Graphes canoniques de graphes algébriques

Didier Caucal

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 872

GRAPHES CANONIQUES DE GRAPHES ALGEBRIQUES

Didier CAUCAL

JUILLET 1988

RR.0872

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
Avenue du Général Leclerc
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Tél. : (99) 36.20.00
Télex : UNIRISA 95 0473 F

Publication Interne n° 414
Juin 1988
20 Pages

Graphes canoniques de graphes algébriques

Didier CAUCAL

IRISA , Campus de Beaulieu , F35042 Rennes-Cédex , France

Résumé . On sait que la bisimulation des graphes des dérivations gauches des grammaires algébriques réduites est décidable [Ba-Be-Kl 87] . Le quotient par sa plus grande bisimulation, appelé le graphe canonique, de tout graphe des dérivations gauches d'une grammaire G algébrique et réduite est isomorphe à un graphe des dérivations gauches d'une grammaire H algébrique et réduite, et on peut de façon effective transformer G en H .

Algebraic graphs in canonical form

Abstract . Concerning algebraic grammars in reduced form, bisimulation in the graph of left derivations is known to be decidable [Ba-Be-Kl 87] . The quotient of the above graph by its greatest bisimulation, called the canonical graph, is indeed isomorphic to the graph of left derivations for another algebraic grammar in reduced form, produced by an effective procedure.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L.A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

Introduction

Un graphe algébrique [Mu-Sc 85] est un graphe des dérivations d'un automate à pile. On considère ici les graphes des dérivations gauches, gdg en abrégé, des grammaires algébriques. Le gdg d'une grammaire algébrique G à partir d'un mot α est le graphe ayant α comme sommet et tel que pour tout sommet $A\beta$, $\gamma\beta$ est un sommet du graphe et $(A\beta,a,\gamma\beta)$ est un arc du graphe si et seulement si $(A,a\gamma)$ est une règle de G ou est le couple (a,a), avec a une lettre terminale (ou bien a est le mot vide si le mot droit de la règle ne commence pas par une lettre terminale). La classe des gdg des grammaires algébriques est une sous-classe propre de celle des graphes algébriques.

Un graphe (orienté et à arcs étiquetés) $\mathcal{G}$ se réduit en un graphe $\mathcal{H}$ s'il existe une application surjective h des sommets de $\mathcal{G}$ sur les sommets de $\mathcal{H}$, et tel que pour tout sommet s de $\mathcal{G}$ et pour toute étiquette d'arc a, l'ensemble des sommets h(t) pour un arc (s,a,t) de $\mathcal{G}$ est égal à l'ensemble des sommets r pour un arc (h(s),a,r) de $\mathcal{H}$. Le graphe canonique d'un graphe $\mathcal{G}$ est le quotient de $\mathcal{G}$ par sa plus grande bisimulation [Pa 81]. C'est aussi le (à isomorphisme près) graphe réduit de $\mathcal{G}$ et irréductible. Ainsi, deux graphes sont bisimulables si et seulement si ils se réduisent en un même troisième, ou encore si leurs graphes canoniques sont isomorphes.

On considère la bisimulation en tant que relation binaire sur les mots d'une seule grammaire algébrique : deux mots α et β sont bisimulables s'il existe une bisimulation R de leurs gdg associés tels que $\alpha\, R\, \beta$. On montre que la bisimulation pour une grammaire algébrique réduite est une congruence de Thue, c'est-à-dire la plus petite congruence contenant un ensemble fini de paires, et qu'à partir de la grammaire on peut extraire effectivement un système générateur de la bisimulation. Tout comme [Ba-Be-Kl 87], on en déduit que la bisimulation est décidable mais de plus, on peut de façon effective transformer toute grammaire G algébrique et réduite en une grammaire H algébrique et réduite de sorte que le graphe canonique de tout gdg de G soit isomorphe à un gdg de H.

1. Préliminaires

Etant donné une relation $R \subseteq ExF$, on pourra noter $x \, R \, y$ au lieu de $(x,y) \in R$, et l'inverse de R est $R^{-1} = \{ (y,x) \mid x \, R \, y \}$. L'image $R(A)$ d'un ensemble A par R est $\{ y \mid \exists \, x \in A , x \, R \, y \}$. On note $Dom(R) = R^{-1}(F)$ le domaine de R et $Im(R) = R(E)$ l'image de R . La relation identité sur E est notée $\iota_E = \{ (x,x) \mid x \in E \}$. La composée d'une relation $R \subseteq ExF$ par une relation $S \subseteq FxG$ est la relation $R \circ S = \{ (u,v) \mid \exists \, w \in F , \, u \, R \, w \text{ et } w \, S \, v \}$. Le noyau d'une relation R est défini par la relation $Ker(R) = R \circ R^{-1} = \{ (u,v) \mid R(u) \cap R(v) \neq \emptyset \}$. Une relation R est fonctionnelle si $Ker(R^{-1})$ est inclus dans ι_F , c'est-à-dire l'image $R(u)$ d'un élément u de $Dom(R)$ a un seul élément.

