

# Etude limite de l'insertion d'une plaque mince dans un massif tridimensionnel

M. Aufranc

► **To cite this version:**

M. Aufranc. Etude limite de l'insertion d'une plaque mince dans un massif tridimensionnel. RR-0868, INRIA. 1988. <inria-00075686>

**HAL Id: inria-00075686**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075686>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITE DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 868

### ETUDE LIMITE DE L'INSERTION D'UNE PLAQUE MINCE DANS UN MASSIF TRIDIMENSIONNEL

**Martial AUFRANC**

**JUILLET 1988**



\* R R 8 6 8 \*

ETUDE LIMITE DE L'INSERTION D'UNE PLAQUE MINCE  
DANS UN MASSIF TRIDIMENSIONNEL

Martial AUFRANC  
INRIA, Rocquencourt

Résumé :

CIARLET, LE DRET & NZENGWA [3] considèrent une famille de problèmes constitués d'une plaque rectangulaire d'épaisseur  $2\epsilon$ , insérée dans un parallélépipède rectangle avec une profondeur constante  $\beta$ . Ils démontrent que cette famille admet, en un certain sens, un problème limite lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Notre but est de prouver que ce résultat tombe en défaut si le paramètre  $\beta$  est supposé variable, proportionnel à une puissance de  $\epsilon$ .

LIMIT STUDY OF A THIN PLATE INSERTED  
INTO A THREE-DIMENSIONAL STRUCTURE

Abstract :

CIARLET, LE DRET & NZENGWA [3] consider a family of problems consisting of a rectangular plate with thickness  $2\epsilon$ , inserted into a rectangular parallelepiped with a constant depth  $\beta$ . They prove that, as  $\epsilon$  approaches zero, this family converges, in a certain way, towards a limit problem. We show that this result cannot be established if the parameter  $\beta$  is assumed to vary as a power of  $\epsilon$ .

## 1. PRESENTATION DE LA METHODE

### 1.1. Rappels des données du problème

Les données du problème  $\mathcal{Q}_\epsilon$  consistent en deux matériaux linéairement élastiques : un parallélogramme  $\mathcal{Q}_\beta^\epsilon$  de constantes de Lamé  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$  et une plaque  $\Omega^\epsilon$  de constantes de Lamé  $(\lambda^\epsilon, \mu^\epsilon)$ , qui s'enfiche dans la partie tridimensionnelle sur une longueur  $\beta(\epsilon)$ , comme le suggèrent les figures 1 à 5. On pose donc :

$$\mathcal{Q}_\beta^\epsilon = \mathcal{Q} \setminus \tilde{\Omega}_\beta^\epsilon, \text{ où :}$$

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; -a_1 < x_1 < 0, |x_2| < a_2, -a_3 < x_3 < a_3\},$$

$$\Omega^\epsilon = \omega(\epsilon) \times ]-\epsilon, \epsilon[ \\ \text{avec } \omega(\epsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; -\beta(\epsilon) < x_1 < b_1, |x_2| < a_2\},$$

$$\Omega_\beta^\epsilon = \omega_\beta(\epsilon) \times ]-\epsilon, \epsilon[ \\ \text{avec } \omega_\beta(\epsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; -\beta(\epsilon) < x_1 < 0 ; |x_2| < a_2\},$$

$$\gamma_0 = \{(b_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_2| \leq a_2\}; \Gamma_0^\epsilon = \gamma_0 \times ]-\epsilon, \epsilon[, \mathcal{I}^\epsilon = \text{int}(\mathcal{Q} \setminus \Omega^\epsilon)^-,$$

où  $a_1, a_2, a_3, b_1$  sont des constantes strictement positives. Enfin, la plaque est encadrée sur  $\Gamma_0^\epsilon$ .

CIARLET, LE DRET & NZENGWA [2] [3] étudient le cas :  $\beta(\epsilon) = \beta > 0$ , où  $\beta$  est une constante, et établissent, sous certaines hypothèses sur les forces appliquées et les constantes de Lamé fonction de  $\epsilon, \lambda^\epsilon$  et  $\mu^\epsilon$ , en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, un problème limite posé sur un ouvert  $\tilde{\Omega}$ , translaté de  $\mathcal{Q}$ , et l'ouvert  $w - w(\epsilon)$  ne dépendant de  $\epsilon$  que par l'intermédiaire de  $\beta(\epsilon)$ , et ici  $\beta(\epsilon) = \beta$ .

Notre propos est de considérer les cas où  $\beta(\epsilon) = \beta \epsilon^a$ ,  $\beta$  et  $a$  étant deux constantes strictement positives telles que les données géométriques gardent un sens. Sans perte de généralité, il est clair que l'on peut poser :  $\beta = 1$ .

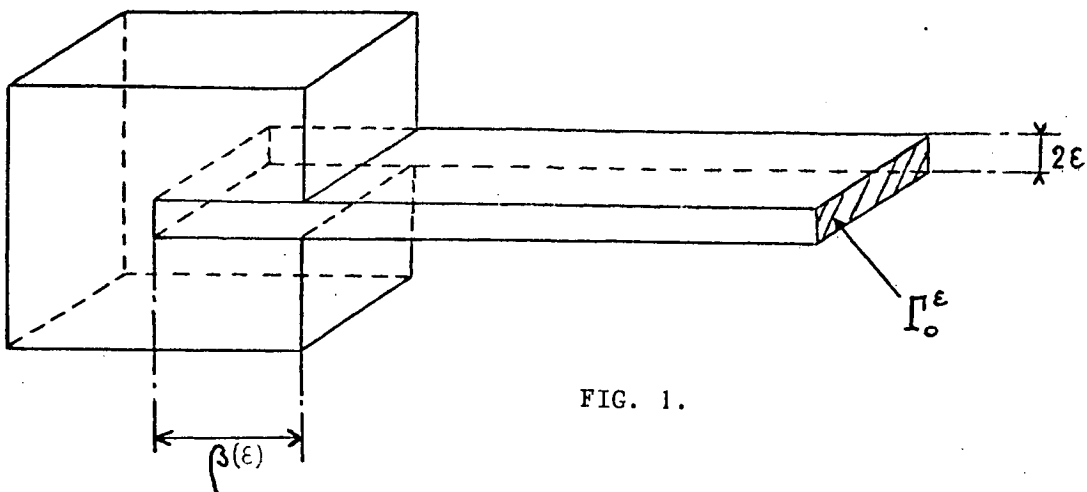


FIG. 1.

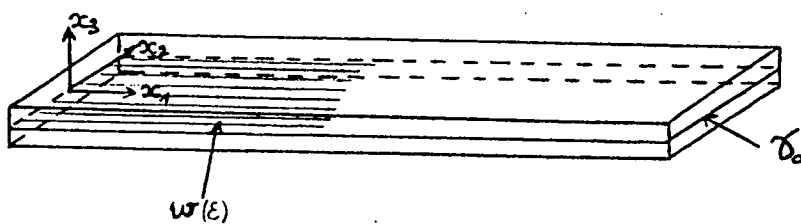


FIG. 2 :  $\Omega^\epsilon = \omega(\epsilon) \times ]-\epsilon, \epsilon[$

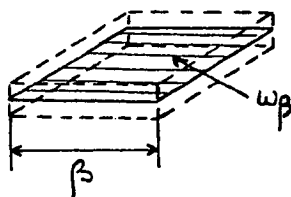


FIG. 3 :  $\Omega_\beta^\epsilon = \omega_\beta(\epsilon) \times ]-\epsilon, \epsilon[$

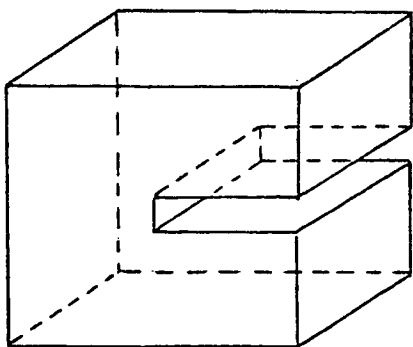


FIG. 4 :  $\mathcal{B}^\epsilon$

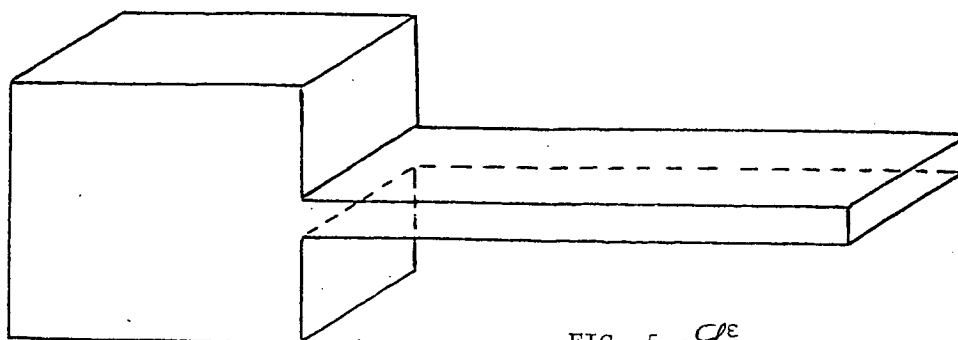


FIG. 5 :  $\mathcal{L}^\epsilon$

## 1.2. Construction d'un contre-exemple

L'énergie élastique du système s'écrit, de façon classique :

$$(1) \quad J_{el}^\epsilon(v^\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}_\beta^\epsilon} \tilde{\mathcal{A}} e^\epsilon(v^\epsilon) : e^\epsilon(v^\epsilon) dx^\epsilon + \frac{1}{2} \int_{\Omega^\epsilon} \mathcal{A}^\epsilon e^\epsilon(v^\epsilon) : e^\epsilon(v^\epsilon) dx^\epsilon ,$$

avec :  $v^\epsilon \in V^\epsilon = \{v^\epsilon \in H^1(\mathcal{S}^\epsilon) ; v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\epsilon\}$  ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (e^\epsilon(v^\epsilon))_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_i^\epsilon v_j^\epsilon + \partial_j^\epsilon v_i^\epsilon) \text{ est le tenseur des déformations,} \\ (\tilde{\mathcal{A}} e^\epsilon(v^\epsilon))_{ij} = \tilde{\lambda} e_{pp}^\epsilon(v^\epsilon) \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) \\ (\mathcal{A}^\epsilon e^\epsilon(v^\epsilon))_{ij} = \lambda^\epsilon e_{pp}^\epsilon(v^\epsilon) \delta_{ij} + 2\mu^\epsilon e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) . \end{array} \right.$$

La convention de sommation usuelle est utilisée.

Les coefficients de Lamé du massif,  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$ , seront supposés indépendants de  $\epsilon$ , sans perte de généralité puisque l'on s'est placé dans le cadre de l'élasticité linéarisée. Les contre-exemples présentés s'appliqueront en particulier dans le cas des hypothèses faites par CIARLET, LE DRET & NZENGWA [3].

La mesure superficielle de  $\Gamma_0^\epsilon$  étant strictement positive, un système de forces appliquées étant donné, il existe un et un seul déplacement  $u^\epsilon$  défini sur  $\mathcal{S}^\epsilon$  qui minimise l'énergie totale du système, solution du problème posé.

Notre but est de construire un champ de déplacement sur  $\mathcal{S}^\epsilon$ , de norme minorée par une constante strictement positive indépendante de  $\epsilon$  dans  $H^1(\mathcal{S}^\epsilon)$ , mais impliquant une énergie élastique tendant vers 0 avec  $\epsilon$  : ainsi sera mise en défaut une éventuelle coercivité uniforme par rapport à  $\epsilon$  de l'énergie totale, première étape du raisonnement de CIARLET, LE DRET & NZENGWA [3] (lemme 1).

Pour cela, nous allons "raccorder" dans une partie  $R^\epsilon$  du massif entourant la jonction, un champ de déplacement nul dans la plaque avec un champ de déplacement correspondant à une rotation autour de  $\vec{e}_2$  dans  $\tilde{\Omega}^\epsilon \setminus R^\epsilon$ .

L'énergie élastique  $J_{el}^\epsilon$  du système se concentre donc sur  $R^\epsilon$  ; d'autre part, si  $u(\epsilon)$  désigne le déplacement construit sur  $\mathcal{L}^\epsilon$  :  $\|u(\epsilon)\|_{H^1(\mathcal{L}^\epsilon)} \geq \|\vec{e}_2 \wedge \vec{0x}\|_{H^1(\Omega^\epsilon \setminus R^\epsilon)}$ .

Notre problème consiste donc à déterminer  $R^\epsilon$  et  $u(\epsilon)$  de telle façon que :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_{el}^\epsilon(u(\epsilon)) = 0$

et :  $\|\vec{e}_2 \wedge \vec{0x}\|_{H^1(\Omega^\epsilon \setminus R^\epsilon)} \geq C > 0$  où  $C$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ .

Remarque 1.2.1 : Intuitivement, on imagine qu'à la limite, la plaque "d'épaisseur nulle" ne pourra "supporter" le massif, la jonction se faisant sur un segment.

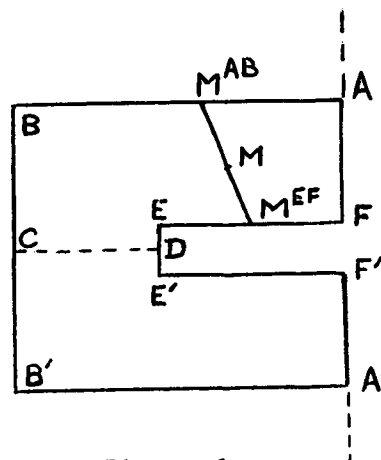
## 2. ETUDE PRATIQUE

### 2.1. Hypothèses géométriques

Utilisons la symétrie géométrique du problème pour construire le contre-exemple sur une section suivant un plan  $(x_1, x_3)$ , par exemple  $(0, x_1, x_3)$ . Le résultat en découlera.

Supposons donc que le raccordement des deux champs de déplacement puisse se faire sur un domaine entourant la fissure, de demi-hauteur  $\epsilon + \epsilon^p$ , de longueur  $\epsilon^a + \epsilon^q$ , comme le suggère la figure 6. Pour des raisons de symétries, l'étude sur le domaine des  $x_3 \geq 0$  suffira. L'existence de la constante  $C$  sera alors claire.

Désormais, nous noterons :  $X = x_1$  ,  $Y = x_3$ .



$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \epsilon^a \\ \overline{DE} &= \epsilon \\ \overline{FA} &= \epsilon^p \\ \overline{CD} &= \epsilon^q \end{aligned}$$

Figure 6

Imposons donc les déplacements  $V$  sur les segments  $[A,B]$ ,  $[B,C]$ ,  $[D,E]$  et  $[E,F]$  :

- pour  $M$ , un point parcourant  $[D,E] \cup [E,F]$ , posons :

$$V(M) = 0 ;$$

- pour  $M$ , un point parcourant  $[A,B]$ , posons :

$$V(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon + \epsilon^p \\ 0 \\ -X \end{bmatrix} , \text{ avec } -\epsilon^a - \epsilon^q \leq X \leq 0 ;$$

- pour  $M$ , un point parcourant  $[B,C]$ , posons :

$$V(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \\ \epsilon^a + \epsilon^q \end{bmatrix} , \text{ avec } 0 \leq Y \leq \epsilon + \epsilon^p .$$

Nous allons interpoler linéairement les valeurs de ces déplacements sur des droites appropriées.

## 2.2. Raccordement des déplacements, calcul des tenseurs de déformations

L'application :  $M^{EF} \in [E,F] \mapsto M^{AB} \in [A,B]$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{M^{EF}} \mapsto X_{M^{AB}} = \frac{\epsilon^q + \epsilon^a}{\epsilon^a} X_{M^{EF}} \\ Y_{M^{EF}} = \epsilon \mapsto Y_{M^{AB}} = \epsilon + \epsilon^p \end{array} \right.$$

est une bijection de  $[E,F]$  sur  $[A,B]$ .

Tout point  $M(X,Y)$  de  $[M^{EF}, M^{AB}]$  peut s'écrire :

$$M(X,Y) = \lambda(X,Y)M^{AB} + (1-\lambda(X,Y))M^{EF} ,$$

$$\text{avec : } \lambda(X,Y) = \frac{Y-\epsilon}{\epsilon^p} .$$

Nous choisirons donc le déplacement au point  $M(X,Y)$ ,  $M$  appartenant au trapèze  $(ABEF)$ , de la forme :

$$(3) \quad V(M) = \lambda(X,Y)V(M^{AB}) = (Y-\epsilon) \begin{bmatrix} \epsilon^{1-p+1} \\ 0 \\ -\frac{X(1+\epsilon^{a-q})}{Y-\epsilon+\epsilon^{p-q+a}} \end{bmatrix} ,$$



puisque :  $X = \frac{Y-\epsilon}{e^p} X^{AB} + (1 - \frac{Y-\epsilon}{e^p}) \frac{\epsilon^a}{\epsilon^{q+\epsilon} a} X^{AB}$  , donc :  $X^{AB} = \frac{X \epsilon^p (1+\epsilon^{a-q})}{Y-\epsilon+\epsilon^{p+q+a}}$  .

Calculons maintenant le tenseur des déformations relatif à ce champ de déplacement :

$$\partial_X V_3(M) = - \left[ 1+\epsilon^{a-q} - \frac{\epsilon^{p-q+a} (1+\epsilon^{a-q})}{Y-\epsilon+\epsilon^{p+q+a}} \right]$$

$$\partial_Y V_1(M) = \epsilon^{1-p+1}$$

$$\partial_Y V_3(M) = - \frac{\epsilon^{p-q+a} X (1+\epsilon^{a-q})}{(Y-\epsilon+\epsilon^{p+q+a})^2}$$

En résumé, V désignant le déplacement en un point M(X,Y) appartenant à (ABEF) :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} e_{11}(V) = e_{12}(V) = e_{22}(V) = e_{32}(V) = 0 \\ e_{13}(V) = - \frac{\epsilon^{a-q}}{2} \left[ 1-\epsilon^{q-a-p+1} - \frac{\epsilon^p (1+\epsilon^{a-q})}{Y-\epsilon+\epsilon^{p+q+a}} \right] \\ e_{33}(V) = - \frac{\epsilon^{p-q+a} X (1+\epsilon^{a-q})}{(Y-\epsilon+\epsilon^{p+q+a})^2} \end{array} \right.$$

On opère de la même façon pour un point M appartenant au trapèze (BCDE) ; son déplacement sera :

$$(5) \quad V(M) = (X+\epsilon^a) \begin{bmatrix} \frac{Y(1+\epsilon^{1-p})}{X+\epsilon^a - \epsilon^{q-p+1}} \\ 0 \\ -1-\epsilon^{a-q} \end{bmatrix}$$

De même, on calcule le tenseur des déformations, V désignant le déplacement en un point M(X,Y) appartenant à (BCDE) :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} e_{33}(V) = e_{22}(V) = e_{12}(V) = e_{32}(V) = 0 \\ e_{13}(V) = \frac{\epsilon^{1-p}}{2} \left[ 1-\epsilon^{a-q+p-1} + \frac{(1+\epsilon^{1-p}) \epsilon^q}{X+\epsilon^a - \epsilon^{q-p+1}} \right] \\ e_{11}(V) = - \frac{Y \epsilon^{q-p+1} (1+\epsilon^{1-p})}{(X+\epsilon^a - \epsilon^{q-p+1})^2} \end{array} \right.$$

2.3. Majoration de la norme du tenseur des déformations dans  $L^2(\mathcal{I}^\epsilon)$

Revenons tout d'abord au trapèze (ABEF). Calculons les normes quadratiques des composantes non nulles du tenseur des déformations, explicité en (4) ; Y varie de  $\epsilon$  à  $\epsilon + \epsilon^P$ , X de  $(Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a}) / (-\epsilon^{P-q})$  à 0. Il vient :

$$\begin{aligned} \|e_{13}(V)\|_{L^2((ABEF))}^2 &= \\ & \left| \int_{\epsilon}^{\epsilon + \epsilon^P} \left( \frac{Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a}}{\epsilon^{P-q}} \right) \frac{\epsilon^{2a-2q}}{4} \left( 1 - \epsilon^{q-a-p+1} - \frac{\epsilon^P(1 + \epsilon^{a-q})}{Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a}} \right)^2 dY \right| \\ & \leq \frac{\epsilon^{2a-2q}}{4} \left( \left| \int_{\epsilon}^{\epsilon + \epsilon^P} \frac{Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a}}{\epsilon^{P-q}} dY \right| (1 + \epsilon^{2q-2a-2p+2}) + \right. \\ & \quad \left. + (1 + \epsilon^{a-q})^2 \epsilon^{q+p} \left| \int_{\epsilon}^{\epsilon + \epsilon^P} \frac{dY}{Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a}} \right| \right), \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \|e_{13}(V)\|_{L^2((ABEF))}^2 &\leq \\ & \frac{\epsilon^{2a+p-q}}{8} \left\{ (1 + \epsilon^{2q-2a-2p+2}) (1 + 2\epsilon^{a-q}) + 2(1 + \epsilon^{a-q})^2 \left| \text{Ln} \left( \frac{1 + \epsilon^{a-q}}{\epsilon^{a-q}} \right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} (7) \quad \|e_{13}(V)\|_{L^2((ABEF))}^2 &\leq \\ & \frac{\epsilon^{2a+p-q}}{4} (1 + \epsilon^{a-q}) \left[ 1 + \epsilon^{2q-2a-2p+2} + (1 + \epsilon^{a-q}) \left| \text{Log} \left( \frac{1 + \epsilon^{a-q}}{\epsilon^{a-q}} \right) \right| \right]. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \|e_{33}(V)\|_{L^2((ABEF))} &= \left| \int_{\epsilon}^{\epsilon + \epsilon^P} \left( \int_0^1 \frac{X \epsilon^{P-q+a} (1 + \epsilon^{a-q})}{(Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a})^2} dX \right)^2 dY \right| \\ &= \frac{\epsilon^{q-p+2a} (1 + \epsilon^{a-q})^2}{3} \int_{\epsilon}^{\epsilon + \epsilon^P} \frac{1}{Y - \epsilon + \epsilon^{P-q+a}} dY, \end{aligned}$$

et finalement :

$$(8) \quad \|e_{33}(V)\|_{L^2((ABEF))}^2 = \frac{\epsilon^{q-p+2a}}{3} (1 + \epsilon^{a-q})^2 \left| \text{Log} \left( \frac{1 + \epsilon^{-q+a}}{\epsilon^{-q+a}} \right) \right|.$$

De la même façon s'opèrent les calculs sur le trapèze (BCDE) ; X varie alors de  $-\epsilon^a$  à  $-\epsilon^a - \epsilon^q$ , Y variant de 0 à  $-\epsilon^{p-q}X + \epsilon - \epsilon^{p-q+a}$ .

On obtient alors :

$$(9) \quad \| e_{13}(v) \|_{L^2((BCDE))}^2 \leq \frac{\epsilon^{2-p+q}}{4} (1+\epsilon^{1-p}) [1+\epsilon^{2p-2q+2a-2} + (1+\epsilon^{1-p}) | \text{Log} \frac{1+\epsilon^{1-p}}{\epsilon^{1-p}} | ] ,$$

$$(10) \quad \| e_{11}(v) \|_{L^2((BCDE))}^2 = \frac{\epsilon^{p-q+2}}{3} (1+\epsilon^{1-p})^2 | \text{Log} \left( \frac{1+\epsilon^{-p+1}}{\epsilon^{-p+1}} \right) |$$

### 3. ETUDE DES PARAMETRES p,q

Nous voulons que les majorants des expressions (7) (8) (9) et (10) tendent vers 0 avec  $\epsilon$  - et ainsi en sera-t-il de  $J_{e1}^\epsilon$ . Par conséquent, il faut étudier les puissances de  $\epsilon$  qui y interviennent.

Notons que le résultat n'est pas immédiat : si par exemple nous avons pris  $q = a$  et  $p = 1$ , (8) et (10) auraient entraîné respectivement :

$$q-p + 2a \geq 0, \text{ soit } a \geq \frac{1}{3},$$

$$p-q + 2 \geq 0, \text{ soit } a \leq 3,$$

ce qui ne donne pas de renseignement, ni pour les petites, ni pour les grandes valeurs de a.

Remarquons déjà que (7) et (9) comportent chacune des termes où a n'intervient pas, ce qui impose sur p et q :

$$(11) \quad q > p-2,$$

$$(12) \quad q > 2p-3.$$

Les inégalités (9) et (10) faisant intervenir la valeur  $p=1$ , procédons comme suit.

3.1. Etude des cas où  $p < 1$

D'après (10), il vient :

$$(13) \quad q < p+2 ,$$

soit  $q < 3$  en particulier.

Supposons alors  $a > q$  ; en particulier, si l'on veut atteindre des petites valeurs de  $a$ , il faudra prendre  $q$  fonction de  $a$ .

D'autre part, (8) implique :

$$(14) \quad p < q+2a ,$$

$$\text{d'où : } p < 3a ,$$

donc, de même, on devra prendre  $p$  fonction de  $a$ . On vérifie que (7)-(10) n'impliquent pas de conditions supplémentaires.

Posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{a}{k} , \text{ où } k \in ]1, +\infty[ , \\ p = \frac{3a}{k'} , \text{ où } k' \in ]1, +\infty[ . \end{array} \right.$$

Etudions ce qu'impliquent les différentes inégalités :

$$(11) \quad \text{entraîne : } k' > \frac{3ak}{a+2k} , \text{ cette condition étant vérifiée en particulier si } k' \geq \frac{3a}{2} ;$$

$$(12) \quad \text{entraîne de même : } k' > \frac{6ak}{a+3k} , \text{ condition vérifiée si l'on prend : } k' \geq 2a ;$$

$$(13) \quad \text{sera de même vérifiée si } k \geq \frac{a}{2} ;$$

$$(14) \quad \text{sera enfin vérifiée si } k' \geq \frac{3}{2} .$$

En résumé, on prendra :  $k \in ] \text{Sup}(1, \frac{a}{2}), +\infty [$  ; enfin, puisque  $p = \frac{3a}{k'} < 1$ , nous prenons :  $k' \in ] \text{Sup}(\frac{3}{2}, 3a), +\infty [$ .

Selon les valeurs de  $a$ , il suffit de considérer, par exemple, les deux cas de figures suivants :

. Si  $a < 1$ , nous choisissons :  $p = \frac{3a}{3} = a$

et  $q = \frac{a}{2}$

(ce qui respecte bien  $p < 1$  et  $q < a$ ) .

. Si  $a \geq 1$ , nous choisissons :  $p = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$

et  $q = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

(ce qui respecte bien  $p < 1$  et  $q < a$ )

Par cette méthode, notre but est atteint : pour toute valeur  $a > 0$ , donc pour toute longueur d'encastrement  $\beta(\epsilon) = \epsilon^a$  acceptable, nous pouvons construire un champ de déplacement de norme constante non nulle dans  $H^1(\mathcal{I}^\epsilon)$ , tel que l'énergie élastique associée  $J_{el}^\epsilon(V)$  tende vers zéro avec  $\epsilon$ .

Examinons rapidement s'il existe d'autres possibilités.

Si on suppose  $a \leq q$ , on obtient de (13) :  $p > q-2 \geq a-2$ , ce qui conduit à :  $a < 3$ . On ne peut donc espérer obtenir un contre exemple pour toutes les valeurs de  $a$  dans ce cas.

### 3.2. Etude des cas où $p \geq 1$

Si l'on suppose dans un premier temps  $q \leq a$ , (14) peut s'écrire :  $a \geq \frac{p}{3} \geq \frac{1}{3}$ , ce qui empêche de fabriquer un contre exemple pour les petites valeurs de  $a$ .

Si enfin  $a < q$ , de (10) on obtient :  $-p+4-q > 0$ , d'où :  $1 \leq p < 4-q < 4-a$ , ce qui donne :  $a < 3$ . Ici, on ne peut espérer fabriquer de contre-exemple pour les grandes valeurs de  $a$ .

## 4. CONCLUSION

Nous avons donné une famille d'exemples pour lesquels l'énergie élastique du système, où  $\beta(\epsilon) = \epsilon^a$  avec  $a > 0$ , n'est pas coercive uniformément par rapport à  $\epsilon$  :

. si  $0 < a < 1$ , en raccordant une rotation d'une partie du massif à un déplacement nul de la plaque comme indiqué en 1.2, avec  $p = a$  et  $q = \frac{a}{2}$ ,

. si  $a \geq 1$ , en faisant de même avec  $p = \frac{3}{4}$  et  $q = \frac{1}{2}$ .

Notons que ces exemples ne prennent pas en compte d'éventuelles hypothèses sur les forces appliquées où les coefficients de Lamé  $\lambda^\epsilon$  et  $\mu^\epsilon$ . Quelles qu'elles soient, la coercivité uniforme par rapport à  $\epsilon$  de l'énergie élastique du système associé au problème  $\mathcal{Q}_\epsilon$  est mise en défaut, et ne peut donc être utilisée directement, comme c'est le cas dans CIARLET, LE DRET & NZENGWA [3], pour établir l'existence et la forme d'un problème limite.

#### REFERENCES

- [1] P.G. CIARLET  
"Modeling and numerical analysis of junctions between elastic structures", Invited Presentation, ICIAM'87 : First International Conference on Industrial and Applied Mathematics, Paris, June 29 - July 3, 1987 (à paraître).
- [2] P.G. CIARLET, H. LE DRET & R. NZENGWA  
"Modélisation de la jonction entre un corps élastique tridimensionnel et une plaque" note présentée par J.L. Lions, C.R. Acad. Sci. Paris, t.305, Série I, p. 55-58, 1987.
- [3] P.G. CIARLET, H. LE DRET & R. NZENGWA  
"Junctions between three-dimensional and two-dimensional linearly elastic structures", J. Math. Pures and Appl., 1988 (à paraître).

