Propriete de l'action dans l'equation WWB de l'equation des ondes en optique aleatoire

A. Meritet

UNITE DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 998

Programme 7

PROPRIETE DE L'ACTION DANS L'EQUATION WWB DE L'EQUATION DES ONDES EN OPTIQUE ALEATOIRE

Alain MERITET

Mars 1989

PROPRIETE DE L'ACTION DANS L'EQUATION WWB DE L'EQUATION DES ONDES EN OPTIQUE ALEATOIRE

-=-=-=-=-

Alain MERITET
INRIA, B.P. 105 - Rocquencourt
78153 LE CHESNAY CEDEX, France

-=-=-=-

Résumé :

On considère la trajectoire lumineuse d'un rayon dans un milieu d'indice aléatoire. Quand les conditions initiales sont convenables, le processus apparaît Markovien car le rayon ne peut se retourner sur lui-même et nous obtenons des équations stochastiques d'Ito pour le processus et en déduisons une équation de diffusion. C'est une équation parabolique hautement singulière.

-=-=-=-

PROPERTY OF THE ACTION IN THE WWB EQUATION OF THE WAVES IN RANDOM MEDIA

Abstract :

We consider the luminar trajectory of a ray in a randice indice media. When the initial data are convenient, the random process appear Markovian because the ray cannot return on himself and we get stochastic Ito's equations for the process which is a diffusion. This is a singular parabolic equation.

Introduction :

Le but de l'article est d'étudier l'action dans la solution WKB de l'équation de propagation des ondes dans un milieu d'indice aléatoire. Pour cela on utilise le formalisme Hamiltonien et la transformation de Legendre qui nous amène à une équation d'Hamilton Jacobien dans un premier temps et une équation de Monge dans un deuxième temps. La résolution se fait à partir d'une intégrale première et amène à partir de la théorie duale projective ; des équations stochastiques d'Ito ont en déduit des équations de diffusion. Cette équation de diffusion parabolique est hautement singulière cependant un théorème d'existence peut être obtenue en utilisant les conditions initiales des équations duales sur certaines conditions initiales de l'équation les solution de l'équation sont non Markovienne parce que avec probabilité positive la trajectoire peut revenir en arrière ; néanmoins les équations stockastiques des trajectoires sont valides pour de petits intervalles et nous proposons une équation diffusion mais ne prouvons pas de théorème d'existence pour elle.

Rappel sur l'action

Les trajectoires des rayons lumineux dans un milieu plan x 0 y d'indice n(y) en écrivant que le temps mis par le rayon est entremal c'est à dire

$$J \equiv \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\; n(x,y)dx$$

est external.

L'action dans la solution WKB est alors symbolisée par la

fonctionnelle $F(\dot{y},y,x) = \sqrt{1+\dot{y}^2}\; n(x,y)$

Transformée de Legendre

$$L(V_i, U_i, s) = \sum \dot{U}_v V_v - F(\dot{u}_v, u_i, s)$$

$$F_{\dot{u}_v} = V_v$$

$$L_{V_v} = \dot{u}_v$$

On obtient dans notre cas en supposant que l'indice depend que de y

$$F(\dot{u}_i, u_i, s) = n(u_i) \sqrt{1+\dot{u}_1^2}$$

$$V_v = F_{\dot{u}_v} = n(u_1) \frac{\dot{u}_1}{\sqrt{1+\dot{u}_1^2}} \quad v = 1.$$

Soit

$$(1+\dot{u}_1^2) V_1^2 = n^2(u_1) \dot{u}_1^2$$

d'où

$$\dot{u}_1^2 (V_1^2 - n^2(u_1)) = - V_1^2$$

$$\dot{u}_1 = \pm \frac{V_1}{\sqrt{n^2(u_i)-V_1^2}}$$

$$L = \frac{n(u_i)}{\sqrt{1+ \frac{V_1^2}{n^2(u_1)-V_1^2}}}$$

$$L = \frac{n(u_i)}{\sqrt{\frac{n^2(u_i)-V_1^2+ V_1^2}{n^2(u_i)-V_1^2}}}$$

$$L = \frac{n(u_i)}{\sqrt{n^2(u_i)}} \sqrt{n^2(u_i)-V_1^2}$$

$$L = \operatorname{sgn}(n(u_i)) \sqrt{n^2(u_i) - V_1^2}$$

D'où l'équation aux dérivées partielles du premier ordre vérifiée par J dans les coordonnées x, y

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = n^2(y) \qquad (E)$$

Résolution de l'équation au dérivée partielle

Nous utilisons la méthode des Equations de Monge (Equations duales).

Pour cela nous cherchons une intégrale première l'équation (E).

Elle est donnée par (cas C^2 au moins)

$$J(x,y) = \int^x \sqrt{} d\xi + \int^y \sqrt{n^2(y)-\alpha}\, d\eta + \beta$$

dans le cas où le second membre ne depend que de y, sans caustique après écriture des équations caractéristiques ceci constitue une relation en J, x et y, α et β sont deux membres réelles, $\alpha > 0$. qui donne l'équation de Monge (CH ρ 90) pour $J_1(x)$

$$\left(\frac{\partial J_1}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(y)$$

Soit

$$(\sqrt{\alpha_1})^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(y)$$

Nous en déduisons donc l'équation de Monge qui n'est pas l'equation des rayons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \alpha_1 - n^2(y)$$

avec $\alpha_1 > 0$ d'où la solution J_2 de l'équation (E)

Définition de l'indice aléatoire

a) On supposera que nous sommes dans le plan et que l'indice est uniformément borné au dessus. Notons $n'(y,w)$ le potentiel aléatoire au point $y \quad \mathbb{R}^+$, $w \quad \Omega$, Ω étant l'espace probabilité de la statistique n et nous supposons que

$$J = \sup_{\substack{y \ \mathbb{R}^+ \\ w \ \Omega}} n^2(y,w) > 0$$

Nous supposons en outre

$$n(\infty,w) = 1$$

b) L'équation que nous résultons est l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \alpha_1 - n^2(y) \tag{1}$$

l'une est constante donnée positive. Elle dépend du choix initiale de relations dans l'équation duale de Monge.

c) On suppose que la forme de n est spéciale, essentiellement donnée par une équation différentielle stochastique x.

Soit $m_y(w)$ un processus stochastique de Markov avec valeur dans une variété M ; nous supposerons que

$$d_y\, m_y^i(w) = \sigma^{ij}(m_y(w))db^j(y) + \sigma^i(m_y(w))\, dy \tag{3}$$

σ^{ij} est une matrice symétrique positive $db_j(y)$ est un blanc N dimensionnel. (N = dim M), σ^i est un champ de vecteur. Soit f une fonction C^2 bornée positive. Posons avec $f(0) = 1$, $f(\infty) = 1$

$$n^2(y,w) = f(m_y(w))$$

La variation de **g** en n est obtenu par le calcul stochastique d'Ito [3]

La variation de g en n est obtenu par le calcul stockastique d'Ito [3].

$$d\, y\, n^2(y,w) = \frac{\partial f}{\partial y^i}(m_y(w))\, \sigma^{ij}(m_y(w))\, db^j(y) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y^i}(m_y(w))\sigma^i(m_y(w)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}(\sigma^{ij}\sigma^{kj})(m_y(w)) \quad dy$$

Définissons comme d'habitude les invariants d'Ito de f ;

$$\|\nabla f\|^2(m) = \sigma^{ij}\sigma^{jk}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^k}(m)$$

$$\Delta f(m) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\sigma^{ik}\sigma^{kj}(m) + \frac{\partial f}{\partial y^i}\sigma^i \quad (m)$$

Nous supposons que n'(y,w) est un processus de Morkov ceci est équivalent à supposer que les deux invariants Ito de f sont des fonctions de f(m), précisement qu'il reste deux fonction d'une variable ϕ et ψ telle que

$$(6) \quad \begin{aligned} \|\nabla f\|(m) &= \phi(f(m)) \\ \Delta f(m) &= \phi(f(m)) \end{aligned}$$

d) Ceci est surement une forte hypothèse mais si M a suffisamment de symétrie on peut toujours trouver de telles fonctions (non constantes) ; par exemple, supposons que M est variété Riemannienne ayant un centre de symétrie ce qui signifie qu'il existe un tel point M telle que la métrique ne dépend uniquement que la distance à 0 ; alors il est bien connu (voir [2] que toute fonction $\phi(d(0,m)) \equiv f(m)$ satisfaisant (b) et est bornée si M est bornée si M est compact par exemple.

e) Maintenant nous pouvons légérement modifier (5) ; usant un changement de variable [3], nous pouvons introduire un autre mouvement unidimensionnel $\beta(y,w)$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(m_y(w))\sigma^i(m_y(w))db^j(y) = \|\nabla f\|\,(m_y(w))dp(yw)$$

Dans ce cas l'équation stochastique pour n^2 devient

$$\text{(7)} \qquad dy\; n^2(y,w) = \phi(n^2(y,w))\; d_\beta(y,w) + \psi\;(n^2(y,w))\; dy$$

nous avons utilisé (5), le changement de variable et (w)

Solution de l'équation dans l'indice aléatoire

a) Les solutions intéressantes sont les solutions de l'équation. L'équation déduite présente un inconvénient parce que nous avons à écrire explicitement la solution. L'idée étant d'écrire le tout sous une forme conservative

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + n^2(y) = \alpha_1$$

Ceci devient immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sgn}\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\overset{\equiv}{\alpha_1} - n^2(y(x))}$$

ou sgn $\frac{dy}{dx}$ est le signe constant de $\frac{dy}{dx}$. Nous supposons $\alpha^1 > S$ dans ce cas il est clair que $\frac{dy}{dx}$ ne change jamais de signe et qu'il n'existe pas de point de retour (caustique) et l'équation devient

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\overset{\equiv}{\alpha_1} - n^2(y(x))}$$

mais en général $n^2(y)$ est seulement dans la classe fonctions avec exposants de Holder $\alpha < \frac{1}{2}$ et surement lypschitzienne en x.

Aussi si nous écrivons une telle équation, nous devons prouver un théorème d'ensemble mais surement pas au théorème d'unicité.

b) Nous allons convertir cette équation en un système d'équation stochastique différentiellle pour lesquels nous avons existence d'unicité statistique.
Partant de (9) prenons la dérivée d_x de l'équation supposons sgn $\frac{dy}{dx} > 0$
et $n^2\ (y(x)) = f\ (m\ (y(x)))$
Considérons alors les courbes solutions et posons

$$T(x) = t_g\ \sigma(x)$$
$$= \frac{dy}{dx}$$

On obtient

$$T(x) = \sqrt{\alpha' - n^2\ (y(x))}$$

ou $n^2(y(x)) = \overline{\overline{\overline{\alpha}}}_1 - T^2(x)$
par suite en utilisant el calcul d'Ito,

$$d_x\ T(x) = - \frac{d_x\ n^2(y(x))}{(\overline{\overline{\overline{\alpha}}}_1 - n^2(y(x)))^{1/2}} - \frac{d_x(n^2(y(x))^2}{(\overline{\overline{\overline{\alpha}}}_1 - n^2(y(x))^{3/2}}$$

Ici nous avons calculer avec le calcul stochastique d'Ito. Maintenant nous rappelons (7) et l'équation (1) qui nous montrent que y(x) est une fonction C^1 de x avec dérivée positive.
En utilisant une fois de plus la théorie du changement de temps dans une intégrale stochastique nous pouvons écrire

$$(11) \qquad d_x t_{(x)} = - \frac{\phi(\overline{\overline{\overline{\alpha}}}_1 - T^2(x))}{T^2(x)^{1/2}}\ d\ \beta_1(x) - \left(\frac{1}{2}\ \psi(\overline{\overline{\overline{\alpha}}}_1 - T^2(x)) + \frac{\phi(\overline{\overline{\overline{\alpha}}}_1 - T^2(x))}{T^2(x)} \right) dx$$

Cette équation stochastique a une solution pour tout temps si nous supposons que $T(x) > (\overline{\overline{\alpha}}_1 - S)^{1/2}$ et $\overline{\overline{\alpha}}_1 > S$ (d'après (12) implique la conservation de l'énergie tel que pour le flot de (12), T(x) est borné de haut nous avons immédiatement l'existence pour tout le temps des solutions de (12) tel qu'au temps t = 0

$$T(0) > \sqrt{\overline{\overline{\alpha}}_1 - S}.$$

<u>Equation de diffusion dans l'espace des phases</u>

On note

$$(y,T,x) = E\,(F(y(x)),\ T(x))\ |\ y(0)=y,\ T(0)=T,\ n(y_0,w)=c(\text{sui Aretg } T))^{-1}$$

Utilisant la méthode conventionnelle, il est évident que f satisfait l'équation <u>différentielle partielle</u> suivante obtenue en utilisant l'équation stochastique (12)

$$f(y,T,0) = F(y,T)$$

$$(13)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\phi^2(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}{T(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} - \left(\frac{1}{2}\,\psi(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x)) + \frac{\phi(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}{T^2(x)}\right) \frac{\partial f}{\partial T} + T(x)\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) Notons comme d'habitude

$$P(y,T,x\ |\ y_0,\ T_0)d_y dT = \text{Prob}(y(x)\quad d_y,\ T(x)\quad dT\ |\ y(0) = y_0,\ T(0)=T_0)$$

Hors par rapport à (y,T), P satisfait l'équation adjointe

$$= \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{\phi^2(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}{T(x)}\,P\right) + \frac{\partial}{\partial T}\left(\left(\frac{1}{2}\,\psi\,(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x)) + \frac{\phi(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}{T^2(x)}\right)P\right) - T(x)\,\frac{\partial P}{\partial y}$$

Nous avons supposer

$$\frac{dy}{dx}^2 + n^2(y) = \overline{\overline{\alpha}}_1 , \quad x = 0$$

que cette relation est conservée. En ce sous, la diffusion prend place sur cette courbe Lagrangienne aléatoire dans l'espace des phases.

Exemple : Soit M une variété riemannienne ayant un centre de symétrie 0 est soit r(0,M) la distance riemannienne de M = 0. Alors nous avons

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{H'}{H}(r)\frac{\partial}{\partial r} F$$

Si F dépend seulement de r and Δ est l'opération de Laplace Beltrami opérateur in M et H l'élément de volume coordonnées polaire de centre 0 et distance r de 0.

L'équation stationnaire pour P = P(T) qui ne dépend pas de y est alors

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial T^2}(\phi^2(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x)))P(T) + \frac{\partial}{\partial T}\left(\left(\frac{1}{T^2} F'^2(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x)) + \frac{1}{2}(\Delta F)(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(n))\right) P(x)\right)$$

Denote $Q(T) = \dfrac{F'^2(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}{T(x)} P(T)$

Ceci satisfait

$$\frac{\partial}{\partial T} Q(T) + Q(T)\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{2} T \frac{\Delta F(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}{F'^2(\overline{\overline{\alpha}}_1 - T^2(x))}\right) = C$$

C étant une constante, ceci peut être intégrée explicitement pour donné la distribution stationnaire.

4. Extension des conditions de validité

Supposons maintenant que l'on ne porte pas avec un point (x_o, p_o) c'est à dire

$$T_o > \sqrt{\overline{\overline{\alpha}}_1 - S}$$

mais nous supposons seulement

$$\overline{\overline{\overline{\alpha_1}}} \geq h^2(y_o)$$

tel que $T_o \geq 0$

Alors classiquement le mouvement à un point tournant et surement il peut être pas plus markovien à cause de la trajectoire $y(x)$ qui revient en place là ou elle est déjà passée avant ; mais comme l'échantillon de la trajectoire n'a pas changé le mouvement de la trajectoire après le point tournant qui "rappelle" la tangente. Néanmoins, l'équation est toujours aussi valide et l'équation diffusion (12) est valide jusqu'au premier temps $T(w)$ ou $T(T(w)) = 0$ ceci signifie que pour de petit temps. L'équation de diffusion (13)-(14) serait

Nous proposons d'étendre l'équation (13) en écrivant

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\phi^2(\overline{\overline{\overline{\alpha_1}}}-T^2(x))}{T(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} - \left(\frac{1}{2} \psi(\overline{\overline{\overline{\alpha_1}}}-T^2(x)) \text{ sing } T + \frac{\phi(\overline{\overline{\overline{\alpha_1}}}-T^2(x))}{T^2(x)} \right) \frac{\partial f}{\partial T} + T(x) \frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>Conditions d'existence pour les équations paraboliques précédentes</u>

Nous allons considérer le problème de Cauchy pour les équations paraboliques singulières (13) et son adjointe (24). Parce que coefficients de ces équations sont singuliers, il n'est pas évident que les théorèmes d'existence usuels s'appliquent à ces équations.

Nous noterons $f_o(y,T)$ les données initiales en $x=0$ dans ? de l'équation (13) et nous supposerons que f_o et ses deux premières dérivées partielles sont bornées. Le théorème d'existence est prouvée en utilisant la diffusion précédente en potentiel aléatoire ; nous supposons que $\phi(v)$ et $\psi(v)$ sont des fonctions données telles que l'équation (7) est une solution qui est uniformément bornée au dessus par S quand $n(y_o)$ (donnée initiale) est moins que S

Nous supposons que dans l'équation (13)

$$(17) \quad \overline{\overline{\overline{\alpha_1}}} > S$$

prenons T_o avec

(18) $\overline{\overline{\alpha}}_1 - T_o^2 < S \qquad T_o > 0$

Nous résolvons alors l'équation stochastique (7) sous les conditions initiales

$$n^2(y_o, w) = \overline{\overline{\alpha}}_1 - T_o^2$$

pour y_o est un point de $\mathbb{R}$, cela signifie que nous allons prendre une espérance conditionnelle connaissant (16) pour résoudre l'équation stochastique (7) pour tout $y > y_o$

Nous définissons maintenant le processus stochastique dans l'espace des phases (y(x), T(x)) par les équations (1) et (2) avec les conditions initiales

(17) $y(0) = y_o \qquad T(0) = T_o$

et dans (12) $d\beta_1(t)$ est un bruit blanc dont la statistique est reliée à la statistique de $n^2(y,w)$ par la construction section (2) ; alors cette construction et les relations et (17) implique pour tout x

(18) $\overline{\overline{\alpha}}_1 = n^2(y) + \frac{dy}{dx}^2$

Parce que les hypothèses sur ϕ et ψ, $n^2(y,w) < S$. Pour tout y et w et compte tenu (17) T(x) ne peut s'annuler en fait

(19) $T(x) > \sqrt{\overline{\overline{\alpha}}_1 - S}$

Ceci signifie que nous aurons des bornes uniformes pour l'équation stochastique (12) le long des solutions ce qui implique que nous pouvons résoudre ces équations pout tout temps t et ainsi (1) d'une manière triviale

Nous définissons alors

$$f(x_o, T_o, t) = E\ (f_o(y(t), T(x)) \mid (16), (17))$$

Pour E(...| (16), (17) signifie l'espérance conditionnelle connaissant les conditions (16), (17))

6° Equation pout la loi de J

Ce fait est prouvé, par exemple, en resolvant le problème à la valeur initiale pour une courbe initiale donnée $G(x_o, y_o) = 0$ le long de laquelle la condition initiale $u = 0$ est stipulée. Pour construire une solution on considère la courbe caractéristique passant à travers chaque point (x_o, y_o) sur la courbe hornement

$$x = p_o s + x_o, \quad y = q_o s + y_o \text{ et } u = s$$

Comme on a

$$p_o^2 + q_o^2 = n^2$$

s représente la distance du point (x,y) au point (x_o, y_o) sur la projection sur cette ligne droite. Pour déterminer p_o et q_o nous notons que si on considère x_o comme paramètre indépendant le long de la courbe initiale, alors $du_o/dx_o = p_o + q_o\, dy_o/dx_o$.

Soit J_1 la solution de

$$d\,J_1 = p_o\, dx + q_o\, d\,T(x)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERTRAND, CR Acad. Paris 276 1973 1525-1527.

[2] P. BERTRAND, B. GAVEAU. Diffusion of a classical particle instatic random potential. Advanced in Applied Mathematics 5 489-499 (1984).

[3]

[4] H.P. Mac Kean. Stochastic Integrals Acad. Paris 1969.

[5] P. MALLIAVIN. Geométrie différentielle stochastique Presse Université Montréal 1978.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique