2(k) + F_6^3 x_3^2(k) + V_2^2 \nu_1^1(k) + \nu_2^1(k+1). \tag{2.16}$$

En regroupant (2.15), (2.16) et (2.12), et en écrivant

$$x_k^* = \begin{pmatrix} x_1^*(k) \\ x_2^*(k) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1^2(k) \\ x_2^2(k) \end{pmatrix} \right), \; y_k^* = y_k^1, \; \nu_k^* = \begin{pmatrix} \nu_1^1(k) \\ \nu_2^1(k+1) \end{pmatrix}, \; \omega_k^* = \omega_k^1,$$

$$F^* = (\, F_1^* \quad F_2^* \,) = \left(\begin{pmatrix} F_1^3 & F_2^3 \\ F_4^3 & F_5^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_3^3 \\ F_6^3 \end{pmatrix} \right), \; V^* = \begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ V_2^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^2 & 0 \\ V_2^2 & I \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$H^* = \left(\begin{pmatrix} H_1^* \\ H_2^* \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right) = (\, (\, H_1^3 \quad H_2^3 \,) \quad H_3^3 \,), \text{ on en conclut la proposition suivante.}$$

Proposition 2.1. *Sous l'hypothèse* **H)**, *si le système (2.1)-(2.2) admet des solutions causales au sens de l'article* [6], *il peut se mettre sous la forme suivante*

$$x_1^*(k+1) = F^* x_k^* + V^* \nu_k^*, \tag{2.17}$$

$$y_k^* = H^* x_k^* + \omega_k^*, \tag{2.18}$$

avec

$$Q^* = \mathcal{E}(\nu_k^* \nu_k^{*T}) = \begin{pmatrix} Q_{11}^1 & 0 \\ 0 & Q_{22}^1 \end{pmatrix}, \; S_1^* = \mathcal{E}(\nu_{k+1}^* \nu_k^{*T}) = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_2^* = \mathcal{E}(\nu_{k+2}^* \nu_k^{*T}) = 0,$$

$$R^* = \mathcal{E}(\omega_k^* \omega_k^{*T}) = B_1 R^0 B_1^T, \; x_k^* = x_k^2 = \begin{pmatrix} x_1^1(k) \\ A_3^{-1} x_2^1(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix} A_1^{-1} x^0(k), \; \Sigma_0^* =$$

$$\mathcal{E}(x_0^* x_0^{*T}) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix} \Sigma_0 A_3^{-T} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}^T, \; F^* = (\, F_1^* \quad F_2^* \,), \; V^* = \begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ V_2^* & I \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} H_1^* & 0 \\ H_2^* & I \end{pmatrix}.$$

2.2. Représentation markovienne d'une suite corrélée

• Rappels sur la propriété de Markov

La propriété de Markov pour une suite temporelle ou un processus stochastique est très classique, on en rappelle la définition et le théorème sur le caractère markovien d'une suite gaussienne (voir [12]).

Définition 2.2. *La série temporelle $x(\cdot)$ est markovienne si et seulement si pour toute suite $\{k_i;\ k > k_1 > ... > k_i > ...\}$, les lois conditionnelles*

$$\mathcal{L}\{x_k|x_{k_1},...,x_{k_i}\} \quad et \quad \mathcal{L}\{x_k|x_{k_1}\}$$

sont identiques.

Théorème 2.2. *La propriété de Markov d'une suite gaussienne $x(\cdot)$ est caractèrisée par chacune des deux propriétés équivalentes suivantes*

1) $\mathcal{E}(x_k|x_{k_1},...,x_{k_i}) = \mathcal{E}(x_k|x_{k_1}), \forall k \geq k_1 \geq ... \geq k_i$;

2) la suite $x(\cdot)$ est régie par une équation récurrente de la forme

$$x_{k+1} = Fx_k + \nu_k,$$

où $\nu(\cdot)$ est un bruit blanc indépendant de x_0.

• Représentation markovienne d'une suite corrélée

On étudie maintenant la présentation markovienne du système (2.17)-(2.18), avec le bruit $\nu(\cdot)$ corrélé, selon [12].

Proposition 2.2. *Avec des changements de base de l'état $x^*(\cdot)$ et du bruit $\nu^*(\cdot)$ et de notation, le système (2.17)-(2.18) peut se mettre sous la forme suivante*

$$x_1(k+1) = Fx_k + V\nu_k, \tag{2.19}$$

$$y_k = Hx_k + \omega_k, \tag{2.20}$$

où $\nu(\cdot)$ et $\omega(\cdot)$ sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ qui est positive définie.

Preuve

• On écrit l'équation (2.17) sous la forme

$$x_1^*(k+1) = F^*x_k^* + \rho_k, \tag{2.21}$$

$$\rho_{k+1} = A\rho_k + B\nu_k^*, \tag{2.22}$$

où A et B sont des matrices à déterminer, telles que

$$P = \mathcal{E}(\rho_k\rho_k^T) = \mathcal{E}(V^*\nu_k^*\nu_k^{*T}V^*) = V^*Q^*V^{*T}, \tag{2.23}$$

$$P_1 = \mathcal{E}(\rho_{k+1}\rho_k^T) = \mathcal{E}(V^*\nu_{k+1}^*\nu_k^{*T}V^{*T}) = V^*S_1^*V^{*T}, \tag{2.24}$$

$$P_2 = \mathcal{E}(\rho_{k+2}\rho_k^T) = \mathcal{E}(V^*\nu_{k+2}^*\nu_k^{*T}V^{*T}) = V^*S_2^*V^{*T} = 0. \tag{2.25}$$

De plus, l'équation (2.22) nous donne

$$P = APA^T + BB^T, \tag{2.26}$$
$$P_1 = AP, \tag{2.27}$$
$$P_2 = AAP. \tag{2.28}$$

Ainsi, nous avons

$$V^*Q^*V^{*T} = AV^*Q^*V^{*T}A^T + BB^*, \tag{2.29}$$
$$V^*S_1^*V^{*T} = AV^*Q^*V^{*T}, \tag{2.30}$$
$$AAV^*Q^*V^{*T} = 0. \tag{2.31}$$

• En décomposant $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ et en remplaçant V^*, S_1^* et Q^* par (2.18),(2.19) et (2.20), l'équation (2.30) devient

$$\begin{pmatrix} 0 & V_1^*Q_{12}^1 \\ 0 & V_2^*Q_{12}^1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A_{11}V_1^*Q_{11}^1V_1^{*T} + A_{12}V_2^*Q_{11}^1V_1^{*T} & A_{11}V_1^*Q_{11}^1V_2^{*T} + A_{12}V_1^*Q_{11}^1V_2^{*T} + A_{12}Q_{22}^1 \\ A_{21}V_1^*Q_{11}^1V_1^{*T} + A_{22}V_2^*Q_1^1V_1^{*T} & A_{21}V_1^*Q_{11}^1V_2^{*T} + A_{22}V_2^*Q_{11}^1V_2^{*T} + A_{22}Q_{22}^1 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Ainsi, l'équation (2.32) nous conduit à

$$(A_{11}V_1^* + A_{12}V_2^*)Q_{11}^*V_1^{*T} = 0, \tag{2.33}$$
$$(A_{11}V_1^* + A_{12}V_2^*)Q_{11}^*V_2^{*T} + A_{12}Q_{22}^* = V_1^*Q_{12}^1, \tag{2.34}$$
$$(A_{21}V_1^* + A_{22}V_2^*)Q_{11}^*V_1^{*T} = 0, \tag{2.35}$$
$$(A_{21}V_1^* + A_{22}V_2^*)Q_{11}^*V_2^{*T} + A_{22}Q_{22}^* = V_2^*Q_{12}^1. \tag{2.36}$$

Rappelons que $V_2^* = V_2^2 = F_4^2V_1^2 = F_4^2V_1^*$, l'équation (2.33) s'écrit

$$(A_{11} + A_{12}F_4^2)V_1^*Q_{11}^*V_1^{*T} = 0, \tag{2.37}$$

nous obtenons

$$(A_{11} + A_{12}F_4^2)V_1^*Q_{11}^*V_1^{*T}(A_{11} + A_{12}F_4^2)^T = 0, \tag{2.38}$$

où $Q_{11}^* > 0$, donc

$$(A_{11} + A_{12}F_4^2)V_1^* = 0, \tag{2.39}$$

soit

$$A_{11}V_1^* + A_{12}V_2^* = 0. \tag{2.40}$$

Simultalément, (2.35) implique

$$A_{21}V_1^* + A_{22}V_2^* = 0. \tag{2.41}$$

Les équations (2.34) et (2.36) deviennent

$$A_{12}Q_{22}^{*} = V_1^{*}Q_{12}^{1}, \tag{2.42}$$
$$A_{22}Q_{22}^{*} = V_2^{*}Q_{12}^{1}. \tag{2.43}$$

Donc, les matrices A_{12} et A_{22} sont déterminées par (2.42) et (2.43)

$$A_{12} = V_1^{*}Q_{12}^{1}Q_{22}^{-*}, \tag{2.44}$$
$$A_{22} = V_2^{*}Q_{12}^{1}Q_{22}^{-*}. \tag{2.45}$$

Les matrices A_{11} et A_{21} sont données par (2.40) et (2.41).

Remarquons qu'il existe toujours des solutions pour A_{11} et A_{21}, en fait $V_2^{*} = F_4^2 V_1^{*}$, nous pouvons prendre

$$A_{11} + A_{12}F_4^2 = 0, \tag{2.46}$$
$$A_{21} + A_{22}F_4^2 = 0, \tag{2.47}$$

dans (2.40) et (2.41), nous avons donc

$$A_{11} = -A_{12}F_4^2, \tag{2.48}$$
$$A_{21} = -A_{22}F_4^2. \tag{2.49}$$

La matrice A est déterminée. ■

• Nous allons maintenant calculer la matrice B.

En écrivant $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, l'équation (2.29) devient

$$\begin{pmatrix} V_1^{*}Q_{11}^{1}V_1^{*T} & V_1^{*}Q_{11}^{1}V_2^{*T} \\ V_2^{*}Q_{11}^{1}V_1^{*T} & V_2^{*}Q_{11}^{1}V_2^{*T} + Q_{22}^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{*}Q_{12}^{1}A_{12}^{T} & V_1^{*}Q_{12}^{1}A_{22}^{T} \\ V_2^{*}Q_{12}^{1}A_{12}^{T} & V_2^{*}Q_{12}^{1}A_{22}^{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1B_1^{T} & B_1B_2^{T} \\ B_2B_1^{T} & B_2B_2^{T} \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

En remplaçant A_{12} et A_{22} par (2.44) et (2.45) dans (2.50), on a

$$\begin{pmatrix} B_1B_1^{T} & B_1B_2^{T} \\ B_2B_1^{T} & B_2B_2^{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{*}\Delta V_1^{*T} & V_1^{*}\Delta V_2^{*T} \\ V_2^{*}\Delta V_1^{*T} & V_2^{*}\Delta V_2^{*T} + Q_{22}^{1} \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

où $\Delta = Q_{11}^{1} - Q_{12}^{1}(Q_{22}^{1})^{-1}Q_{21}^{1}$.

Remarquons que $Q^{1} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{1} & Q_{12}^{1} \\ Q_{21}^{1} & Q_{22}^{1} \end{pmatrix} = A_2^{-1}A_2^{-T} > 0$, donc Q_{11}^{1}, Q_{22}^{1} et Δ sont positives définies, nous pouvons écrire

$$Q_{11}^{1} = C_1C_1^{T}, Q_{22}^{1} = C_2C_2^{T} et \Delta = CC^{T}. \tag{2.52}$$

Ainsi, (2.51) s'écrit

$$\begin{pmatrix} B_1B_1^{T} & B_1B_2^{T} \\ B_2B_1^{T} & B_2B_2^{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{*}CC^{T}V_1^{*T} & V_1^{*}CC^{T}V_2^{*T} \\ V_2^{*}CC^{T}V_1^{*T} & V_2^{*}CC^{T}V_2^{*T} + C_2C_2^{T} \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Donc, la matrice B est déterminée par

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^* C & 0 \\ V_2^* C & C_2 \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

• Les équations (2.32) et (2.30) nous conduisent à

$$AV^*Q^*V^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & V_1^* Q_{12}^1 \\ 0 & V_2^* Q_{12}^1 \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

notons que $A_{11}V_1^* + A_{12}V_2^* = 0$ et $A_{21}V_1^* + A_{22}V_2^* = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_2 &= AAV^*Q^*V^{*T} \\ &= A \begin{pmatrix} 0 & V_1^* Q_{12}^1 \\ 0 & V_2^* Q_{12}^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (A_{11}V_1^* + A_{12}V_2^*)Q_{12}^1 \\ 0 & (A_{21}V_1^* + A_{22}V_2^*)Q_{12}^1 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

L'equation (2.31) est vérifiée.

• En posant $x_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(k) \\ \rho_k \end{pmatrix} \\ x_2^*(k) \end{pmatrix}$, $\nu_k = \nu_k^*$, $y_k = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = y_k^*$, $\omega_k = (\omega_1(k) \quad \omega_2(k)) = \omega_k^*$, $F = (F_1 \quad F_2) = \left(\begin{pmatrix} F_1^* & I \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_2^* \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$, $Q = Q^*$, $R = R^*$ et $H = (H_1 \quad H_2) = \left(\begin{pmatrix} H_1^* & 0 \\ H_2^* & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right)$, nous aboutissons à la proposition 1.2.2. ■

2.3. Filtrage de x_k

Le système (2.19)-(2.20) sécrit

$$x_1(k+1) = Fx_k + V\nu_k, \tag{2.57a}$$

$$y_1(k) = H_1 x_1(k) + \omega_1(k), \tag{2.57b}$$

$$y_2(k) = H_2 x_1(k) + x_2(k) + \omega_2(k). \tag{2.57c}$$

La covariance de ν_k, $\omega_1(k)$ et $\omega_2(k)$ est $\begin{pmatrix} Q & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

L'objectif du filtrage est de calculer $\hat{x}_k = \mathcal{E}[x_k | y_0, \ldots, y_k]$. Nous noterons $\tilde{x}_k$ l'erreur $x_k - \hat{x}_k$ et Σ_k sa covariance (voir [7]).

Supposons $\hat{x}_k$ et Σ_k déjà déterminés.

• (2.57a) et (2.57b) nous permettent alors de calculer $\hat{x}_1(k+1)$ par un filtre de Kalman classique.

Par contre, l'équation (2.57c) ne peut pas être utilisée, en effet, la connaissance de $y_2(k+1)$ ne donne aucunne information supplémentaire sur $\hat{x}_1(k+1)$, parceque $x_2(k+1)$ est totalement arbitraire. (Formellement, nous pouvons lui donner une covariance infinie ce qui annule le coefficient du terme en $y_2(k+1) - \overline{y}_2(k+1)$.)

Etant donné $\{y(0), \ldots, y_k\}$, les moyennes et les covariances de $x_1(k+1)$ et $y_1(k+1)$ sont

$$\overline{x}_1(k+1) = F\hat{x}_k, \tag{2.58a}$$

$$\overline{y}_1(k+1) = H_1 F\hat{x}_k, \tag{2.58b}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}_{k+1} &= \begin{pmatrix} F\Sigma_k F^T + VQV^T & F\Sigma_k F^T H_1^T + VQV^T H_1^T \\ H_1 F\Sigma_k F^T + H_1 VQV^T & H_1 F\Sigma_k F^T H_1^T + H_1 VQV^T H_1^T + R_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\Sigma}_{11}(k+1) & \overline{\Sigma}_{12}(k+1) \\ \overline{\Sigma}_{21}(k+1) & \overline{\Sigma}_{22}(k+1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Etant donné $\{y(0), \ldots, y_{k+1}\}$, la moyenne et la covariance de $x_1(k+1)$ sont

$$\hat{x}_1(k+1) = \overline{x}_1(k+1) + K_{k+1}[y_1(k+1) - \overline{y}_1(k+1)], \tag{2.60}$$

$$\Sigma_1(k+1) = \overline{\Sigma}_{11}(k+1) - \overline{\Sigma}_{12}(k+1)\overline{\Sigma}_{22}^{-1}(k+1)\overline{\Sigma}_{21}(k+1), \tag{2.61}$$

où

$$K_{k+1} = \overline{\Sigma}_{12}(k+1)\overline{\Sigma}_{22}^{-1}(k+1). \tag{2.62}$$

$\overline{\Sigma}_{22}$ est définie positive, puisque R_1 est définie positive.

• (2.57c) nous donne $\hat{x}_2(k+1)$:

$$\hat{x}_2(k+1) = y_2(k+1) - H_2\hat{x}_1(k+1). \tag{2.63}$$

• L'erreur $\tilde{x}_{k+1}$ et sa covariance Σ_{k+1} sont

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k+1} &= \begin{pmatrix} I \\ -H_2 \end{pmatrix} \tilde{x}_1(k+1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \omega_2(k+1) \\ &= \overline{A}\tilde{x}_k + \overline{B}\nu_k + \overline{C}\omega_{k+1}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\Sigma_{k+1} = \overline{A}\Sigma_k\overline{A}^T + \overline{B}Q\overline{B}^T + \overline{C}R\overline{C}^T,$$

où $\overline{A} = \begin{pmatrix} I \\ -H_2 \end{pmatrix}[I - K_{k+1}H]F$, $\overline{B} = \begin{pmatrix} I \\ -H_2 \end{pmatrix}[I - K_{k+1}H]V$ et

$\overline{C} = \left(-\begin{pmatrix} I \\ H_2 \end{pmatrix} K_{k+1} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \right)$.

On en conclut le théorème suivant.

Théorème *Sous l'hypothèse H), si le système (2.1)-(2.2) admet des solutions causales, il peut se mettre sous la forme (2.57) et nous avons le filtre suivant*

$$\hat{x}_{k+1} = \overline{F}\hat{x}_k + \overline{K}_{k+1}(y_{k+1} - \overline{H}\hat{x}_k), \tag{2.65}$$

avec $\hat{x}_0 = \overline{x}_0$, *où* $\overline{F} = \begin{pmatrix} I \\ H_2 \end{pmatrix} F$, $\overline{K}_{k+1} = \begin{pmatrix} K_{k+1} & 0 \\ H_2 K_{k+1} & I \end{pmatrix}$ *et* $\overline{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *La covariance d'erreur est donnée par*

$$\Sigma_{k+1} = \overline{A}\Sigma_k \overline{A}^T + \overline{B}Q\overline{B}^T + \overline{C}R\overline{C}^T, \tag{2.66}$$

où

$$K_{k+1} = [F\Sigma_k F^T H_1^T + VQV^T H_1^T][H_1 F\Sigma_k F^T H_1^T + H_1 VQV^T H_1^T + R_1]^{-1}. \tag{2.67}$$

Les équations du filtre sont récurrentes.

Donc, le problème du filtrage du système implicite est résolu.

3. Lissage de x_k

Pour le système stochastique implicite (1.1)-(1.2), nous considérons les trois types de lissage suivants.

3.1. Lissage à point fixe

• Définition du problème

Nous étudions l'estimation optimale $\hat{x}_{j/k}$ de l'état x_j à l'instant j fixé pour tout $k > j$, c'est-à-dire

$\hat{x}_{j/k} = \mathcal{E}\{x_j / y_1, y_2, ..., y_k\}$, $\forall k > j$ et j fixé.

• Modélisation

Nous utilisons une méthode consistant à créer un nouveau modèle d'état augmenté, qui est aussi un système implicite, puis à appliquer les méthodes du filtrage présentées dans les chapitres précédents.

Notons $x_k^j = \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^a \end{pmatrix}$ le vecteur d'état augmenté, de dimension $2n$ avec $x_{k+1}^a = x_k^a$, $\forall k \geq j$ et $x_j^a = x_j$.

Nous avons donc le système augmenté

$$E^j x_{k+1}^j = F^j x_k^j + V^j \nu_k, \tag{3.1a}$$

$$y_k = H^j x_k^j + \omega_k, \tag{3.1b}$$

avec $E^j = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $F^j = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $V^j = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H^j = (H \quad 0)$.

Si nous pouvons calculer l'estimation $E^j \hat{x}_{k+1/k}^j = \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k+1/k} \\ \hat{x}_{k+1/k}^a \end{pmatrix}$, nous obtenons ainsi le lisseur $\hat{x}_{j/k}$ pour tout $k \geq j$ car $\hat{x}_{k+1/k}^a = \hat{x}_{j/k}$.

Hypothèse Hj)

Nous avons besoin de l'hypothèse **H** appliquée au système augmenté (3.1), que nous appellerons hypothèse **Hj)**

1) $(E^j \quad V^j)$ — *surjective,*

2) $\begin{pmatrix} E^j \\ H^j \end{pmatrix}$ — *injective.*

Remarque 3.1. *L'hypothèse* **H)** *dans le section 1.1 pour le système (1.1)-(1.2) est identique à l'hypothèse* **Hj)** *pour le système (3.1), car si* $(E \quad V)$ *est surjective,* $(E^j \quad V^j)$ *l'est, si* $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *est injective,* $\begin{pmatrix} E^j \\ H^j \end{pmatrix}$ *l'est aussi. Réciproquement, l'hypothèse* **H)** *est aussi nécessaire pour que l'hypothèse* **Hj)** *soit satisfaite.*

• **Solution du problème**

Sopposons $E\hat{x}_{j+1/j}$, $\hat{x}_{j/j}$, $\Sigma_{j+1/j}$ et $\Sigma_{j/j}$ déjà déterminés, ainsi que $E^j\hat{x}^j_{j+1/j}$ et

$$\Sigma^j_{j+1} = \mathcal{E}\left[\begin{pmatrix} Ex_{j+1} - E\hat{x}_{j+1/j} \\ x_j - \hat{x}_{j/j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ex_{j+1} - E\hat{x}_{j+1/j} \\ x_j - \hat{x}_{j/j} \end{pmatrix}^T\right] = \begin{pmatrix} \Sigma_{j+1/j} & F\Sigma_{j/j} \\ \Sigma_{j/j}F^T & \Sigma_{j/j} \end{pmatrix}$$

car $E\hat{x}_{j+1/j} = F\hat{x}_{j/j}$.

Nous utilisons le théorème 1.1.3 au système (3.1), la prédiction de $E^jx^j_{k+1}$ est donnée par

$$E^j\hat{x}^j_{k+1/k} = (0 \quad F^j)\, M^{-j}_{k+1}\begin{pmatrix} E^j\hat{x}^j_{k/k-1} \\ -H^{jT}R^{-j}y_k \end{pmatrix}, \quad k \geq j+1,$$

d'où M^j_k est symétrique et inversible, définie par

$$M^j_k = \begin{pmatrix} \Sigma^j_k & E^j \\ E^{jT} & -H^{jT}R^{-j}H^j \end{pmatrix}, \quad k > j.$$

Σ^j_k est symétrique et positive définie

$$\Sigma^j_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^{jT} \end{pmatrix} M^{-j}_k \begin{pmatrix} \Sigma^j_k & 0 \\ 0 & H^{jT}R^{-j} \end{pmatrix} M^{-j}_k \begin{pmatrix} 0 \\ F^{jT} \end{pmatrix} + Q^j, \quad k > j.$$

Les conditions initiales $E\hat{x}_{j+1/j}$ et $\Sigma_{j+1/j}$ peuvent être déterminées par la méthode décrite dans le section " 1.1 Filtrage de Ex_k par dualité " et $\hat{x}_{j/j}$ et $\Sigma_{j/j}$ par celle dans le section " 1.2 Filtrage complet de x_k " à partir de l'instant $k = 0$ avec $\overline{x}_0$ et $\overline{\Sigma}_0$.

Ainsi on en conclut le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Le problème de lissage à point fixe à l'instant j du système (1.1)-(1.2) est équivalant au problème de filtrage du nouveau système implicite augmenté* $E^jx^j_{k+1} = Fx^j_k + V^j\nu_k$, $y_k = H^jx^j_k + \omega_k$. *L'hypothèse H)* $(E \quad V)$ *surjective et* $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *injective sont identique que l'hypothèse Hj)* $(E^j \quad V^j)$ *surjective et* $\begin{pmatrix} E^j \\ H^j \end{pmatrix}$ *injective. Ainsi le problème*

de lissage peut être résolu par le théorème 1.1.3. pour $k > j$. En appliquant la méthode décriite dans la section " 1.2 Filtrage complet de x_k " et de nouveau celle dans le théorème 1.1.3., nous pouvons déterminer les conditions initiales $E^j \hat{x}^j_{j+1/j} = \begin{pmatrix} E\hat{x}_{j+1/j} \\ \hat{x}_{j/j} \end{pmatrix}$ *et* $\Sigma^j_{j+1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{j+1/j} & F\Sigma_{j/j} \\ \Sigma_{j/j}F^T & \Sigma_{j/j} \end{pmatrix}$ *à partir de l'instant $k = 0$ avec $\overline{x}_0$ et $\overline{\overline{\Sigma}}_0$.*

3.2. Lissage à retard fixe

- **Définition du problème**

Le lisseur à retard fixe consiste en l'estimation de l'état x à l'instant $k - N$, $\hat{x}_{k-N/k} = \mathcal{E}[x_{k-N}/y_0, y_1, ..., y_k]$, $\forall k$, où N est un retard constant.

- **Modélisation**

Pour résoudre ce problème, on forme le vecteur $x^N_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x^{(1)}_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(N-1)}_k \end{pmatrix}$, de dimension $N \times n$,

vérifiant

$$x^{(1)}_k = x_{k-1}; \quad x^{(2)} = x_{k-2}; \quad \ldots \quad ; x^{(N-1)}_k = x_{k+1-N}$$

Nous avons donc un modèle d'état augmenté qui est aussi un système implicite,

$$E^N x^N_{k+1} = F^N x^N_k + V^N \nu_k, \tag{3.2a}$$

$$y_k = H^N x^N_k + \omega_k, \tag{3.2b}$$

où $E^N = \begin{pmatrix} E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I \end{pmatrix}$, $F^N = \begin{pmatrix} F & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I \end{pmatrix}$, $V^N = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H^N = (H \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$.

Remarquons que si les hypothèses $(E \quad V)$ surjective et $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ injective sont satisfaites, les hypothèses $(E^N \quad V^N)$ surjective et $\begin{pmatrix} E^N \\ H^N \end{pmatrix}$ injective les sont aussi.

- **Solution du problème**

Simultanément, nous pouvons appliquer le théorème 1.1.3. au systhème (3.2), avec les conditions initiales $\hat{x}^N_0 = \begin{pmatrix} \hat{x}_{0/0} \\ \hat{x}_{-1/0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{x}_{1-N/0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{x}_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I \end{pmatrix} \overline{x}_0$.

3.3. Lissage à intervalle fixe

• **Définition du problème**

Il s'agit d'établir l'estimation optimale $\hat{x}_{l/M}$ à l'instant l $(M \geq l \geq 0)$ avec M fixe.

• **Modélisation**

En possant $N = M + 2$ dans le système (3.2) pour le problème à retard fixe, nous avons

$$\begin{pmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k-M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k-M-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \nu_k, \quad (3.3a)$$

$$y_k = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k-M-1} \end{pmatrix} + \omega_k. \quad (3.3b)$$

Si $k = M$, le problème du lissage à retard fixe devient celui du lissage à intervalle fixe. Ainsi, nous pouvons résoudre ce problème par la méthode décrit dans la section 3.2.

Bibliographie

[1] Aplevich J. D., Minimal representations of implicit linear systems, *Automatica*, Vol. 21, No. 3, p. 259-269.

[2] Astrom K. J., Introduction to Stochastic Control Theory, *Academic Press*, 1970.

[3] Banaszuk A., Kociecki M. et Przyluski K. M., On Implicit Linear Discrete-Time Systems, *Institute of Mathematics, Polish Acad. Sc.*, Warszawa, 1987.

[4] Bender D. J. et Laub A. J., Controllability and observability at infinity of multivariable linear second-order models, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-30, 1985, 1234-1237.

[5] Bernhard P., Commande optimale, Décentralisation et Jeux Dynamiques, *Dunod*, Paris, 1976.

[6] Bernhard P., On singular implicit linear dynamical systems, *S.I.A.M. J. Control*, 20, n^o 5, septembre 1982, p. 612-633.

[7] Bernhard P. et Wang X. M., Filtrage des systèmes implicites linéaires discrets, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 304, série I, 1987, p. 351-354.

[8] Bernhard P., Grimm J. et Wang X. M., Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites, *APII., Automatique, Productique, Informatique Industrielle*, (à paraître), Paris, 1989.

[9] Campbell S. L., Singular Systems of Differential Equations, *Pitman*, London, 1980.

[10] Cobb J. D., Controllability observability and duality in singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-29, 1984, p. 1076-1082.

[11] El-Tohami M., Lovass-Nagy V. et Powers D. L., On minimal-order inverses of discrete-time descriptor systems, *Int. J. Control*, Vol. 41, No. 4, 1985, 991-1004.
[12] Faurre P., Clerget M. et Germain F., Opérateurs Rationnels Positifs – Application à l'Hyperstabilité et au Processus Aléatoires, *Dunod*, 1979.
[13] Grimm J., Realisation and canonicity for implicit systems, *S.I.A.M. J. Control*, Vol. 26, No. 6, 1988, pp 1331–1347.
[14] Kailath Th., Linear Systems, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.*, 1980.
[15] Kucera V., Cascade compensation and state feedback in singular systems, *Proc. C.D.C. 26th*, Los Angeles, 1987, 1127-1128.
[16] Lewis F. L., Fundamental, reachability, and observability matrices for discrete descriptor systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-30, 1985, p. 502-505.
[17] Luenberger D. G., Dynamic equations in descriptor form, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-22, 1977, p. 312-321.
[18] Luenberger D. G., Time-invariant descriptor systems, in *Proc. J.A.C.C.*, San Francisco, CA, 1977, p. 725-730.
[19] Nikoukah R., Willsky A. S. et Lévy B. C., Generalized Riccati equations for two-point boundary-value descriptor systems, *Proc. C.D.C. 26th*, Los Angeles, 1987, 1140-1141.
[20] Owens D. H. et Debelykovic D. L., On non-Liapunov stability of descrete descriptor systems, *Proc. C.D.C. 25th*, Athens, 1986, 2138-2139.
[21] Shayman M. A., On pole placement by dynamic compensation for descriptor systems, *Proc. C.D.C. 26th*, Los Angeles, 1987, 1131-1133.
[22] Tan S. et Vandewalle J., Canonical forms for singular systems, *Proceedings of 25th C.D.C.*, Athens, 1986, 2144-2149.
[23] Verghese G. C., Infinite-Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems, *Ph.D. Thesis, Information systems laboratory, Stanford University*, Stanford, 1978.
[24] Verghese G. C., Lévy B.C. et Kailath T., A generalized state-space for singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-26, 1981, p. 811-831.
[25] Wang X. M., Bernhard P. et Grimm J., Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 303, série I, 1986, p. 127-130.
[26] Yadama T. et Luenberger D. G., Algorithms to verify generic causality and controllability of descriptor systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-30, 1985, p. 874-880.
[27] Yip E. L. et Sincovec R. F., Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-26, 1981, p. 702-707.
[28] Zhou Z., Shayman M. A. et Tarn T. J., Singular systems: a new approach in the time domain, *Proceedings of 25th C.D.C.*, Athens, 1986, 2129-2135.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique