



# YAMS : les systèmes d'automates à compteurs

Gilles Lesventes

► **To cite this version:**

Gilles Lesventes. YAMS : les systèmes d'automates à compteurs. [Rapport de recherche] RR-0808, INRIA. 1988. <inria-00075743>

**HAL Id: inria-00075743**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075743>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-RENNES

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 808

### **YAMS : LES SYSTEMES D'AUTOMATES A COMPTEURS**

**Gilles LESVENTES**

**MARS 1988**



★ R R 8 8 8 ★

Campus Universitaire de Beaulieu  
35042 - RENNES CÉDEX  
FRANCE  
Téléphone: 99 36 20 00  
Télex: UNIRISA 950 473 F  
Télécopie: 99 38 38 32

PUBLICATION INTERNE N°392 - FEVRIER 1988 - 28 PAGES

### YAMS : LES SYSTEMES D'AUTOMATES A COMPTEURS

Gilles LESVENTES  
IRISA - Campus de Beaulieu  
35042 RENNES CEDEX

#### Résumé :

Les systèmes d'addition de vecteurs représentent une classe assez large de modèles du parallélisme, parmi lesquels on trouve les réseaux de Pétri. Afin de garder la notion de processus et celle de leur composition, nous introduisons un nouveau modèle, YAMS , basé sur des automates finis communiquant au moyen de compteurs. Nous montrons la simulation réciproque de ce modèle et des réseaux de Pétri et l'égalité des langages des transitions reconnus par ces deux modèles.

### YAMS : COUNTER AUTOMATA SYSTEMS

#### Abstract :

Vector addition systems represent a rather wide class of model of parallelism; among them are Petri nets. In order to keep the notions of processes and composition we introduce a new model , YAMS (for Yet Another Model of Synchronization), based on finite automata communicating by counters. We show the mutual simulation of this model and Petri nets and the equality of their transition languages.

## Introduction :

Nous représentons un processus au moyen d'un système de transitions et d'un ensemble fini de variables. Le comportement d'un tel processus est décrit par un automate non déterministe dont les transitions sont divisées en deux classes: des actions dont le seul effet est de passer d'un état à un autre, et des opérations sur des variables appelées compteurs. Celles-ci sont, elles aussi, divisées en deux sortes : soit un incrément de 1 d'un seul compteur, soit un décrétement de 1 également d'un compteur si celui-ci est positif.

Les processus sont naturellement faits pour être composés. Ceci se fait simplement par juxtaposition de processus liés entre eux par l'intersection de leurs ensembles de compteurs. Nous appellerons YAMS<sup>1</sup> un système d'automates à compteurs formé d'un ensemble d'automates d'états finis non déterministes et d'un vecteur de compteurs.

La définition d'un modèle amène toujours la comparaison avec d'autres modèles existants. Par le choix de processus asynchrones et par la manipulation de variables entières, il s'inscrit dans la classe des systèmes d'addition de vecteurs [KARP & MILLER] et comme pour ceux-ci nous faisons quelques hypothèses -ou restrictions- élémentaires: une opération sur une variable est effective en cela qu'elle modifie toujours et une seule fois la valeur de celle-ci ; l'ordre et les origines des opérations sur une variable ne peuvent être connus ; le mécanisme de rendez-vous entre processus n'existe pas et il n'y a pas de temps global ni même partiel.

Notons tout d'abord qu'un système d'automates à compteurs, même réduit à un seul automate serait identique à une machine de Minsky s'il possédait la faculté de tester la nullité d'un compteur et posséderait donc, avec deux compteurs au minimum, la puissance d'une machine de Turing [MINSKY].

Le modèle le plus proche des YAMS est, à notre connaissance, les systèmes d'addition de vecteurs avec états (VASS) de Hopcroft et Pansiot et on peut décrire le comportement des processus par un seul automate, produit de mélange de tous les automates, et ainsi voir les YAMS comme un cas particulier des VASS où l'on aurait limité à 1 ou -1 les opérations sur les compteurs [HOPCROFT & PANSIOT].

Nombre de modèles s'avèrent être équivalents quant à la puissance d'expression et nous montrons l'équivalence par simulation avec le plus cité d'entre eux, les réseaux de Pétri [PETRI]. Les YAMS sont en fait isomorphes à une sous-classe propre des réseaux de Pétri. Nous utiliserons de plus ceux-ci pour définir les classes de langages reconnus par les YAMS et montrons que les deux modèles reconnaissent les mêmes

<sup>1</sup> What ? Yet Another Model of Synchronization !

langages sur configurations bloquantes ou finales.

Nous pouvons citer enfin les réseaux à files de Finkel qui sont "des réseaux de Pétri où au lieu d'envoyer des marques (entiers) dans des places on envoie des mots dans des files" [FINKEL] et les automates finis communiquant par canaux FIFO [BRAND & ZAFIROPULO, ROSIER & YEN] . Ces modèles toutefois ont une puissance supérieure de part leur respect de l'ordre des évènements et perdent ainsi en facilité d'analyse.

Les propriétés classiques des modèles du parallélisme telles que la monotonie, la vivacité ou la finitude et les moyens de les déterminer ne sont pas décrites dans ce rapport mais peuvent néanmoins être obtenues de façon similaire aux réseaux de Pétri grâce à la bisimulation.

## 1 YAMS, le modèle :

### 1.1 Actions :

On note  $X$  l'alphabet des actions d'un système. Les lettres de cet alphabet ne sont pas signées.

### 1.2 Messages :

On note  $Y$  l'alphabet ordonné des messages. Il y a autant d'éléments dans  $Y$  qu'il y a de types différents de messages utilisés dans le système. Ses lettres peuvent être signées positivement traduisant l'émission d'un message, ou négativement traduisant la prise en compte d'un message.

### 1.3 Compteurs :

A chaque type de messages  $y$ , on fait correspondre un compteur  $c_y$  égal au nombre de messages de ce type émis et non encore pris en compte. .

### 1.4 Automate à compteurs :

Un automate à compteurs  $A_i$  est un automate d'états fini dont les arcs sont étiquetés par des lettres de  $X$ ,  $+Y = \{+y / y \in Y\}$ , ou  $-Y = \{-y / y \in Y\}$  :

$$A_i = ( Q_i , ( X \cup +Y \cup -Y ) , q_{i_0} , \delta_i )$$

$$\text{où } \delta_i : Q_i \times ( X \cup +Y \cup -Y ) \rightarrow P(Q_i)$$

$q_{i_0}$  est l'état initial.

### 1.5 Système d'automates à compteurs :

Un système d'automates à compteurs est constitué d'un ou plusieurs automates à compteurs, sur les mêmes alphabets  $X$  et  $Y$ , et du vecteur des compteurs de  $Y$ :

Un système d'automate à compteurs, en "abrégié" YAMS,  $\mathcal{A}$  est défini par:

$$\mathcal{A} = \langle X , Y , \{ A_i / i \in [ n ] \} , ( E_I , S_I ) \rangle$$

où  $n$  est le nombre d'automates dans le système

$$\forall i \in [ n ]$$

$$A_i = ( Q_i , ( X \cup +Y \cup -Y ) , q_{i_0} , \delta_i )$$

$$\delta_i : Q_i \times ( X \cup +Y \cup -Y ) \rightarrow P(Q_i)$$

$E_I = ( q_{1_0} , \dots , q_{n_0} )$  est la configuration initiale des états

$S_I \in \mathbb{N}^{\text{Card}(Y)}$  est la configuration initiale des compteurs.

La relation de dérivation immédiate du système  $\mathcal{A}$ , notée  $\Rightarrow_{\mathcal{A}}$ , est définie comme suit:

$$\Rightarrow_{\mathcal{A}} : \left( \prod_{i=1}^n Q_i \right) \times \mathbb{N}^p \cdot X_{\varepsilon} \rightarrow \left( \prod_{i=1}^n Q_i \right) \times \mathbb{N}^p \text{ où } p = \text{Card}(Y) \text{ et } X_{\varepsilon} = X \cup \{\varepsilon\}$$

$$\left( (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_p) \right) \cdot a \xrightarrow{\mathcal{A}} \left( (e_1', \dots, e_n'), (f_1', \dots, f_p') \right)$$

avec : si  $a \in X$  et  $h \in \delta_i(e_i, a)$

$$\cdot \forall j \in [n] \setminus \{i\} : e_j' = e_j \quad ; \quad e_i' = h \quad ; \quad \forall k \in [p] : f_k' = f_k$$

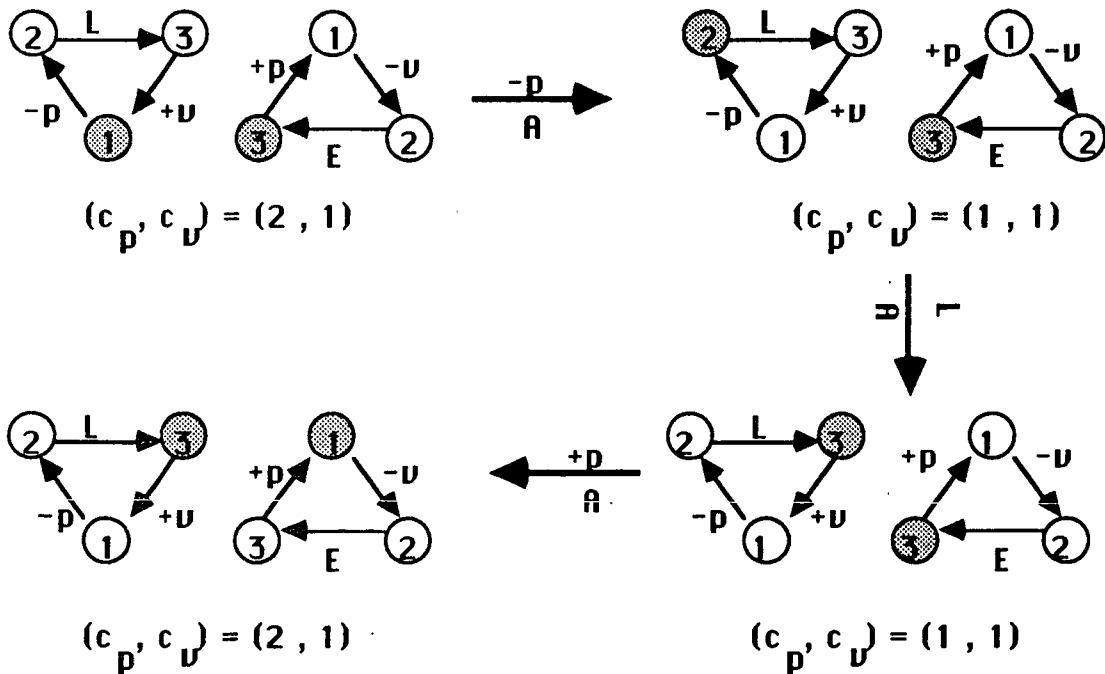
si  $a = \varepsilon$  et  $h \in \delta_i(e_i, -y_l), l \in [p]$

$$\cdot \forall j \in [n] \setminus \{i\} : e_j' = e_j \quad ; \quad e_i' = h \quad ; \quad \forall k \in [p] \setminus \{l\} : f_k' = f_k \quad ; \quad f_l' = f_l - 1$$

si  $a = \varepsilon$  et  $h \in \delta_i(e_i, +y_l), l \in [p]$

$$\cdot \forall j \in [n] \setminus \{i\} : e_j' = e_j \quad ; \quad e_i' = h \quad ; \quad \forall k \in [p] \setminus \{l\} : f_k' = f_k \quad ; \quad f_l' = f_l + 1$$

Exemple:



Soient  $\rightarrow_{\mathcal{A}}$  la clôture de  $\Rightarrow_{\mathcal{A}}$  par concaténation à droite sur  $X^*$  et  $\xrightarrow{*}_{\mathcal{A}}$  la clôture réflexive et

transitive de  $\rightarrow_{\mathcal{A}}$ .

### 1.6 Langages reconnus par un YAMS :

La définition des différents types de langages reconnus par un YAMS se fait selon différents ensembles de configurations atteintes; pour tout YAMS  $\mathcal{A}$ , de configuration initiale  $(E_I, S_I)$  :

#### Définition :

Le langage reconnu par le YAMS  $\mathcal{A}$  est:

$$L(\mathcal{A}) = \{ u \in X^* / \exists (E, S) \in \left( \prod_{i=1}^n Q_i \right) \times \mathbf{N}^p : (E_I, S_I).u \xrightarrow[\mathcal{A}]{}^* (E, S) \}.$$

#### Définition :

Un langage L est reconnu par le YAMS  $\mathcal{A}$  sur configuration finale s'il existe un

ensemble de configurations F tel que :

$$LF(\mathcal{A}) = \{ u \in X^* / \exists (E, S) \in \left( \prod_{i=1}^n Q_i \right) \times \mathbf{N}^p : (E_I, S_I).u \xrightarrow[\mathcal{A}]{} (E, S) ; (E, S) \in F \}$$

#### Définition :

Un langage L est reconnu par le YAMS  $\mathcal{A}$  sur configuration bloquante s'il existe un ensemble B de configurations tel que :

$$\forall (E, S) \in B, \forall a \in X_E, \neg (\exists (E', S') \in \left( \prod_{i=1}^n Q_i \right) \times \mathbf{N}^p : (E, S).a \xrightarrow[\mathcal{A}]{} (E', S'))$$

$$\text{et } LF(\mathcal{A}) = \{ u \in X^* / \exists (E, S) \in \left( \prod_{i=1}^n Q_i \right) \times \mathbf{N}^p : (E_I, S_I).u \xrightarrow[\mathcal{A}]{}^* (E, S) ; (E, S) \in B \}$$



## 2 YAMS et réseaux de Pétri :

### remarques préliminaires :

Les réseaux de Pétri considérés sont ceux dont la fonction d'étiquetage  $\sigma$  est la plus générale c'est-à-dire ne nécessitant pas d'étiquettes distinctes pour chaque transition, et autorisant l'étiquetage par le mot vide  $\epsilon$ .

La présentation des réseaux de Pétri utilisée est celle du [ BRAMS].

### 2.1 Simulation:

#### 2.1.1 Définitions :

Nous utilisons la notion d'homomorphismes entre systèmes de calculs décrite dans [KASAI, MILLER].

Nous redonnons les majeures définitions utilisées:

#### 2.1.1.1 Système de calcul :

##### Définition :

Un système de calcul  $S$  consiste en :

- un ensemble  $D$
- un élément  $x$  de  $D$
- un ensemble fini  $\Sigma$  d'opérations
- une fonction  $-$  de  $\Sigma$  dans l'ensemble des fonctions partielles de  $D$  dans  $D$ ,

telle que pour tout  $a \in \Sigma$ ,  $\bar{a}$  soit une fonction partielle de  $D$  dans  $D$ .

La fonction  $-$  est étendue à  $\Sigma^*$  par:

$$\bar{\epsilon} = \text{identité}$$

$$\overline{\alpha\beta}(y) = \bar{\alpha} \circ \bar{\beta}(y) = \bar{\beta}(\bar{\alpha}(y)) ; \alpha, \beta \in \Sigma^*, y \in D$$

Nous écrivons  $S = (\Sigma, D, x)$  au lieu de  $S = (\Sigma, D, x, -)$

$D$  est intuitivement vu comme l'ensemble des états du système de calcul, où un état inclut de l'information de contrôle aussi bien que des données pour la synchronisation. L'élément  $x$  est considéré comme l'état initial du système. L'exécution d'une opération va créer un nouvel état, comme défini par la fonction  $-$ , et une séquence d'exécutions d'opérations peut être vue comme une séquence de calculs du système.

### 2.1.1.2 Homomorphismes :

Définition :

Soient  $S_1=(\Sigma_1,D_1,x_1)$  et  $S_2=(\Sigma_2,D_2,x_2)$  des systèmes de calcul. Un homomorphisme  $h: S_1 \rightarrow S_2$  consiste en :

- un homomorphisme  $\tau : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$
- une injection  $\rho : D_1 \rightarrow D_2$  qui satisfait les conditions suivantes:

$$\cdot \rho(x_1) = x_2$$

$$\cdot \forall y, z \in R_{S_1}, \alpha \in \Sigma_1^* : \overline{\alpha}(y) = z \Rightarrow \overline{\tau(\alpha)}(\rho(y)) = \rho(z)$$

où  $R_{S_1}$  est l'ensemble des états accessibles de  $S_1$  à partir de  $x_1$ .

### 2.1.1.3 Simulation :

Définition :

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux systèmes de calcul. Supposons qu'il existe un homomorphisme  $h$  de  $S_1$  dans  $S_2$ . Nous disons que  $S_1$  est simulé par  $S_2$  selon  $h$ .

### 2.1.2 Simulation d'un YAMS par un réseau de Pétri :

A tout YAMS  $\mathcal{A}=(X, Y, \{A_i / i \in [n]\}, (E_i, S_i))$  on va associer un réseau de Pétri  $R_{\mathcal{A}}$  construit de la façon suivante:

$$\cdot P = P_Q \cup P_Y \quad \text{avec } P_Q = \bigcup_{i=1}^n \{ p_{ij} / q_j \in Q_i \} \text{ et } P_Y = \{ p_y / y \in Q_i \}$$

$$\cdot T = T_X \cup T_{+Y} \cup T_{-Y} \text{ avec}$$

$$T_X = \bigcup_{i=1}^n \{ t_{j k x}^i / q_k \in \delta_i(q_j, x); x \in X, (q_j, q_k) \in Q_i^2 \}$$

$$T_{+Y} = \bigcup_{i=1}^n \{ t_{j k y+}^i / q_k \in \delta_i(q_j, +y); y \in Y, (q_j, q_k) \in Q_i^2 \}$$

$$T_{-Y} = \bigcup_{i=1}^n \{ t_{j k y-}^i / q_k \in \delta_i(q_j, -y); y \in Y, (q_j, q_k) \in Q_i^2 \}$$

$$\forall t_{jkk}^i \in T_X : I(t_{jkk}^i) = \{p_{ij}\} \quad ; \quad O(t_{jkk}^i) = \{p_{ik}\}$$

$$\forall t_{jky+}^i \in T_{+Y} : I(t_{jky+}^i) = \{p_{ij}\} \quad ; \quad O(t_{jky+}^i) = \{p_{ik}, p_y\}$$

$$\forall t_{jky-}^i \in T_{-Y} : I(t_{jky-}^i) = \{p_{ij}, p_y\} \quad ; \quad O(t_{jky-}^i) = \{p_{ik}\}$$

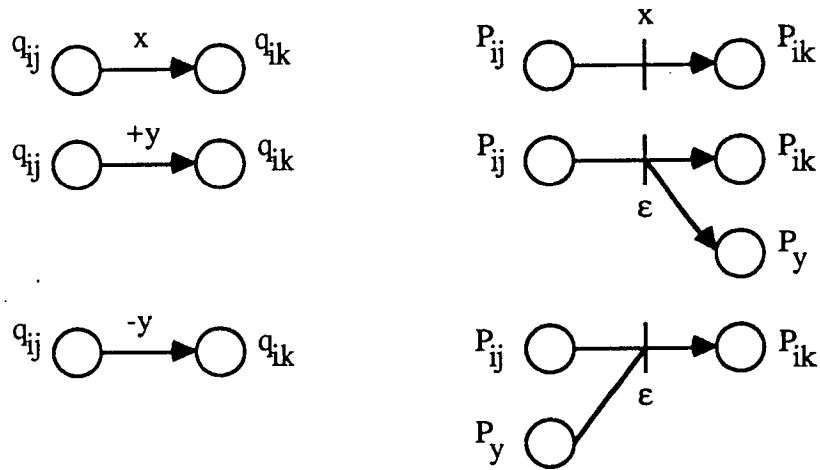
la fonction d'étiquetage  $\sigma : T \rightarrow X_E$  est :

$$\forall t_{jkk}^i \in T_X : \sigma(t_{jkk}^i) = x$$

$$\forall t_{jky+}^i \in T_{+Y} : \sigma(t_{jky+}^i) = \varepsilon$$

$$\forall t_{jky-}^i \in T_{-Y} : \sigma(t_{jky-}^i) = \varepsilon$$

La construction est illustrée par la figure suivante:



YAMS

Réseau de Pétri

le marquage initial  $\mu_I$  est défini par:

$$\forall i \in [n] : (E_I(i) = q_k \Rightarrow ((\forall j \in [\text{Card}(Q_i)] \setminus \{k\} : \mu_I(p_{ij}) = 0) \wedge \mu_I(p_{ik}) = 1))$$

$$\forall r \in [p] : \mu_I(p_{y_r}) = S_I(r)$$

Remarque :

Nous noterons  $\bar{\beta}(u) = v$  par :

.  $u(\beta > v)$  dans le cas des réseaux de Pétri.

.  $u \xrightarrow[\mathcal{A}]{\beta} v$  dans le cas des YAMS, tout en remarquant que

$$\beta \in (X \cup +Y \cup -Y)^* \text{ et non pas à } X^*.$$

Proposition 1 :

Quel que soit le YAMS  $\mathcal{A}$  et son réseau de Pétri associé  $R_{\mathcal{A}}$ , il existe un homomorphisme  $H_1$  de  $S_{\mathcal{A}}$  dans  $S_{R_{\mathcal{A}}}$  tel que  $R_{\mathcal{A}}$  simule  $\mathcal{A}$  selon  $H_1$ .

preuve :

Soit l'homomorphisme  $H_1$  de  $S_{\mathcal{A}} = (\bigcup_{i=1}^n \delta_i, \prod_{i=1}^n Q_i \times \mathbf{N}^p, (E_1, S_1))$  dans

$S_{R_{\mathcal{A}}} = (T, \mathbf{N}^{\text{Card}(P)}, \mu_1)$  construit ainsi :

Posons  $\tau_0^i$  l'homomorphisme suivant, pour tout  $i \in [n]$ :

$$\tau_0^i : \delta_i \rightarrow T$$

$$(q_j, x, q_k) \rightarrow t_{jkx}^i$$

$$(q_j, +y, q_k) \rightarrow t_{jky+}^i$$

$$(q_j, -y, q_k) \rightarrow t_{jky-}^i$$

Soit  $\tau_0 = \bigcup_{i=1}^n \tau_0^i$  et soit  $\tau_1$  l'extension de  $\tau_0$  aux séquences d'exécutions d'opérations

Soit l'injection  $\rho_1 : \prod_{i=1}^n Q_i \times \mathbf{N}^p \rightarrow \mathbf{N}^{\text{Card}(P)}$   
 $(E, S) \mapsto (\mu(p_{11}), \dots, \mu(p_{nm}), \mu(p_{y_1}), \dots, \mu(p_{y_p}))$

où .  $\forall i \in [n] : (E(i) = q_k) \Rightarrow ((\forall j \in [\text{Card}(Q_i)] \setminus \{q_k\} : \mu(p_{ij}) = 0)$

$\wedge (\mu(p_{ik}) = 1))$   
 .  $\forall r \in [p] : \mu(p_{y_r}) = S_1(r)$

Les conditions sur l'injection  $\rho_1$ , nécessaires pour que  $H_1$  soit un homomorphisme entre deux systèmes de calcul, sont valides d'après le lemme suivant:

Lemme 1.1 :

La fonction  $\rho_1$  vérifie les 2 propriétés suivantes:

$$a- \rho_1 ( (E_1, S_1) ) = \mu_I$$

$$b- \forall (E_1, S_1), (E_2, S_2) \text{ tels que } \exists u, v \in (X \cup +Y \cup -Y)^* \text{ et}$$

$$(E_1, S_1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{u} (E_1, S_1)$$

$$(E_1, S_1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{v} (E_2, S_2)$$

$$\forall a \in (X \cup +Y \cup -Y)^*$$

$$\text{si } (E_1, S_1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} (E_2, S_2) \text{ alors } \rho_1((E_1, S_1)) ( \tau_1(a) > \rho_1((E_2, S_2))$$

preuve :

a- évident

b- en raisonnant par récurrence sur  $m = |a|$

.  $m=0$ : évident

.  $\forall m > 0$ :  $a = a_1 \dots a_m$

$$(E_1, S_1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{a_1 \dots a_{m-1}} (E_3, S_3) \xrightarrow[\mathcal{A}]{a_m} (E_2, S_2)$$

$$\text{et } m_1 = \rho_1((E_1, S_1)) ( \tau_1(a_1 \dots a_{m-1}) > \rho_1((E_3, S_3)) = \mu_3$$

Rappelons que  $M ( t > M'$  désigne le fait d'obtenir le marquage  $M'$  à partir de  $M$  en tirant la transition ou séquence de transitions  $t$ . (cf [BRAMS]).

3 cas sont à distinguer:

$$i - a_m = (q_j, x, q_k), \quad x \in X, (q_j, q_k) \in Q_i^2$$

$$\cdot \forall h \in [n] \setminus \{i\} : E_2(h) = E_3(h)$$

$$\cdot E_2(i) = q_k$$

$$\cdot S_2 = S_3$$

$$\text{On a bien } t_{j k x}^i = \tau_1(a_m)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \forall p \in P \setminus \{p_{ij}, p_{ik}\}: \mu_2(p) &= \mu_3(p) \\ \mu_2(p_{ij}) &= \mu_3(p_{ij}) - 1, \text{ soit } 0 \\ \mu_2(p_{ik}) &= \mu_3(p_{ik}) + 1, \text{ soit } 1 \\ \text{d'où } \mu_2 &= \rho_1((E_2, S_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii - } a_m &= (q_j, +y_1, q_k), \quad y_1 \in Y, (q_j, q_k) \in Q_i^2 \\ \cdot \forall h \in [n] \setminus \{i\} : E_2(h) &= E_3(h) \\ \cdot E_2(i) &= q_k \\ \cdot \forall h \in [p] \setminus \{1\} S_2(h) &= S_3(h) \\ \cdot S_2(1) &= S_3(1) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } t_{jky+}^i = \tau_1(a_m)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \forall p \in P \setminus \{p_{ij}, p_{ik}, p_{y_1}\}: \mu_2(p) &= \mu_3(p) \\ \mu_2(p_{ij}) &= \mu_3(p_{ij}) - 1, \text{ soit } 0 \\ \mu_2(p_{ik}) &= \mu_3(p_{ik}) + 1, \text{ soit } 1 \\ \mu_2(p_{y_1}) &= \mu_3(p_{y_1}) + 1 \\ \text{d'où } \mu_2 &= \rho_1((E_2, S_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii - } a_m &= (q_j, -y_1, q_k), \quad y_1 \in Y, (q_j, q_k) \in Q_i^2 \\ \cdot \forall h \in [n] \setminus \{i\} : E_2(h) &= E_3(h) \\ \cdot E_2(i) &= q_k \\ \cdot \forall h \in [p] \setminus \{1\} S_2(h) &= S_3(h) \\ \cdot S_2(1) &= S_3(1) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } t_{jky-}^i = \tau_1(a_m)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \forall p \in P \setminus \{p_{ij}, p_{ik}, p_{y_1}\}: \mu_2(p) &= \mu_3(p) \\ \mu_2(p_{ij}) &= \mu_3(p_{ij}) - 1, \text{ soit } 0 \\ \mu_2(p_{ik}) &= \mu_3(p_{ik}) + 1, \text{ soit } 1 \\ \mu_2(p_{y_1}) &= \mu_3(p_{y_1}) - 1 \\ \text{d'où } \mu_2 &= \rho_1((E_2, S_2)) \end{aligned}$$

Dans les 3 cas on a  $\mu_2 = \rho_1((E_2, S_2))$  c'est-à-dire  
 $\rho_1((E_3, S_3))$  ( $\tau_1(a_m) > \rho_1((E_2, S_2))$ )

et comme  $\tau_1(a_1 \dots a_{m-1}) \cdot \tau_1(a_m) = \tau_1(a_1 \dots a_m) = \tau_1(a)$  on a bien  
 $\rho_1((E_1, S_1))$  ( $\tau_1(a) > \rho_1((E_2, S_2))$ ).

(1.1)□

(1)□

L'homomorphisme  $\tau_1$ , constituant de  $H_1$ , est une bijection. De plus on peut restreindre  $\rho_1: (\prod_{i=1}^n Q_i) \times \mathbf{N}^P \rightarrow \mathbf{N}^{\text{Card}(P)}$  à  $\rho_1': (\prod_{i=1}^n Q_i) \times \mathbf{N}^P \rightarrow \{0,1\}^n \times \mathbf{N}^P$  sans perte de généralité. Nous pouvons donc construire  $H_1^{-1}$ , constitué de  $\tau_1^{-1}$  et de  $\rho_1'^{-1}$ .

De façon évidente nous obtenons la proposition suivante:

Proposition 2 :

Le YAMS  $\mathcal{A}$  simule le réseau de Pétri  $R_{\mathcal{A}}$  selon  $H_1^{-1}$ .

Définition :

Un homomorphisme  $h$  de  $S_1$  dans  $S_2$  préserve la longueur si  $|\tau(a)| = 1$  pour tout  $a \in \Sigma_1$ .

Proposition 3 :

Les homomorphismes  $H_1$  et  $H_1^{-1}$  préservent la longueur.

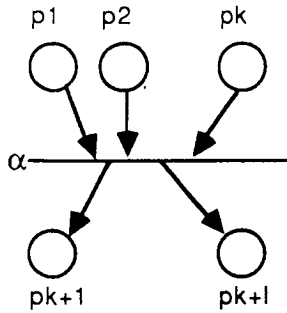
### 2.1.3 Simulation d'un réseau de Pétri par un YAMS :

A tout réseau de Pétri  $R=(P,T,I,O)$  et de marquage initial  $\mu_I$ , on va associer un YAMS  $\mathcal{A}_R$  construit de la façon suivante:

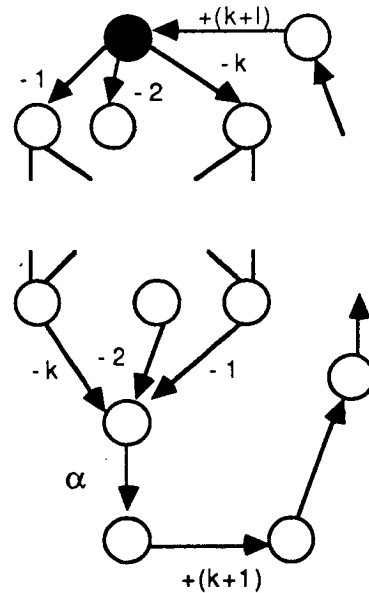
$$\mathcal{A}_R = (X, Y, \{A_i / t_i \in T\}, (E_I, S_I))$$

avec  $X = \{\sigma(t) / t \in T\} \setminus \{\epsilon\}$ , et  $Y = \{i / p_i \in P\}$  inclus dans  $\mathbf{N}$ .

Chaque transition  $t_i$  de  $R$  va être représentée par un automate  $A_i$  du système selon l'idée décrite par le schéma de la page suivante:



sera transcrit en



La construction de chaque automate  $A_i$  se décompose en trois phases:

1- Construisons un sous-automate  $\bar{A}_i$  de  $A_i$  reconnaissant toutes les combinaisons des lettres  $(-a)$  telles que  $a \in Y$  et  $p_a \in I(t_i)$ :

Notons  $\Sigma$  l'ensemble  $\{-a / a \in Y \wedge p_a \in I(t_i)\}$  et  $k$  le cardinal de  $\Sigma$ .

Définissons un ordre  $<_{\Sigma}$  sur  $\Sigma$  tel que  $-a <_{\Sigma} -b$  si  $a <_{\text{lexico}} b$ .

Soit  $\bar{Q} = \{ q_{rs} / r \in [k+1], s \in [C_k^{r-1}] \}$  où  $r$  représente le fait que l'on ait

reconnu  $(r-1)$  lettres de  $Y$  depuis l'état initial de  $\bar{A}_i$ , en noir sur le schéma, et  $s$  identifie l'une des combinaisons des  $(r-1)$  lettres prises parmi  $k$ .

Posons  $E_m$  tel que:  $\forall m \geq 1 E_m = \{ u \in \Sigma_m / \forall i \in [m+1], u(i) <_{\Sigma} u(i+1) \}$ ; on a

$\text{Card}(E_m) = C_m^k$ .  $E_m$  est l'ensemble des mots de  $m$  lettres de  $S$  dont les lettres sont en ordre croissant selon  $<_{\Sigma}$ . Soit  $f_m$ , la fonction qui donne à chacun de ces mots un rang suivant un ordre lexicographique  $<_{\Sigma^*}$ , extension de  $<_{\Sigma}$  à  $\Sigma^*$ . Celle-ci permet de déterminer l'état où l'on se trouve après avoir lu  $m$  lettres, dans quelque ordre que ce soit:

$$f_m : E_m \rightarrow [C_m^k]$$

$$u \rightarrow f_m(u) = \text{Card}(\{ v \in E_m / v <_{\Sigma^*} u \})$$



Nous pouvons définir maintenant la fonction de transition  $v$  de ce sous-automate  $\bar{A}_i$  :

$$\forall q_{rs} \in \bar{Q}, \forall -a \in \Sigma :$$

$v(q_{rs}, -a)$  est non défini si:

$$(r=n+1) \text{ ou } (2 \leq r \leq n \text{ et } -a \notin \{u(t) / t \in [lul] \text{ et } u=f_{r-1}^{-1}(s)\})$$

$$v(q_{rs}, -a) = q_{r+1s'} \text{ avec } s' = f_r(g(f_{r-1}^{-1}(s), -a))$$

où  $g$  est une fonction réordonnant le nouveau mot reconnu au rang  $r$  formé du mot reconnu au rang  $r-1$  concaténé à  $-a$  :

$$g: \{u \in \Sigma^t / \forall i, j \in [t]: u(i) \neq u(j) \text{ si } i \neq j\} \rightarrow E_t$$

$$u \rightarrow g(u) \text{ tel que } \{(g(u))(i) / i \in [lg(u)]\} = \{u(i) / i \in [lul]\}$$

Le nombre d'états de ce sous-automate est :  $\sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} = 2^k$ .

Pour pouvoir construire  $A_i$  à partir de  $\bar{A}_i$  nous devons procéder à une renumérotation  $\varphi$  de tout  $q_{rs}$  en  $q_j$ ,  $j \in [2k]$ . On obtient ainsi les transitions de  $A_i$  suivantes:  $q_j' \in \delta_i(q_j, -a) \Leftrightarrow v(\varphi^{-1}(q_j), -a) = \varphi^{-1}(q_j')$ .

La –longue– construction de  $\bar{A}_i$  permet de simuler les pré-conditions d'une transition du réseau de Pétri, c'est-à-dire  $I(t_i)$ .

2- On peut désormais reconnaître –éventuellement– le label de cette transition: si  $\sigma(t_i) \neq \epsilon$  alors  $\delta_i(q_{2k}, \sigma(t_i)) = \{q_{2k+1}\}$  et on pose  $h=1$  sinon on pose  $h=0$ .

3- La dernière partie de la construction de  $A_i$  permet de reconnaître les post-conditions d'une transition d'un réseau c'est-à-dire  $O(t_i)$ . Quel que soit  $a \in Y$  tel que  $p_a \in O(t_i)$ , il existe une transition  $(q, +b_r, q')$  telle que  $b_r = a$ , parmi l'un des ensembles suivants:

$$\{(q_m, +b_1, q_{m+1}), \dots, (q_{m+l-2}, +b_{l-1}, q_{m+l-1}), (q_{m+l-1}, +b_{l-1}, q_1)\} \text{ si } l > 1,$$

$$\{(q_m, +b_1, q_1)\} \text{ si } l = 1,$$

avec dans les deux cas :  $l = \text{Card}(O(t_i))$  et  $m = 2^k + h$ .

En résumé:  $\forall i, t_i \in T: Q_i = \{q_j / j \in [2^k + (l-1) + h]\}$  où  $k = \text{Card}(I(t_i))$  et  $h=0$  si  $s(t_i) = e$ ,  $h=1$  sinon.

Les configurations initiales de l'ensemble des automates  $A_i$  sont :

$$E_I = (q_1, \dots, q_1) \text{ pour les états, et } S_I = \mu_I \text{ pour le vecteur de compteurs.}$$

Nous pouvons énoncer maintenant la proposition suivante:

Proposition 4 :

Quel que soit le réseau de Pétri  $R$  et son YAMS associé  $\mathcal{A}_R$  par la construction précédente, il existe un homomorphisme  $H_2$  de  $S_R$  dans  $S_{\mathcal{A}_R}$  tel que  $\mathcal{A}_R$  simule  $R$  selon  $H_2$ .

preuve :

Soit l'homomorphisme  $H_2$  de  $S_R = (T, N^{\text{Card}(P)}, \mu_I)$  dans

$$S_{\mathcal{A}_R} = \left( \bigcup_{i=1}^{\text{Card}(T)} \delta_i, \left( \prod_{i=1}^{\text{Card}(T)} Q_i \right) \times N^{\text{Card}(P)}, (E_T, S_T) \right) \text{ construit ainsi:}$$

Posons  $\tau_0$  l'homomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \tau_0 : T &\rightarrow \left( \bigcup_{i=1}^{\text{Card}(T)} \delta_i \right)^* \\ t_j &\rightarrow (q_1, -I_1, q_{I_1}) \cdot (q_{I_1}, -I_2, q_{I_2}) \cdot \dots \cdot (q_{I_{h-1}}, -I_h, q_{2^h}) \cdot \\ &\quad (q_{2^h}, \sigma(t_j), q_{2^{h+1}}) \cdot (q_{2^{h+1}}, +O_1, q_{2^{h+2}}) \cdot \dots \cdot (q_{2^{h+1}}, +O_1, q_1) \text{ si } \sigma(t_j) \neq \epsilon \\ t_j &\rightarrow (q_1, -I_1, q_{I_1}) \cdot \dots \cdot (q_{I_{h-1}}, -I_h, q_{2^h}) \\ &\quad (q_{2^h}, +O_1, q_{2^{h+1}}) \cdot \dots \cdot (q_{2^{h+1}}, +O_1, q_1) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

où dans les deux cas:  $(I_1, \dots, I_n)$  est tel que  $\{p_{I_1}, \dots, p_{I_n}\} = I(t_j)$  ,  
 $(O_1, \dots, O_n)$  est tel que  $\{p_{O_1}, \dots, p_{O_n}\} = O(t_j)$  et  
 $\forall k \in [1, 2^{h+1}]$  (ou  $[1, 2^{h+1}-1]$ ),  $q_k \in Q_j$ .

Soit  $t_2$  l'extension de  $t_0$  aux séquences de transitions.

$$\begin{aligned} \text{Soit l'injection } \rho_2 : N^{\text{Card}(P)} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\text{Card}(T)} Q_i \times N^{\text{Card}(P)} \\ \mu &\rightarrow (q_1, \dots, q_1) \times \mu \end{aligned}$$

Lemme 4.1:

La fonction  $\rho_2$  vérifie les deux propriétés suivantes:

a-  $\rho_2(\mu_1) = (E_1, S_1)$

b-  $\forall \mu_1, \mu_2$  tels que  $\exists u, v \in T^*$ :  $\mu_1 (u > \mu_1$  et  $\mu_1 (v > \mu_2$

$$\forall t \in T^*: \text{ si } \mu_1 (t > \mu_2 \text{ alors } \rho_2(\mu_1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{\tau_2(t)} \rho_2(\mu_2)$$

preuve :

a- évident

b- par récurrence sur la longueur de  $t$  et d'après la construction des automates de  $\mathcal{A}_R$  selon les transitions de  $T$ .

(4.1)  $\square$

(4)  $\square$

A toute transition de  $T$ , l'homomorphisme  $\tau_2$  fait correspondre une séquence de transitions de  $\mathcal{A}_R$  de longueur supérieure ou égale à 2;  $H_2$  ne préserve donc pas la longueur. On pourrait construire  $H_2^{-1}$  qui associe par  $\tau_2^{-1}$ , à toute séquence de la forme  $\tau_2(t)$ , la transition  $t$ . La fonction inverse  $\rho_2^{-1}$  ne vérifierait pas la condition b-. En effet, il n'y aurait pas pour toute séquence de calcul de  $\mathcal{A}$ , en particulier tout préfixe de  $\tau_2(t)$ , quelle que soit  $t$ , de séquence associée dans  $R$ . On ne peut donc dire que  $R$  simule  $\mathcal{A}_R$  selon  $H_2^{-1}$ .

## 2.2 Langages reconnus :

### 2.2.1 Types de langages d'un réseau de Pétri :

Peterson dans 'Petri nets and the modelling of systems' définit quatre types de langages associés à un réseau de Pétri; nous redonnons ses définitions [PETERSON]:

Définition :

Le langage  $L_T(R)$  de type T associé à un réseau R de marquage initial  $\mu_I$  est:

$$L_T(R) = \{ u / u = \sigma(t) \wedge \mu_I(t) > \mu \wedge \exists t' \in T, \exists \mu' : \mu(t') > \mu' \}.$$

Définition :

Le langage  $L_L(R)$  de type L associé à un réseau R de marquage initial  $\mu_I$  est tel qu'il existe un ensemble fini F de marquages finaux et:

$$L_L(R) = \{ u / u = \sigma(t) \wedge \mu_I(t) > \mu \wedge \mu \in F \}.$$

Définition :

Le langage  $L_P(R)$  de type P associé à un réseau R de marquage initial  $\mu_I$  est:

$$L_P(R) = \{ u / u = \sigma(t) \wedge \mu_I(t) > \mu, \mu \text{ quelconque} \}.$$

Définition :

Le langage  $L_G(R)$  de type G associé à un réseau R de marquage initial  $\mu_I$  est:

$$L_G(R) = \{ u / u = \sigma(t) \wedge \mu_I(t) > \mu \wedge \exists \mu' \in F : \mu \geq \mu' \}.$$

### 2.2.2 Equivalence de langages reconnus :

#### 2.2.2.1 Equivalence $\mathcal{A} - R_{\mathcal{A}}$ :

Proposition 5 :

Quel que soit le YAMS  $\mathcal{A}$ , le langage reconnu par celui-ci sur configuration bloquante est égal au langage de type T du réseau de Pétri  $R_{\mathcal{A}}$  (associé à  $\mathcal{A}$  par la construction du paragraphe 2.1.2).

preuve :

Définition :

Le label l d'une séquence de transitions de A est défini par:

$$\begin{aligned} l(q_j, x, q_k) &= x \\ l(q_j, +y, q_k) &= +y \\ l(q_j, -y, q_k) &= -y \\ l(a.b) &= l(a).l(b) \end{aligned}$$

Lemme 5.1 :

Le langage  $L_B(\mathcal{A})$  reconnu par  $\mathcal{A}$  sur configuration bloquante est inclus dans le langage  $L_T(R_{\mathcal{A}})$  de type T de  $R_{\mathcal{A}}$ .

preuve :

$R_{\mathcal{A}}$  simule  $\mathcal{A}$  selon  $H_1$ , et  $H_1$  préserve la longueur c'est-à-dire que toute transition de  $\mathcal{A}$  est simulée par une transition de  $R_{\mathcal{A}}$ .

Soit  $\psi$  la projection de  $(X \cup +Y \cup -Y)^*$  sur  $X^*$ .

$$L_B(\mathcal{A}) = \{ \psi(l(a)) / (E_l, S_l) \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} (E, S), (E, S) \text{ bloquante} \}$$

On a aussi:  $\forall a \in (\bigcup_{i=1}^n \delta_i) \quad \psi(l(a)) = \sigma(\tau_1(a))$ .

De plus on a le résultat suivant:

Lemme 5.2 :

$\forall a \in (\bigcup_{i=1}^n \delta_i)$  tel que  $\psi(l(a)) \in L_B(\mathcal{A})$ :  $\mu_I(\tau_1(a)) > \mu$  et  $\mu$  bloquant.

preuve :

$$\psi(l(a)) \in L_B(\mathcal{A}) \Rightarrow ((E_l, S_l) \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} (E, S) \text{ et } (E, S) \text{ bloquante})$$

remarque:  $(E, S)$  bloquante  $\Rightarrow$

$$\forall i \in [n]: \exists q_k \in Q_i : ((\exists x \in X: q_k \in \delta_i(E(i), x)) \vee (\exists y \in Y: q_k \in \delta_i(E(i), +y)))$$

$$\forall i \in [n], \forall k \in Q_i, \forall l \in [p]: (q_k \in \delta_i(E(i), -y) \Rightarrow S(l) = 0).$$

Soit  $t_{jky}^i = \tau_1(E(i), -y_l, q_k)$ :

$$(I(t_{jky}^i) = \{p_{ij}, p_y\} \text{ et } \mu(p_y) = 0) \Rightarrow t_{jky}^i \text{ non tirable.}$$

(5.2)  $\square$

Donc on a  $\forall a \in (\bigcup_{i=1}^n \delta_i) : \sigma(\tau_1(a)) \in L_T(R_{\mathcal{A}})$ .

(5.1)  $\square$

Lemme 5.3 :

Le langage  $L_T(R_{\mathcal{A}})$  de type T de  $R_{\mathcal{A}}$  est inclus dans le langage  $L_B(\mathcal{A})$  reconnu par  $\mathcal{A}$  sur configuration bloquante .

preuve :

$R_{\mathcal{A}}$  simule  $\mathcal{A}$  selon  $H_1^{-1}$ , et  $H_1^{-1}$  préserve la longueur c'est-à-dire que toute transition de  $R_{\mathcal{A}}$  est simulée par une transition de  $\mathcal{A}$ .

$$L_T(R_{\mathcal{A}}) = \{ u / u = \sigma(t) \wedge \mu_I(t) > \mu \wedge \exists t' \in T, \exists \mu' : \mu(t') > \mu' \}$$

On a aussi:  $\forall t \in T^* : \sigma(t) = \psi(\tau_1^{-1}(t))$ , et de plus le résultat suivant:

Lemme 5.4 :

$$\forall t \in T^* \text{ tel que } \sigma(t) \in L_T(R_{\mathcal{A}}) : (E_I, S_I) \xrightarrow[\mathcal{A}]{\tau_1^{-1}(t)} (E, S) \text{ et } (E, S) \text{ bloquante}$$

preuve :

$$(\sigma(t) \in L_T(R_{\mathcal{A}}) \Rightarrow \mu_I(t) > \mu \text{ et } \mu \text{ bloquant}); \text{ c'est-à-dire } \exists t' \in T, \exists \mu' : \mu(t') > \mu'$$

On remarque l'implication suivante:

$$(\exists \mu \text{ tel que } \exists t' \in T, \exists \mu' : \mu(t') > \mu') \Rightarrow (\forall t \in T_X \cup T_{+Y} : I(t) = \{p\} \text{ avec } p \in PQ \text{ et } \mu(p) = 0)$$

D'où l'on déduit:

$$\forall i \in [n], \forall j \in \text{Card}(Q_i) \text{ tels que } \mu(p_{ij}) > 0 :$$

$$\forall l \in [p], \forall k \in \text{Card}(Q_i) : (t_{jky_l}^i \in T \Rightarrow \mu(p_{y_l}) = 0)$$

Soit  $(q_j, -y_l, q_k) = t_1^{-1}(t_{jky_l}^i) : (E(i) = q_j \wedge S(l) = 0) \Rightarrow$  transition non tirable

(5.4)□

Donc on a :  $\forall t \in T^* \psi(\tau_1^{-1}(t)) \in L_B(\mathcal{A})$ .

(5.3)□

(5)□

Proposition 6 :

Quel que soit le YAMS  $\mathcal{A}$ , le langage reconnu par celui-ci sur configurations finales est égal au langage de type L du réseau de Pétri  $R_{\mathcal{A}}$  (associé à  $\mathcal{A}$  par la construction du paragraphe 2.1.2).

preuve :

Soit  $F_{\mathcal{A}} \subset \prod_{i=1}^n Q_i \times \mathbf{N}^p$ , l'ensemble fini des configurations finales de  $\mathcal{A}$ ,  $F_{R_{\mathcal{A}}}$

l'ensemble des marquages finaux de  $R_{\mathcal{A}}$  sera donné par:

$$F_{R_{\mathcal{A}}} = \{ \rho_1((E,S)) / (E,S) \in F_{\mathcal{A}} \}$$

Puisque  $R_{\mathcal{A}}$  simule  $\mathcal{A}$  selon  $H_1$  et que  $\mathcal{A}$  simule  $R_{\mathcal{A}}$  selon  $H_1^{-1}$ , les deux préservant la longueur et d'après la construction de  $F_{R_{\mathcal{A}}}$  :

$$\forall a \in \left( \bigcup_{i=1}^n \delta_i \right) \quad \psi(l(a)) = \sigma(\tau_1(a)) \text{ implique l'égalité des deux langages.}$$

(6)  $\square$

Tout aussi évidemment nous obtenons, sans en fournir la preuve, la proposition suivante:

Proposition 7 :

Quel que soit le YAMS  $\mathcal{A}$ , le langage reconnu par celui-ci est égal au langage de type P du réseau de Pétri  $R_{\mathcal{A}}$  (associé à  $\mathcal{A}$  par la construction du paragraphe 2.1.2).

$\square$

### 2.2.2.2 Equivalence R - $\mathcal{A}_R$ :

Proposition 8 :

Quel que soit le réseau de Pétri R, le langage de type L reconnu par celui-ci est égal au langage reconnu sur configurations finales par le YAMS  $\mathcal{A}_R$  (associé à R par la construction du paragraphe 2.1.3).

preuve :

$\mathcal{A}_R$  simule R selon  $H_2$ . A toute transition t de R,  $\sigma_2$  associe une séquence de transitions de  $\mathcal{A}_R$ , simulant les pré-conditions, l'étiquette et les post-conditions de t.

On a donc  $\forall t \in T^* : \sigma(t) = \psi(\tau_2(t))$ .

Soit  $F_R$  l'ensemble des marquages finaux de R,  $F_{\mathcal{A}_R}$  l'ensemble des configurations finales de  $\mathcal{A}_R$  sera donné par:

$$F_{\mathcal{A}_R} = \{ \rho_2(\mu) / \mu \in F_R \}$$

lemme 8.1 :

Le langage  $L_L(R)$  est inclus dans le langage  $L_F(\mathcal{A}_R)$ .

preuve :

De façon évidente d'après la construction de  $F_{\mathcal{A}_R}$  et d'après le fait que  $\mathcal{A}_R$  simule  $R$  selon  $H_2$ .

(8.1)□

lemme 8.2 :

Le langage  $L_F(\mathcal{A}_R)$  est inclus dans le langage  $L_L(R)$ .

preuve :

En règle générale, l'inverse de  $H_2$  n'est pas un homomorphisme entre  $R$  et  $\mathcal{A}_R$ ; en cela qu'il ne peut simuler les séquences de transitions de  $\mathcal{A}_R$  qui ne soient pas, à un réordonnement près, une suite de suites de transitions de la forme  $\tau_2(t)$ , où  $t$  est une transition de  $R$ .

Dans ce cas de reconnaissance sur configurations finales et d'après la construction de  $F_{\mathcal{A}_R}$ , nous sommes dans la situation où toute séquence  $S$  de  $\mathcal{A}_R$  reconnaissant un mot  $l(S)$  et atteignant une configuration finale est un mélange de séquences  $S_i$  d'une des formes suivantes:

$$S_i = ( (q_1, -\beta_{i1}, q_2), \dots, (q_j, -\beta_{ik}, q_{2k}), (q_{2k}, \alpha_i, q_{2k+1}), \\ (q_{2k+1}, +\gamma_{i1}, q_{2k+2}), \dots, (q_{2k+1}, +\gamma_{i1}, q_1) )$$

ou

$$S_i = ( (q_1, -\beta_{i1}, q_2), \dots, (q_j, -\beta_{ik}, q_{2k}), \\ (q_{2k}, +\gamma_{i1}, q_{2k+1}), \dots, (q_{2k+1-1}, +\gamma_{i1}, q_1) )$$

Notons  $Z$  l'ensemble de ses séquences  $S_i$ .

Lemme 8.3 :

Pour toute séquence  $S$ , mélange de  $n$  séquences  $S_i$ , il existe une séquence  $S_{\text{CONC}}$ , concaténation des  $n$  séquences  $S_i$  composant  $S$  reconnaissant le même mot et atteignant la même configuration.

preuve :

Soit  $t$  la transition  $(q_j, x, q_k)$ ,  $(q_j, q_k) \in Q_i^2$  et  $(x = \alpha_i, \alpha_i \in X \text{ ou } x = +\gamma_{i1}, \gamma_{i1} \in +Y)$  telle que :

si  $S = U t V$ ,  $U$  et  $V$  étant deux séquences de transitions

alors  $\forall t' \in U$ :  $t'$  est de la forme  $(q_r, -\beta, q_s)$ ,  $(q_r, q_s) \in Q_h^2$ ,  $h \in \text{Card}(T)$ ,  $\beta \in Y$

Soit alors  $S_C = S_i \cdot \psi_i(U) \cdot \psi_i(V) = S_i \cdot \psi_i(S)$ , où  $S_i$  est la séquence contenant  $t$   $-(S_i \in Z)-$  et  $\psi_i$  la projection de l'ensemble des transitions de  $Z$  sur l'ensemble des



transitions de  $(Z \setminus \{S_i\})$ .

Plusieurs remarques sont à faire:

- $\psi_i(S)$  est donc le mélange de  $(n-1)$  séquences.
- $U$  est une séquence de transitions du type  $(q_r, -\beta, q_s)$ . Si, à partir d'une configuration, toute transition de  $U$  est franchissable, alors si  $U'$  est une séquence des transitions de  $U$  dans un ordre quelconque, toute transition de  $U'$  est franchissable, à partir de la même configuration.
- Si une transition est franchissable pour un vecteur de compteurs donné, elle le sera aussi pour un vecteur supérieur ou égal. Autrement dit, une transition de type  $(q_r, +\gamma, q_s)$  ou du type  $(q_r, \alpha, q_s)$  n'infirmement la franchissabilité d'une transition quelconque.

De ces remarques nous voyons qu'une séquence  $S$ , mélange de  $n$  séquences de  $Z$  peut être ramenée à une séquence  $S_C$ , concaténation d'une séquence de  $Z$  et d'une séquence mélange de  $(n-1)$  séquences de  $Z$ . D'où, par récurrence sur  $n$ , on construit la séquence  $S_{CONC}$  et déduit le lemme.

(8.3)□

A partir de la séquence  $S_{CONC}$ , on peut construire une séquence  $S'$  de transitions du réseau de Pétri  $R$  de la façon suivante: à chaque séquence de transitions  $S_i$  de  $Z$  on peut associer la transition  $t_i$  de  $T$  d'après la construction de  $\mathcal{A}_R$ . On voit aisément que quelle que soit  $S_{CONC}$ , la séquence  $S'$  correspondant reconnaît le même mot et atteint un marquage équivalent à la configuration atteinte par  $S_{CONC}$  –cas où l'inverse de  $H_2$  peut être appliqué– donc appartenant à  $F_R$  puisque la configuration atteinte par  $S$  appartient à  $F_{\mathcal{A}_R}$ .

(8.2)□

(8)□

### 2.2.2.3 Equivalence R - $\mathcal{B}_R$ :

De la même façon que dans le paragraphe 2.2.2.1 – équivalence  $\mathcal{A} - R_{\mathcal{A}}$  –, nous aimerions pouvoir utiliser la même construction, donc le même YAMS  $\mathcal{A}_R$ , pour établir qu'il reconnaît sur configuration bloquante le langage de type  $T$  associé à  $R$ . Mais on voit aisément que  $\mathcal{A}_R$  peut reconnaître par configuration bloquante des préfixes du langage de type  $T$  associé à  $R$ . Informellement on peut dire que deux automates  $A_i$  et  $A_j$  de  $\mathcal{A}_R$  peuvent "s'interbloquer" dans leurs séquences de transitions de  $\overline{A}_i$  et de  $\overline{A}_j$ .

Pour pallier à ces problèmes d'interblocage entre automates d'un même YAMS on va associer à tout réseau de Pétri  $R$ , un YAMS  $\mathcal{B}_R$  composé d'un unique –gros– automate en s'inspirant de la construction de  $\mathcal{A}_R$ :

De façon similaire au sous-automate  $\bar{A}_i$  de chacun des  $A_i$  de  $\mathcal{A}_R$ , qui reconnaît toutes les combinaisons correspondant aux pré-conditions d'une transition  $t_i$  de  $R$ , nous construisons un seul sous-automate  $\bar{B}$  reconnaissant toutes les combinaisons correspondant aux pré-conditions de l'ensemble des transitions de  $R$ .

A chaque sommet de  $\bar{B}$  sont associées les séquences de transitions, semblables à la fin des séquences  $S_i$  du YAMS  $\mathcal{A}_R$  c'est-à-dire  $((q_{2k}, \alpha_i, q_{2k+1}), (q_{2k+1}, +\gamma_{i1}, q_{2k+2}), \dots, (q_{2k+1}, +\gamma_{i1}, q_1))$ , qui sont tirables pour ce sommet.

Définition :

Une séquence  $S$  est dite tirable pour un sommet  $q_r$  si et seulement si, si  $t$  est la transition de  $R$  correspondant à  $S$ , quelle que soit  $p_a$  de  $I(t)$ ,  $-a$  appartient à l'ensemble des lettres de l'étiquette du chemin allant de  $q_1$  à  $q_r$ .

Les séquences associées à un sommet sont identiques à la fin de séquence  $S_i$  décrite ci-dessus hormis la dernière transition; celle-ci est de la forme  $(q_s, +\gamma_{i1}, q_v)$  avec  $\mathbf{E}_v = \mathbf{E}_s \setminus \{-a / p_a \in I(t)\}$  où  $\mathbf{E}_k$  est l'ensemble des lettres de l'étiquette d'un chemin allant de  $q_1$  à  $q_k$ .

La configuration initiale  $(E_I, S_I)$  de  $\mathbf{B}_R$  est:  $E_I = (q_1)$  pour l'état initial,  $S_I = \mu_I$  pour le vecteur de compteurs.

Lemme 9.1 :

Pour toute séquence  $S$  de transitions de  $R$  reconnaissant un mot  $\sigma(S)$  et atteignant un marquage  $\mu$ , il existe une séquence  $S'$  de transitions de  $\mathbf{B}_R$  reconnaissant  $l(S') = \sigma(S)$ , et atteignant une configuration  $(E, S)$  telle que :  $E = (q_1)$  et  $S = \mu$ .

preuve :

Par récurrence sur  $m = |S|$

.  $m=0$  : évident

.  $\forall m > 0$   $S = S_{m-1} \cdot t_m$  avec  $l(S_{m-1}) = \sigma(S'_{m-1})$

D'après la construction de  $\mathbf{B}_R$ , il existe un chemin partant de  $q_1$  dont l'étiquette est une combinaison des pré-conditions de  $t_m$ . Soit  $q_r$  le sommet atteint à l'issue de ce chemin;  $t_m$  est tirable pour  $q_r$  et la séquence associée à  $q_r$ , et  $t_m$  est composée d'une action  $\alpha = \sigma(t_m)$  et d'actions  $(+\gamma_i, \gamma_i \in Y$  tel que  $p_{\gamma_i} \in O(t_m))$  et telle que la dernière transition est de la forme  $(q_v, +\gamma, q_1)$ .

On a donc  $l(S') = l(S'_{m-1}) \cdot \alpha = \sigma(S_{m-1}) \cdot \sigma(t_m) = \sigma(S)$  et de plus  $E = (q_1)$  et  $S = \mu$ .

De plus si  $S$  atteint un marquage  $\mu$  bloquant,  $S'$  atteint une configuration  $(E,S)$  telle qu'il n'existe pas de chemin de  $q_1$  vers un état quelconque  $q_k$  de  $\bar{B}$  tel qu'une séquence soit tirable en  $q_k$  – puisque  $\forall t \in T, \exists p \in I(t): \mu(p)=0$ , sur  $R$  – .

Donc tous les comportements à partir de  $(E,S)$  mènent en une configuration bloquante sans avoir modifié le mot reconnu par  $\mathcal{B}_R$ .

(9.1)  $\square$

On déduit donc le lemme suivant.

Lemme 9.2 :

Le langage  $L_T(R)$  de type  $T$  est inclus dans le langage  $L_B(\mathcal{B}_R)$  reconnu par  $\mathcal{B}_R$  sur configuration bloquante.

La réciproque est établie grâce au lemme suivant.

Lemme 9.3 :

Pour toute séquence  $S$  de transitions de  $\mathcal{B}_R$  reconnaissant un mot  $l(S)$ , il existe une séquence  $S'$  de transitions de  $R$  reconnaissant  $\sigma(S')=l(S)$ .

preuve :

$S$  peut être vu comme le facteur gauche d'une séquence, concaténation de séquences  $S_i$  ayant la forme suivante : une suite de transitions  $-\beta, \beta \in Y$ , mélange de pré-conditions de différentes transitions de  $R$ , suivie -éventuellement- d'une transition  $\alpha, (\alpha \in X, \alpha = \sigma(t), t \in T)$ , puis d'une suite de transitions  $+\gamma, \gamma \in Y$ , post-conditions de la transition  $t$  en question.

$S'$  sera la séquence des transitions  $t$  des séquences  $S_i$  de  $S$  et reconnaît donc le même mot que  $S$  en atteignant un marquage  $\mu$  tel que :  $(E, SP)$  est la configuration atteinte par  $\mathcal{B}_R$  à l'issue de  $S$ )

si  $E = (q_r)$  et

- si  $q_r \in \bar{B}$  : soit  $V$  l'ensemble des  $-\beta$  du chemin entre  $q_1$  et  $q_r$

$$\forall i \in Y : -i \in V \Rightarrow \mu(p_i) = SP(i)$$

- si  $q_r \notin \bar{B}$  et  $q_r$  appartient à un chemin entre un état de  $\bar{B}$  et  $q_1$ :

soit  $U$  l'ensemble des  $+\gamma$  du chemin entre  $q_r$  et  $q_1$

$$\forall i \in Y : +i \in U \Rightarrow \mu(p_i) > SP(i)$$

De plus si  $\mathfrak{B}_R$  est dans une configuration bloquante, c'est-à-dire que l'état courant est un état de  $\bar{\mathfrak{B}}$  d'où aucune transition  $-\beta, \beta \in Y$ , n'est exécutable et d'où aucune séquence n'est tirable; alors cela revient à dire que le marquage  $\mu$  correspondant est bloquant.

(9.3)□

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 9.4 :

Le langage reconnu par  $\mathfrak{B}_R$  sur configuration bloquante est inclus dans le langage de type T associé à R.

Des lemmes précédents on obtient la proposition suivante.

Proposition 9 :

Quel que soit le réseau de Pétri R, le langage de type T reconnu par celui-ci est égal au langage reconnu sur configuration bloquante par le YAMS  $\mathfrak{B}_R$ .

### 2.2.3 Conclusion sur les langages reconnus :

Les YAMS et les réseaux de Pétri reconnaissent les mêmes classes de langages que ce soit sur configurations finales (respectivement marquages finaux pour les réseaux de Pétri) ou sur configuration bloquante (respectivement marquage bloquant).

Les langages reconnus par les YAMS, c'est-à-dire sans considération de configuration bloquante ou finale, sont identiques aux langages de type P des réseaux de Pétri. Pour l'établir, il suffit de faire les équivalences  $R - \mathfrak{B}_R$  et  $\mathfrak{B}_R - R$ .

REFERENCES :

D.BRAND & P. ZAFIROPULO :

"On communicating finite-state machines" J.A.C.M. vol n° 2, 1983

A.FINKEL :

"Structuration des systèmes de transitions - Applications au contrôle du parallélisme par files FIFO" , Thèse d'état , ORSAY, 1987

M. HACK :

"Decidability questions for Petri nets", PhD dissertation, Dept of electrical engineering, Massachussets Institute of Technology, 1975

J. HOPCROFT & J.J. PANSIOT :

"On the reachability problem for 5-dimensional vector addition systems", Therotical Computer Science 8, 1979

R. KARP & R. MILLER :

"Parallel program shemata", Journal of Computer and System Science Vol 3, number 4, 1969

T. KASAI & R. MILLER :

"Homomorphisms between models of parallel computation", Research report IBM RC 7796, 1979

M. MINSKY :

"Computation: finite and infinite machines", Prentice-Hall, 1967

J.L. PETERSON :

"Petri nets theory and the modeling of systems", Prentice-Hall, 1981

C. PETRI :

"Fundamentals of a theory of asynchronous information flow", Proceedings of the 1962 IFIP Congress, North-Holland, 1962

"Kommunikation mit Automaten", PhD dissertation, University of Bonn, 1962

L.E. ROSIER & H.C. YEN :

"Boundedness, empty channel detection, and synchronisation for communicating finite automata", STACS 1985, L.N.C.S. n° 210