Pour un monoïde $(M, .)$ d'élément neutre 1 , le produit d'une partie A par une partie B de M est $A.B = \{ uv \mid u \in A \text{ et } v \in B \}$ et l'étoile d'une partie A est $A^* = \bigcup \{ A^i \mid i \geq 0 \}$ avec $A^0 = \{1\}$ et $A^{i+1} = A^i.A$.

Considérons le monoïde $(2^{ExE}, \circ)$ des parties de ExE , muni du produit de composition $\circ$. Une relation R est un pré-ordre si elle est réflexive ($\iota_E \subseteq R$) et est transitive ($R \circ R \subseteq R$) ; une équivalence est un pré-ordre symétrique ($R^{-1} \subseteq R$) . Une relation R est dite canonique si elle est nœthérienne (il n'existe pas de suite infinie $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_n \, R \, u_{n+1}$) et confluente ($(R^{-1})^* \circ R^* \subseteq R^* \circ (R^{-1})^*$) .

Soient X un alphabet et $(X^*, .)$ le monoïde libre engendré par X . On considère le monoïde produit $(X^* x X^*, .)$ défini par $(u,v) . (x,y) = (ux,vy)$.
Ainsi pour $R , S \subseteq X^* x X^*$, $R.S = \{ (ux,vy) \mid u \, R \, v \text{ et } x \, S \, y \}$ est le produit composante à composante. Une partie R est dite compatible (avec la concaténation de tout mot) si elle est compatible à gauche ($\iota_{X^*} . R \subseteq R$) et compatible à droite ($R . \iota_{X^*} \subseteq R$) . Une équivalence compatible est appelée une congruence. On définit

$\xrightarrow[R]{} = \iota_{X^*} . R . \iota_{X^*}$ la plus petite relation contenant R et compatible

$\xrightarrow[R]{*} = (\xrightarrow[R]{})^*$ le plus petit pré-ordre contenant R et compatible

$\xleftrightarrow[R]{} = \xrightarrow[R]{} \cup (\xrightarrow[R]{})^{-1}$ et $\xleftrightarrow[R]{*} = (\xleftrightarrow[R]{})^*$ la plus petite congruence contenant R .

Une relation S est une congruence de Thue s'il existe une relation <u>finie</u> R telle que $S = \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$.

Etant donné une relation $\underset{R}{\longrightarrow}$ canonique, on note $x{\downarrow}R$ l'unique forme normale (irréductible) selon

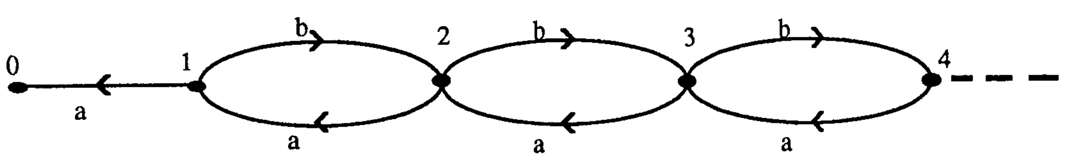
$\underset{R}{\longrightarrow}$ de x élément de E .

2. Bisimulation et minimisation de graphes

On considère les graphes (infinis) orientés et à arcs étiquetés sur un ensemble X quelconque.

Définition. Un graphe $\mathcal{G}$ sur un ensemble X est un couple $(S_{\mathcal{G}},Arc_{\mathcal{G}})$ où $S_{\mathcal{G}}$ est un ensemble quelconque, dit des sommets de $\mathcal{G}$, et $Arc_{\mathcal{G}}$ est une partie de $S_{\mathcal{G}} x X x S_{\mathcal{G}}$. Un élément (s,a,t) de $Arc_{\mathcal{G}}$ est un arc de $\mathcal{G}$, de source s , de but t et d'étiquette a .

X = {a,b} , S est l'ens. des entiers naturels ; Arc = $\{ (n+1,a,n) \mid n \geq 0 \} \cup \{ (n+1,b,n+2) \mid n \geq 0 \}$



L'ensemble des mots étiquetants les chemins du sommet 1 au sommet 0 est le langage de Luckasiewicz (grammaire A = a + bAA)

Fig 2.1 . Representation d'un graphe .

La bisimulation de graphes a été introduite par [Pa 81] :

Définition. Une bisimulation R d'un graphe $\mathcal{G}$ sur un graphe $\mathcal{H}$ est une partie du produit $S_{\mathcal{G}} x S_{\mathcal{H}}$ telle que

(i) $Dom(R) = S_{\mathcal{G}}$ et $Im(R) = S_{\mathcal{H}}$

(ii) si s R t et $(s,a,s') \in Arc_{\mathcal{G}}$ alors il existe $(t,a,t') \in Arc_{\mathcal{H}}$ tel que s' R t'

(iii) si s R t et $(t,a,t') \in Arc_{\mathcal{H}}$ alors il existe $(s,a,s') \in Arc_{\mathcal{G}}$ tel que s' R t' .

Les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont dits bisimulables et on note $\mathcal{G} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{H}$.

L'inverse d'une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ est une bisimulation de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{G}$. Toute union (finie ou non) de bisimulations de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$. La composée d'une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ par une bisimulation de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{I}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{I}$. Par conséquent le noyau Ker(R) d'une bisimulation R de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$ (une bisimulation d'un graphe étant une bisimulation du graphe sur lui-même). De même, la fermeture réflexive et transitive R^* d'une bisimulation R de $\mathcal{G}$ est une bisimulation de $\mathcal{G}$. Enfin, tout graphe admet une plus grande bisimulation. En effet, considérons un graphe $\mathcal{G}$. A toute relation R binaire sur $S_{\mathcal{G}}$, on associe la relation suivante :

$$F(R) = \{ (s,t) \mid \text{si } (s,a,s') \in Arc_{\mathcal{G}} \text{ alors il existe } (t,a,t') \in Arc_{\mathcal{G}} \text{ tel que } s' R t' \\ \text{et si } (t,a,t') \in Arc_{\mathcal{G}} \text{ alors il existe } (s,a,s') \in Arc_{\mathcal{G}} \text{ tel que } s' R t' \}$$

Aussi R est une bisimulation de $\mathcal{G}$ si et seulement si $R \subseteq F(R)$ et $Dom(R) = Im(R) = S_{\mathcal{G}}$. Comme F est une fonction monotone de treillis complets, F admet (par le théorème de Knaster et Tarski) un plus grand point fixe $\cup\{R \mid R \subseteq F(R)\}$ qui est la plus grande bisimulation de $\mathcal{G}$.

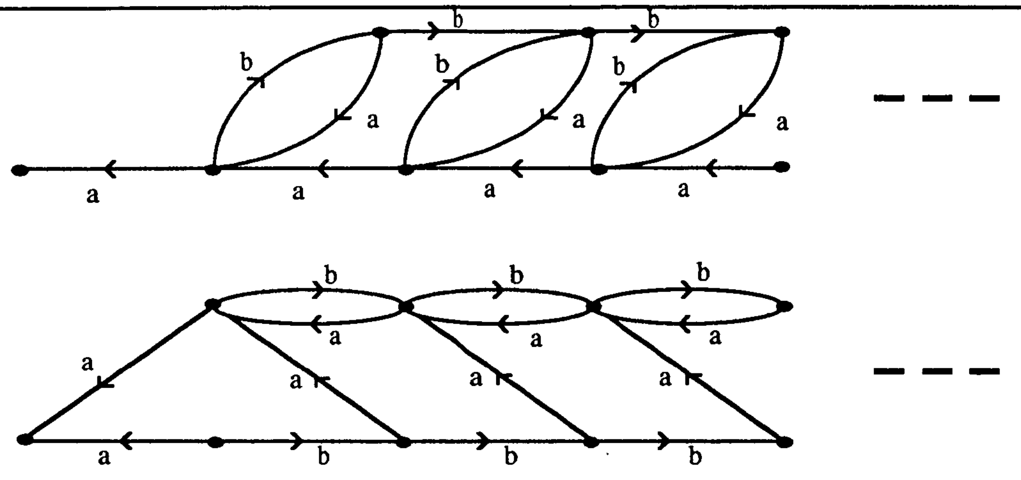


Fig 2.2 . Graphes bisimulables .

Les bisimulations fonctionnelles sont les homomorphismes surjectifs de graphes, usuellement appelés réductions de graphes.

Définition. Une réduction d'un graphe $\mathcal{G}$ en un graphe $\mathcal{H}$ est une application surjective $h : S_{\mathcal{G}} \to S_{\mathcal{H}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) si $(s,a,t) \in Arc_{\mathcal{G}}$ alors $(h(s),a,h(t)) \in Arc_{\mathcal{H}}$

(ii) si $(h(s),a,t') \in Arc_{\mathcal{H}}$ alors il existe $(s,a,t) \in Arc_{\mathcal{G}}$ tel que $h(t) = t'$.

On dit que $\mathcal{G}$ se réduit en $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$.

Si de plus h est injective alors $\mathcal{G}$ est dit isomorphe à $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{H}$.

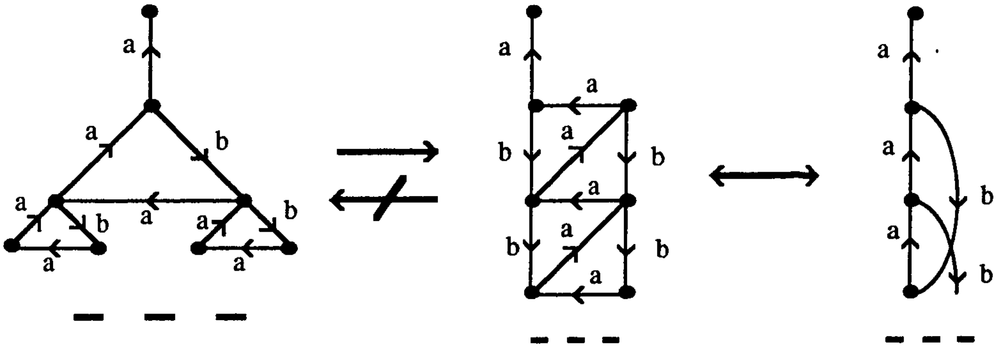


Fig. 2.3 . Réduction et isomorphisme de graphes .

La réduction est un pré-ordre sur les graphes et l'isomorphisme est une relation d'équivalence sur les graphes. On remarquera qu'il existe des graphes (infinis) inter-réductibles mais non isomorphes.

Les congruences de graphes sont les noyaux des réductions. Aussi R est une congruence d'un graphe $\mathcal{G}$ si et seulement si R est une équivalence et une bisimulation de $\mathcal{G}$. Si R et S sont des congruences d'un graphe $\mathcal{G}$ alors $(R \cup S)^*$ est une congruence de $\mathcal{G}$, mais $R \cap S$ peut ne pas être une congruence de $\mathcal{G}$. Le quotient $\mathcal{G}/R$ d'un graphe $\mathcal{G}$ par une congruence R est le graphe réduit de $\mathcal{G}$ par la projection naturelle de R . On a alors le résultat usuel [Co 81] suivant : si h est une réduction d'un graphe $\mathcal{G}$ en un graphe $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{G}/\mathrm{Ker}(h)$. Remarquons que la plus grande bisimulation R d'un graphe $\mathcal{G}$ est aussi la plus grande congruence de $\mathcal{G}$ parce que toute congruence est une bisimulation et que R^* contient R et est une bisimulation de $\mathcal{G}$, donc $R = R^*$ i.e. R est une équivalence.

Définition. Le graphe canonique $\mathrm{Min}(\mathcal{G})$ d'un graphe $\mathcal{G}$ est le quotient de $\mathcal{G}$ par sa plus grande bisimulation.

Le graphe canonique d'un graphe $\mathcal{G}$ est aussi l'unique (à isomorphisme près) graphe irréductible, réduit de $\mathcal{G}$.

Proposition 2.1 . Soit $\mathcal{G}$ un graphe.

$\mathrm{Min}(\mathcal{G}) \leftrightarrow \mathcal{H}$ pour $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ et tel que si $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ alors $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{I}$.

Deux graphes sont bisimulables si et seulement si leurs graphes canoniques sont isomorphes, ou bien s'ils sont réductibles en un même troisième.

Proposition 2.2 . Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des graphes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{G} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{H}$

(ii) $\exists\, \mathcal{I}$ tel que $\mathcal{G} \to \mathcal{I} \leftarrow \mathcal{H}$

(iii) $\mathrm{Min}(\mathcal{G}) \leftrightarrow \mathrm{Min}(\mathcal{H})$.

Par exemple, le graphe canonique des graphes de la figure 2.2 est celui de la figure 2.1 .

3. Graphes des dérivations gauches d'une grammaire algébrique

Une grammaire algébrique G sur un alphabet Σ de lettres terminales, est une relation finie de $N \times (\Sigma \cup N)^*$ où $N = Dom(G)$ est un alphabet disjoint de Σ, dit des lettres non-terminales de G .

Définition. Soient G une grammaire algébrique sur Σ et $N = Dom(G)$.
Le graphe des dérivations gauches, gdg en abrégé, de G à partir de $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ est le graphe $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ sur $\Sigma \cup \{1\}$ ayant α comme sommet et tel que pour tout sommet $B\beta$ de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$, on a $(B\beta,a,\gamma) \in Arc_{\mathfrak{D}(G,\alpha)}$ et $\gamma \in S_{\mathfrak{D}(G,\alpha)}$ si et seulement si

$$B = a \ , \ \gamma = \beta \ , \ a \in \Sigma$$

$$\text{ou} \quad B \; G \; a\delta \ , \ \gamma = \delta\beta \ , \ \delta \notin \Sigma(\Sigma \cup N)^* \quad \text{si } a = 1 \ .$$

Un exemple de gdg de grammaire algébrique est donné à la figure 3.1 .

Soit la grammaire algébrique $G = \{ (A,aa) , (A,BbAA) , (B,1) \}$ sur l'alphabet $\{a,b\}$.

Le graphe des dérivations gauches de G à partir de A a pour représentation :

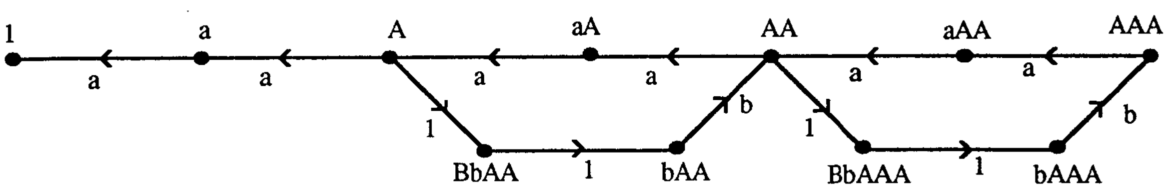


Fig. 3.1 . Graphe des dérivations gauches d'une grammaire algébrique .

Considérons les grammaires algébriques sur $\{a,b\}$ suivantes :

$G = \{ (A,a) , (A,bAA) \}$

$G_1 = \{ (A,a) , (A,bBA) , (B,aA) , (B,bBB) \}$

$G_2 = \{ (A,a) , (A,bAB) , (B,aA) , (B,bBB) \}$

$G_3 = \{ (A,a) , (A,bAAA) \}$

$H = \{ (A,a) , (A,bB) , (B,aA) , (B,bBA) \}$

$H' = \{ (A',a) , (A',bA'B') , (B',a) , (B',bB'B') \}$

$\mathfrak{D}(G,A)$ est isomorphe au graphe de la figure 2.1 . Pour $i \in \{1,2,3\}$, $\mathfrak{D}(G_i,A)$ est isomorphe au $i^{ème}$ graphe de la figure 2.3 . $\mathfrak{D}(H,A)$ et $\mathfrak{D}(H',A')$ sont isomorphes respectivement au premier et deuxième graphe de la figure 2.2 . Aussi

$$\mathfrak{D}(H,A) \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{D}(H',A') \text{ i.e. } \mathfrak{D}(H \cup H',A) \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{D}(H \cup H',A') .$$

De façon générale, on a

$$\mathfrak{D}(G,\alpha) \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{D}(H,\beta) \text{ ssi } \mathfrak{D}(G \cup H',\alpha) \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{D}(G \cup H',\beta') .$$

avec $Dom(G) \cap Dom(H') = \emptyset$ et (H',β') est obtenu à partir de (H,β) par renommage des lettres de $Dom(G) \cap Dom(H)$.

Par conséquent et sans perte de généralité, on restreint l'étude de la bisimulation des graphes des dérivations gauches à une seule grammaire algébrique.

4. Bisimulation pour une grammaire algébrique

Dorénavant G est une grammaire algébrique sur Σ , $N = \mathrm{Dom}(G)$ et $V = \Sigma \cup N$ est l'ensemble des lettres terminales et non-terminales de G . On définit la bisimulation en tant que relation binaire sur V^* , définie par :

$\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ si il existe une bisimulation R de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ sur $\mathfrak{D}(G,\beta)$ telle que $\alpha\, R\, \beta$.

La valuation $\tau(\alpha)$ d'un mot α est la plus petite longueur des chemins de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ allant de α à 1 s'il existe un tel chemin, et sinon $\tau(\alpha) = \infty$. La proposition ci-dessous indique que la valuation τ est un homomorphisme de $(V^*,\cdot)$ dans $(N\cup\{\infty\},+)$ et que la bisimulation $\underline{\leftrightarrow}$ est une congruence incluse dans le noyau de la valuation.

Proposition 4.1 . On a les propriétés suivantes :

a) $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$

b) si $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ alors $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$

c) si $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ et $\gamma \underline{\leftrightarrow} \delta$ alors $\alpha\gamma \underline{\leftrightarrow} \beta\delta$

La preuve ne présente pas de difficulté. L'ensemble des successeurs d'un mot α de V^* par l'étiquette $a \in \Sigma\cup\{1\}$ est l'ensemble $D(\alpha,a) = \{\ \beta \mid (\alpha,a,\beta) \in \mathrm{Arc}_{D(G,\alpha)}\ \}$. On adapte la notion de relation auto-prouvable [Co 83] à la relation de bisimulation. Une relation R binaire sur V^* est auto-bisimulable si la plus petite congruence contenant R peut bisimuler les sommets successeurs des paires de R . On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un ensemble $\{E_i \mid i \in I\}$ éventuellement vide de parties non vides de E ($\forall\, i \in I, \varnothing \neq E_i \subseteq E$) tel que $\cup\{E_i \mid i \in I\} = E$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.

Définition. Une relation R binaire sur V^* est auto-bisimulable si pour tout (α,β) de R et pour tout a de $\Sigma\cup\{1\}$, $D(\alpha,a) = \varnothing \Leftrightarrow D(\beta,a) = \varnothing$, et dans le cas non vide, ils existent des partitions $\{E_i \mid i \in I\}$ et $\{F_i \mid i \in I\}$ de respectivement $D(\alpha,a)$ et $D(\beta,a)$ telles que $\quad \forall\, i \in I,\ E_i \times F_i \subseteq \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$

L'intérêt d'une relation auto-bisimulable est donné par la proposition ci-dessous.

Proposition 4.2 . Si R est auto-bisimulable alors $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} \subseteq \underline{\leftrightarrow}$

Preuve : soient $\alpha \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} \beta$ pour une relation R auto-bisimulable, et considérons la relation

$$S = \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} \cap (S_{\mathfrak{D}(G,\alpha)} \times S_{\mathfrak{D}(G,\beta)}) \ .$$

Par récurrence sur $n \geq 0$, on montre

si $\lambda \, (\underset{R}{\longleftrightarrow})^n \, \mu$ et $\lambda' \in D(\lambda,a)$ alors il existe $\mu' \in D(\mu,a)$ et $\lambda' \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} \mu'$.

Par symétrie, on en déduit que S est une bisimulation de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ sur $\mathfrak{D}(G,\beta)$ avec $\alpha \, S \, \beta$,

d'où $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$. ♦

5. Bisimulation pour une grammaire algébrique réduite

Dorénavant la grammaire algébrique G est (faiblement) réduite, c'est-à-dire qu'il existe un mot terminal engendré par G à partir de toute lettre non-terminale, i.e. $\forall A \in N$, $\tau(A) < \infty$.
L'avantage de se restreindre à une grammaire réduite est que la bisimulation associée est simplifiable.

Proposition 5.1 . Si $\alpha\gamma \underline{\leftrightarrow} \beta\gamma$ ou $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \gamma\beta$ alors $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

Preuve : i) Soit $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \gamma\beta$. Considérons un chemin de $\mathfrak{D}(G,\gamma)$ de longueur $\tau(\gamma)$ allant de γ à 1 . Comme un tel chemin est de longueur minimale et que $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \gamma\beta$, il existe un chemin de $\mathfrak{D}(G,\gamma)$ de longueur $\tau(\gamma)$ allant de γ à δ et $\alpha \underline{\leftrightarrow} \delta\beta$. D'après b) de la prop. 4.1 , $\tau(\gamma\alpha) = \tau(\gamma\beta)$ et $\tau(\alpha) = \tau(\delta\beta)$. Par a) de la proposition 4.1 et du fait que G est réduite, on a $\tau(\delta) = 0$ i.e. $\delta = 1$, donc $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.
ii) Soit $\alpha\gamma \underline{\leftrightarrow} \beta\gamma$. Il existe une bisimulation R de $\mathfrak{D}(G,\alpha\gamma)$ sur $\mathfrak{D}(G,\beta\gamma)$ telle que $\alpha\gamma \, R \, \beta\gamma$. Alors $S = \{ (\lambda,\mu) \mid \lambda\gamma \, R \, \mu\gamma \} \cap (S_{\mathfrak{D}(G,\alpha)} \times S_{\mathfrak{D}(G,\beta)})$ est une bisimulation de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ sur $\mathfrak{D}(G,\beta)$ telle que $\alpha \, S \, \beta$; d'où $\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$ ◆

La bisimulation pour une grammaire algébrique réduite étant une congruence simplifiable, on en déduit une propriété de découpage des paires de mots bisimulables.

Proposition 5.2 . Soient $A\alpha \underline{\leftrightarrow} B\beta$ avec $A , B \in V$ et $\tau(A) \geq \tau(B)$.
Il existe $\gamma \in V^*$ tel que $A \underline{\leftrightarrow} B\gamma$ et $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$.

Preuve : Considérons un chemin de $\mathfrak{D}(G,B)$ de longueur $\tau(B)$ allant de B à 1 . Comme $\tau(A) \geq \tau(B)$ et $A\alpha \underline{\leftrightarrow} B\beta$, il existe un chemin de $\mathfrak{D}(G,A)$ de longueur $\tau(B)$ allant de A à γ et tel que $\gamma\alpha \underline{\leftrightarrow} \beta$. Par c) de la prop. 4.1 , $A\alpha \underline{\leftrightarrow} B\beta \underline{\leftrightarrow} B\gamma\alpha$ et par la prop. 5.1 , $A \underline{\leftrightarrow} B\gamma$. ◆

On va établir que la bisimulation est finiment engendrée et qu'un système générateur est effectivement constructible à partir de la grammaire. Pour cela, on définit une classe constructible de relations, contenant des systèmes générateurs de la bisimulation.

Définition. Une relation R binaire sur V^* est dite fondamentale si elle vérifie les trois conditions suivantes :

i) $Dom(R) \subseteq N$ et $Im(R) \subseteq (V\text{-}Dom(R))^*$

ii) R est fonctionnelle : si $A\,R\,\alpha$ et $A\,R\,\beta$ alors $\alpha = \beta$

iii) $R \subseteq Ker(\tau)$: si $A\,R\,\alpha$ alors $\tau(A) = \tau(\alpha)$

Proposition 5.3 . On a les trois propriétés suivantes :

a) toute relation R fondamentale est finie, et $\underset{R}{\longrightarrow}$ est canonique

b) l'ensemble des relations fondamentales et auto-bisimulables est constructible effectivement à partir de G .

Preuve : Soit une relation R fondamentale. R est finie comme ensemble de paires de mêmes valuations (condition iii) et au plus égales à la valuation maximale des lettres non-terminales. D'après la condition i) de la définition, toute dérivation selon R à partir de $\alpha \in V^*$ est de longueur au plus égale à celle du mot α , donc $\underset{R}{\longrightarrow}$ est nœthérienne. Comme $Dom(R) \subseteq N$ et R est fonctionnelle, $\underset{R}{\longrightarrow}$ est confluente. En définitive $\underset{R}{\longrightarrow}$ est canonique.
On peut construire effectivement à partir de la grammaire G , l'ensemble fini des relations fondamentales, et comme pour toute relation R fondamentale $\underset{R}{\longrightarrow}$ est canonique, alors $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est décidable et on peut décider si une relation fondamentale est auto-bisimulable. ◆

Il nous reste à indiquer les relations fondamentales et auto-bisimulables qui sont systèmes générateurs de la bisimulation.

Théorème 1. Toute relation fondamentale, auto-bisimulable et maximale pour l'inclusion engendre la bisimulation .

Preuve : Soit une relation R fondamentale, incluse dans $\underline{\leftrightarrow}$ et qui soit maximale pour l'inclusion, i.e. si $R \subseteq S \subseteq \underline{\leftrightarrow}$ et S est fondamentale alors $S = R$.

i) Montrons $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} = \leftrightarrow$. Par définition $R \subseteq \leftrightarrow$ et comme $\leftrightarrow$ est une congruence, $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} \subseteq \leftrightarrow$.
Inversement, soit $\alpha \leftrightarrow \beta$. D'après a) de la prop. 5.3 , $\underset{R}{\longrightarrow}$ est canonique, donc les formes normales $\alpha{\downarrow}R$ et $\beta{\downarrow}R$ de α et β existent, et comme $\overset{*}{\underset{R}{\longrightarrow}} \subseteq \leftrightarrow$, on a $\alpha{\downarrow}R \leftrightarrow \beta{\downarrow}R$.
Supposons $\alpha{\downarrow}R \neq \beta{\downarrow}R$. D'après b) de la prop. 4.1 , $\tau(\alpha{\downarrow}R) = \tau(\beta{\downarrow}R)$, aussi $\alpha{\downarrow}R = \lambda x\gamma$, $\beta{\downarrow}R = \lambda y\delta$, $x,y \in V$ et $x \neq y$. Par la prop. 5.1 , $x\gamma \leftrightarrow y\delta$ et sans perte de généralité, on suppose $\tau(x) \geq \tau(y)$. Par la prop. 5.2 , il existe $\rho \in V^*$ tel que $x \leftrightarrow y\rho$, ce qui est en contradiction avec la maximalité de R . Par conséquent, $\alpha{\downarrow}R = \beta{\downarrow}R$, d'où $\alpha \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} \beta$.
ii) Soit une relation S fondamentale, auto-bisimulable et maximale pour l'inclusion. Par la prop. 4.2 $S \subseteq \leftrightarrow$. On peut donc considérer une relation R contenant S , fondamentale, incluse dans $\leftrightarrow$ et maximale pour l'inclusion. Par i) , $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} = \leftrightarrow$ donc R est auto-bisimulable et par maximalité de S, $S = R$, d'où le théorème 1 . ◆

De la proposition 5.3 et du théorème 1 , on déduit le résultat de [Ba-Be-Kl 87].

Corollaire. La bisimulation pour toute grammaire algébrique réduite est décidable .

Il reste à déduire le résultat annoncé à l'introduction. A partir d'une grammaire algébrique réduite G , on extrait effectivement une relation R fondamentale, auto-bisimulable et maximale pour l'inclusion. Si G est en forme de Greibach , i.e. $\mathrm{Im}(G) \subseteq \Sigma.V^* \cup \{1\}$, alors la grammaire suivante

$$G{\downarrow}R = \{ (A,\alpha{\downarrow}R) \mid A\, G\, \alpha \text{ et } A \notin \mathrm{Dom}(R) \}$$

convient parce que l'on aura pour tout mot α de V^* , $\mathrm{Min}(\mathfrak{D}(G,\alpha))$ isomorphe à $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,\alpha{\downarrow}R)$. Cependant pour $G = \{(A,a),(A,B),(B,b)\}$, on a $R = \{(B,b)\}$ et $G{\downarrow}R = \{(A,a),(A,b)\}$, donc $\mathrm{Min}(\mathfrak{D}(G,A))$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,A)$. Une façon de préserver les transitions du mot vide est que les mots de R ne possèdent plus de lettre terminale : chaque lettre terminale est remplacée par une lettre non-terminale la produisant. Pour se faire, on considère une bijection f de Σ sur un alphabet Γ disjoint de V . On étend f en un homomorphisme alphabétique de V^* sur $(\Gamma \cup N)^*$ avec f constant sur N . On définit

$$S = \{ (A,f(\alpha)) \mid A\, R\, \alpha \}$$

une application g de V^* sur $(\Gamma \cup N)^*$ définie par $g(\alpha) = (f(\alpha)){\downarrow}S = f(\alpha{\downarrow}S)$

$$G{\downarrow}R = \{(A,ag(\alpha)) \mid A\ G\ a\alpha\ ,\ A \notin Dom(R)\ ,\ a \in \Sigma \text{ ou } (a{=}1 \text{ si } a\alpha \notin \Sigma.V^*)\ \}$$
$$\cup\ \{(f(a),a) \mid a \in \Sigma\ \}\ .$$

La grammaire $G{\downarrow}R$ convient : le graphe canonique de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ pour tout mot α de V^* est isomorphe à $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,g(\alpha))$.

Proposition 5.4 . $\forall\ \alpha \in V^*$, $Min(\mathfrak{D}(G,\alpha)) \leftrightarrow \mathfrak{D}(G{\downarrow}R,g(\alpha))$.

Preuve : La relation $S = \{\ (\lambda,g(\lambda)) \mid \lambda \in S_{\mathfrak{D}(G,\alpha)}\ \}$ est une réduction de $\mathfrak{D}(G,\alpha)$ sur $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,g(\alpha))$, et par la proposition 2.2 , on a $Min(\mathfrak{D}(G,\alpha)) \leftrightarrow Min(\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,g(\alpha)))$.
Soient λ et μ des sommets bisimulables de $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,g(\alpha))$. De façon identique à la preuve i) du théorème, on obtient $\lambda = \mu$; et par la prop. 2.1 $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,g(\alpha))$ a un graphe canonique isomorphe à lui-même. ♦

Exemple : Soit la grammaire (algébrique réduite) $G = \{(A,a),(A,BC),(B,b),(C,aA),(C,bCA)\}$. Un système générateur de la bisimulation selon G est $R = \{(C,AA),(B,b)\}$ et la transformée de G selon R est $G{\downarrow}R = \{(A,a),(A,YAA),(X,a),(Y,b)\}$. Par la proposition 5.4 , $Min(\mathfrak{D}(G,A))$ est isomorphe à $\mathfrak{D}(G{\downarrow}R,A)$.

Du b) de la proposition 5.3 , du théorème 1 et de la proposition 5.4 , on aboutit au résultat principal de cet article.

Théorème 2 . On peut transformer de façon effective toute grammaire G algébrique et réduite en une grammaire H algébrique et réduite de sorte que le graphe canonique du gdg de G à partir de tout mot α soit isomorphe au gdg de H à partir d'un mot déterminé effectivement à l'aide de G et de α .

Conclusion

La méthode présentée ici est applicable pour décider de la bisimulation des gdg des grammaires simples quelconques (réduites ou non) [Ca 86] . Cependant, sa généralisation à n'importe quelle grammaire algébrique (non réduite) pose de sérieuses difficultés.

Références

Ba-Be Kl 87	J.C.M. Baeten , J.A. Bergstra , J.W. Klop "Decidability of bisimulation equivalence for processes generating context-free languages" , LNCS 259 , pp 94-111 .
Ca 86	D. Caucal "Décidabilité de l'égalité des langages algébriques infinitaires simples" , LNCS 210 , pp 37-48 .
Co 81	P.M. Cohn "Universal algebra" , Klumer Academic Publishers Group .
Co 83	B. Courcelle "An axiomatic approach to the KH algorithms" , Math. Systems Theory 16 , pp 191-231 .
Mu-Sc 85	D. Muller , P. Schupp "The theory of ends, pushdown automata, and second order logic" , TCS 37 , pp 51-75 .
Pa 81	D. Park "Concurrency and automata on infinite sequences" , LNCS 104 , pp 167-183 .

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique