



Homogeneisation d'equations hyperboliques du premier ordre. Application aux milieux poreux

Yacine Amirat, K. Hamdache, A. Ziani

► **To cite this version:**

Yacine Amirat, K. Hamdache, A. Ziani. Homogeneisation d'equations hyperboliques du premier ordre. Application aux milieux poreux. RR-0803, INRIA. 1988. <inria-00075748>

HAL Id: inria-00075748

<https://hal.inria.fr/inria-00075748>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 803

HOMOGENEISATION D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE-APPLICATION AUX MILIEUX POREUX

Youcef AMIRAT
Kamel HAMDACHE
Abdelhamid ZIANI

MARS 1988



HOMOGENEISATION D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES DU
PREMIER ORDRE - APPLICATION AUX MILIEUX POREUX

HOMOGENIZATION OF FIRST ORDER HYPERBOLIC
EQUATIONS - APPLICATION TO POROUS MEDIA

Youcef AMIRAT^(*)
Kamel HAMDACHE^(**)
Abdelhamid ZIANI^(***)

- (*) INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. 105-78153, Le Chesnay Cédex, France.
- (**) ENSTA/GHN, Centre de l'Yvette, Chemin de la Hunière, 91120 Palaiseau Cédex, France.
- (***) Institut de Mathématiques, USTHB, B.P. 31, El Alia, Alger, Algérie.

RESUME

Nous étudions, dans ce rapport, l'homogénéisation d'une équation hyperbolique linéaire du premier ordre du type

$$(\partial_t u^\epsilon)(t,x,y) + a^\epsilon(t,y)(\partial_x u^\epsilon)(t,x,y) = 0.$$

Nous montrons que la limite faible \bar{u} de (u^ϵ) satisfait une équation du type

$$\partial_t \bar{u} + \bar{a}(t,y) \partial_x \bar{u} + M\bar{u} = 0,$$

où \bar{a} est la limite faible de (a^ϵ) et M un opérateur de diffusion à mémoire. Nous utilisons un théorème de représentation des fonctions holomorphes du type Herglotz pour caractériser les mesures paramétrées de Young associées à (a^ϵ) . Nous appliquons le résultat à un problème lié à un écoulement miscible en milieu poreux.

MOTS CLES

Equation hyperbolique - Homogénéisation - Oscillations - Milieu poreux.

ABSTRACT

This paper is concerned with homogenization of a first order linear hyperbolic equation of the form

$$(\partial_t u^\epsilon)(t,x,y) + a^\epsilon(t,y)(\partial_x u^\epsilon)(t,x,y) = 0.$$

We show that the weak limit \bar{u} of (u^ϵ) satisfies an equation of the form

$$\partial_t \bar{u} + \bar{a}(t,y) \partial_x \bar{u} + M\bar{u} = 0,$$

where \bar{a} is the weak limit of (a^ϵ) and M a diffusion operator with memory effects. A representation theorem for holomorphic functions of Herglotz type is used to characterize the Young measures associated with (a^ϵ) . We apply the result to a problem related to miscible displacements in porous media.

KEY WORD

Hyperbolic equation - Homogenization - Oscillations - Porous media.

HOMOGENEISATION D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES DU
PREMIER ORDRE - APPLICATION AUX MILIEUX POREUX

Youcef AMIRAT

Kamel HAMDACHE

Abdelhamid ZIANI

I. INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici à l'homogénéisation d'une équation hyperbolique linéaire du premier ordre, à coefficients oscillants. Ce travail, qui fait suite à [3], est principalement motivé par la recherche du comportement global de la concentration de fluides miscibles en milieu poreux hétérogène. Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , représentant le milieu poreux, ϵ un paramètre associé à la microstructure, les équations du déplacement de deux fluides miscibles sont, dans le cas incompressible et sans dispersion, données dans $\Omega \times]0, T[$, $T > 0$, par (voir [8]) :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \phi^\epsilon(x) \partial_t u^\epsilon + q^\epsilon(t, x) \operatorname{grad} u^\epsilon = 0, \\ \operatorname{div} q^\epsilon(t) = 0, \end{cases}$$

$$(1.2) \quad q^\epsilon(t, x) = - \frac{K^\epsilon(x)}{\mu} \operatorname{grad} p^\epsilon,$$

auxquelles on adjoint des conditions aux limites et initiales. Dans (1.1)-(1.2), les inconnues sont u^ϵ (concentration) et p^ϵ (pression) et les données (oscillantes) ϕ^ϵ (porosité) et K^ϵ (perméabilité); μ est la viscosité du mélange (fonction de u^ϵ en général). Un deuxième exemple de problème d'homogénéisation du même type est donné par l'équation de Liouville associée à un Hamiltonien $H^\epsilon(t, p, q)$ oscillant :

$$(1.3) \quad \partial_t f^\epsilon + \left\{ H^\epsilon(t, \cdot) ; f^\epsilon \right\} = 0,$$

où $\{ \cdot ; \cdot \}$ désigne le crochet de Poisson :

$$(1.4) \quad \left\{ H ; f \right\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

L'équation suivante, étudiée par DiPerna et Majda [10], rentre dans la classe d'équations que nous considérons. Il s'agit de :

$$(1.5) \quad \partial_t v^\epsilon + \tilde{v}\left(y, \frac{y}{\epsilon}\right) \partial_x v^\epsilon = 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

où $\tilde{v}(y, z)$ est une fonction donnée périodique en la variable z . Cet exemple est considéré dans [10] pour mettre en évidence la présence d'un phénomène oscillatoire dans l'équation d'Euler.

Nous renvoyons aux ouvrages généraux de Bensoussan-Lions-Papanicolaou [4] et de Sanchez-Palencia [20] pour les fondements de la méthode d'homogénéisation et l'étude de nombreux exemples. Concernant l'homogénéisation d'équations modélisant l'écoulement d'un fluide diphasique en milieu poreux (cas immiscible avec pression capillaire, cas miscible avec dispersion) voir Bourgeat [7] et Amaziane [2].

Les exemples que nous donnons sous-tendent deux questions :

i) Dans quelles classes de fonctions peut-on résoudre des équations hyperboliques linéaires à coefficients irréguliers ?

ii) Dans le cas où les coefficients sont réguliers mais oscillants, peut-on décrire les oscillations de la solution par des équations effectives ?

Nous nous bornons ici à répondre à la question ii) sur quelques exemples. La question i) est à l'étude et fera l'objet d'un autre travail.

Dans un travail récent, Shvidler [23], [24] a étudié le système (1.1)-(1.2) et a donné, par une analyse des fluctuations, des équations effectives associées à (1.1)-(1.2). Des termes de mémoire apparaissent, traduisant un phénomène de dispersion.

Récemment [3], nous avons montré que les oscillations pour le problème (1.1)-(1.2) dans le cas 1-D sont décrites par des équations simples ; de plus, l'homogénéisation de l'équation elliptique de p^ϵ s'obtient de façon classique, cf. [18], [19], [25] par exemple.

En intégrant le long des caractéristiques l'équation (1.5), on voit qu'il s'agit d'étudier une équation différentielle du type :

$$(1.6) \quad \partial_t u^\epsilon + \beta^\epsilon(t, x) u^\epsilon = 0 \quad , t > 0 \quad , x \in \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N.$$

Cette équation a été étudiée par Tartar [29] dans le cas $\beta^\epsilon(t, x) = \beta^\epsilon(x)$ et par Mascarenhas [17] dans le cas périodique $\beta^\epsilon(t, x) = \beta(t, \frac{x}{\epsilon})$ où $\beta(t, z)$ est périodique en z .

Si \bar{u} désigne la limite dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ faible * de u^ϵ , quand ϵ tend 0, alors l'équation effective obtenue, dans le cas où $\beta^\epsilon(t,x)$ est indépendant de t , est la suivante

$$(1.7) \quad \partial_t \bar{u} + \bar{\beta} \bar{u} + \int_0^t K(t-s,x) \bar{u}(s) ds = 0,$$

où le noyau $K(t,x)$ est entièrement caractérisé par les limites faibles, quand ϵ tend vers 0, des suites $(\beta^\epsilon)^n$, $n \geq 1$, cf. Tartar [29]. On obtient une équation du même type que (1.7) dans le cas plus complexe étudié par Mascarenhas [17]. L'équation (1.7) montre que l'on a :

$$(1.8) \quad \overline{\beta \cdot u} = \bar{\beta} \cdot \bar{u} + \int_0^t K(t-s, \cdot) \bar{u}(s) ds.$$

Dans ce travail nous nous intéressons à l'équation suivante :

$$(1.9) \quad \partial_t u^\epsilon + a^\epsilon(t,y) \partial_x u^\epsilon = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \Omega' \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{N-1},$$

qui est un cas particulier de (1.3) et qui contient l'exemple (1.5) considéré par DiPerna et Majda [10]. Ces auteurs montrent que, lorsque $a^\epsilon(t,y) = b(y,y/\epsilon)$, $b(y,z)$ périodique en z , la limite faible \bar{u} de u^ϵ satisfait l'équation :

$$(1.10) \quad \partial_t \bar{u} + \partial_x \overline{b \cdot u} = 0,$$

sans toutefois exprimer la dépendance de $\overline{b \cdot u}$ en fonction de \bar{b} et \bar{u} comme dans (1.8). En fait, lorsque a^ϵ dépend de t,x,y , il n'est probablement pas possible d'exprimer cette dépendance à l'aide d'une relation simple. D'autres phénomènes peuvent entrer en jeu comme, par exemple, le phénomène de concentration décrit et étudié par P.L Lions [13], [14] et mis en évidence pour l'équation d'Euler par DiPerna et Majda [11].

Considérons les courbes caractéristiques associées à (1.9) :

$$(1.11) \quad X^\epsilon(0;t,x,y) = x + \int_0^t a^\epsilon(s,y) ds, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \Omega'.$$

Il est clair que pour $a^\epsilon \rightarrow a$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega')$, la fonction $(t,x,y) \rightarrow X^\epsilon(0;t,x,y)$ appartient à un borné de $L^\infty(\Omega', W_{loc}^{1,\infty}(\]0,T[\times \mathbb{R}))$ mais n'est pas dans un borné de $W_{loc}^{1,\infty}(\]0,T[\times \mathbb{R} \times \Omega')$ car a^ϵ est seulement bornée dans

$L^\infty(]0, T[\times \Omega')$. Cette absence de compacité de X^ϵ fait, qu'en général :

$$(1.12) \quad \overline{au} \neq \bar{a} \cdot \bar{u}.$$

Considérons à présent l'équation suivante :

$$(1.13) \quad \partial_t u^\epsilon + a^\epsilon(y) \partial_x u^\epsilon + b \partial_y u^\epsilon = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \Omega',$$

avec $a^\epsilon \rightharpoonup a$ dans $L^\infty(\Omega')$ faible * et b une constante : les courbes caractéristiques associées sont données par :

$$(1.14) \quad \begin{cases} X^\epsilon(0; t, x, y) = x + \int_0^t a^\epsilon(y+sb) ds = x + \frac{1}{b} \int_y^{y+tb} a^\epsilon(s) ds \\ Y^\epsilon(0; t, x, y) = y + tb. \end{cases}$$

Alors dans ce cas on voit (puisque a^ϵ intervient par sa moyenne) que X^ϵ vérifie :

$$(1.15) \quad X^\epsilon(0; t, x, y) \rightarrow X(0, t, x, y) = x + \frac{1}{b} \int_y^{y+tb} a(s) ds \quad \text{p.p. en } t, x, y.$$

Il est clair que cette propriété de compacité permet de déduire que :

$$(1.16) \quad \overline{a \cdot u} = \bar{a} \cdot \bar{u}.$$

Notons que l'équation (1.9) s'obtient comme cas limite de (1.13), quand $b \rightarrow 0$.

Soit enfin l'exemple suivant :

$$(1.17) \quad \partial_t u^\epsilon + a^\epsilon(x) \partial_x u^\epsilon + b^\epsilon(y) \partial_y u^\epsilon = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega_1, \quad y \in \Omega_2,$$

Ω_1, Ω_2 ouverts de \mathbb{R} , avec $a^\epsilon \rightharpoonup a$ dans $L^\infty(\Omega_1)$ faible * et $b^\epsilon \rightharpoonup b$ dans $L^\infty(\Omega_2)$ faible * et $0 < \alpha \leq a^\epsilon(x), b^\epsilon(y) \leq \beta$. Alors les courbes caractéristiques vérifient :

$$(1.18) \quad \dot{X}^\epsilon(t) = a^\epsilon(X^\epsilon), \quad \dot{Y}^\epsilon(t) = b^\epsilon(Y^\epsilon), \quad X^\epsilon(0) = x, \quad Y^\epsilon(0) = y,$$

et elles sont données, de façon analogue au cas 1-D, cf. [3], par les relations suivantes :

$$(1.19) \quad \begin{cases} X^\epsilon(0;t,x) = \Psi_\epsilon^{-1}[\Psi_\epsilon(x) + t], & Y^\epsilon(0;t,y) = \phi_\epsilon^{-1}[\phi_\epsilon(y) + t] \text{ , où} \\ \Psi_\epsilon(z) = \int_0^z \frac{ds}{a^\epsilon(s)}, & \phi_\epsilon(z) = \int_0^z \frac{ds}{b^\epsilon(s)} \end{cases}$$

On vérifie alors que X^ϵ (resp. Y^ϵ) est dans un borné de $W^{1,\infty}(]0,T[\times \Omega_1)$ (resp. $W^{1,\infty}(]0,T[\times \Omega_2)$) et par suite

$$(1.20) \quad \begin{cases} X^\epsilon(0,t,x) \rightarrow X(0,t,x) = \Psi^{-1}[\Psi(x) + t] & \text{p.p. dans }]0,T[\times \Omega_1, \\ Y^\epsilon(0,t,y) \rightarrow Y(0,t,y) = \phi^{-1}[\phi(y) + t] & \text{p.p. dans }]0,T[\times \Omega_2, \end{cases}$$

où :

$$(1.21) \quad \Psi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\bar{a}_{-1}(s)}, \quad \phi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\bar{b}_{-1}(s)}$$

et $1/a^\epsilon \rightarrow 1/\bar{a}_{-1}$ dans $L^\infty(\Omega_1)$ faible *, $1/b^\epsilon \rightarrow 1/\bar{b}_{-1}$ dans $L^\infty(\Omega_2)$ faible *. En conséquence, u^ϵ solution de (1.17) converge presque partout vers \bar{u} solution de l'équation :

$$(1.22) \quad \partial_t \bar{u} + a_{-1}(x) \partial_x \bar{u} + b_{-1}(y) \partial_y \bar{u} = 0;$$

l'exemple non conservatif (1.17) montre que l'on a :

$$(1.23) \quad \overline{a \partial_x u + b \partial_y u} = \bar{a} \partial_x \bar{u} + \bar{b} \partial_y \bar{u} + (\bar{a}_{-1} - \bar{a}) \partial_x \bar{u} + (\bar{b}_{-1} - \bar{b}) \partial_y \bar{u}.$$

Les exemples que nous venons de voir illustrent la diversité des phénomènes intervenant, même si la propriété de compacité a lieu.

Depuis les premiers travaux de Tartar sur l'étude des oscillations dans les E.D.P non linéaires, cf. [26], [27], [28] (voir également Mc Laughlin - Papanicolaou - Tartar [16]) quelques progrès ont été réalisés dans ce sens, cf. DiPerna [9], DiPerna - Majda [10] et particulièrement les travaux de Serre [21], [22], Bonnefille [6] et Lions - Papanicolaou -

Varadhan [15], où sont établies les équations effectives satisfaites par les oscillations. Dans [6], [21], [22], les auteurs utilisent, suivant une idée de Tartar, les représentations de mesures par des fonctions de répartition. Dans notre travail, mettant à profit une suggestion de Tartar, nous utilisons le théorème de représentation des fonctions holomorphes du type Herglotz, cf. Akhiezer-Kroin [1] et l'annexe à ce travail, pour décrire les oscillations de certaines fonctions. Cette méthode a déjà été appliquée par Tartar [29], et dans les problèmes d'homogénéisation "bornes optimales" par Bergman [5], Golden-Papanicolaou [12] entre autres.

Le plan de ce travail est le suivant. Dans le paragraphe II nous étudions une équation hyperbolique modèle. Nous considérons le problème de Cauchy et le problème aux limites associés. Dans le paragraphe III nous donnons une application en milieu poreux. Le paragraphe IV est une annexe.

Remerciements

Les auteurs remercient Thierry Lehner, François Murat et Luc Tartar pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et les discussions fructueuses qu'ils ont eues avec eux.

II. L'EQUATION HYPERBOLIQUE MODELE

II.1 - LE PROBLEME DE CAUCHY

Soit le problème :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t u^\epsilon + a^\epsilon(t, y) \partial_x u^\epsilon = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ u^\epsilon |_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où $a^\epsilon(t, y)$ est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1})$ vérifiant :

$$(2.2) \quad \|a^\epsilon(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq M', \quad a^\epsilon \rightharpoonup a \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}) \text{ faible } * (\epsilon \rightarrow 0).$$

On suppose $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour simplifier. La solution de (2.1) est donnée par :

$$(2.3) \quad u^\epsilon(t, x, y) = u_0 \left(x - \int_0^t a^\epsilon(s, y) ds, y \right) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N.$$

En notant par $\hat{\cdot}$ la transformation de Fourier par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(2.4) \quad \hat{u}^\epsilon(t, k, y) = \hat{u}_0(k, y) \cdot \hat{h}^\epsilon(t, k, y), \quad \text{où}$$

$$(2.5) \quad \hat{h}^\epsilon(t, k, y) = \exp \left(-2i\pi k \int_0^t a^\epsilon(s, y) ds \right)$$

Pour caractériser la limite faible de u^ϵ nous allons caractériser celle de \hat{h}^ϵ . Pour cela on remarque que :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \partial_k \hat{h}^\epsilon + 2i\pi A^\epsilon(t, y) \hat{h}^\epsilon = 0, \\ \hat{h}^\epsilon|_{k=0} = 1, \end{cases}$$

$$\text{où } A^\epsilon(t, y) = \int_0^t a^\epsilon(s, y) ds.$$

Cette équation est du même type que (1.6); en appliquant la transformation de Laplace en la variable k on trouve :

$$(2.8) \quad \mathcal{L}(\hat{h}^\epsilon(t, \cdot, y))(p) = (p + 2i\pi A^\epsilon(t, y))^{-1}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

On définit la fonction :

$$(2.9) \quad G_{t, y}^\epsilon(z) = (z + 2\pi A^\epsilon(t, y))^{-1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\text{de sorte que } \mathcal{L}(\hat{h}^\epsilon(t, \cdot, y))(p) = \frac{1}{i} G_{t, y}^\epsilon\left(\frac{p}{i}\right), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Pour chaque $T > 0$ fixé, la fonction $A^\epsilon(t, \cdot)$ vérifie $|2\pi A^\epsilon(t, y)| \leq 2\pi M$ dans $[0, T]$ et, pour tout $t \in [0, T]$ fixé, on a :

$$(2.10) \quad \begin{cases} A^\epsilon(t, \cdot) \rightarrow A(t, \cdot) & \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}) \text{ faible } * \\ (A^\epsilon(t, \cdot))^n \rightarrow A_n(t, \cdot) & \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}) \text{ faible } *, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

La fonction $z \rightarrow G_{t,y}^\epsilon(z)$ est régulière en dehors de l'intervalle réel $[-2\pi M, 2\pi M]$ qui contient ses pôles. On peut appliquer le théorème de représentation (cf. Annexe) et on a pour tout $t > 0$:

$$(2.11) \quad G_{t,\cdot}^\epsilon(z) \rightarrow G_{t,\cdot}(z) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}) \text{ faible } *, \text{ et}$$

$$(2.12) \quad G_{t,y}(z) = \left(z + 2\pi A(t,y) + \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{z-\lambda} \right)^{-1},$$

où $d\omega_y^t(\cdot)$ est une mesure, à support dans $[-2\pi M, 2\pi M]$, dont les moments sont entièrement déterminés par les fonctions $A(t,y)$ et $A_n(t,y)$. On a en particulier :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \int d\omega_y^t(\lambda) = (2\pi)^2 \{ A^2(t,y) - A_2(t,y) \}, \\ \int \lambda d\omega_y^t(\lambda) = (2\pi)^3 \{ A^3(t,y) - 2A(t,y) A_2(t,y) + A_3(t,y) \}. \end{cases}$$

D'autre part (cf Annexe), l'application $(t,y) \rightarrow K_y^t(z)$, définie par :

$$(2.14) \quad K_y^t(z) = \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{z-\lambda},$$

vérifie la propriété :

$$(2.15) \quad K_y^t(z) \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}_t^+, L^\infty(\mathbb{R}_y^{N-1})) \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z \notin [-2\pi M, 2\pi M].$$

Considérons la fonction $\mathcal{L}(\hat{h}^\epsilon(t, \cdot, y))(p)$; si on note $\hat{h}(t, k, y)$ la limite faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1})$ de \hat{h}^ϵ , on a, d'après (2.8) - (2.9), pour tout $t > 0$:

$$(2.16) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(\hat{h}^\epsilon(t, \cdot, \cdot))(p) \rightarrow \mathcal{L}(\hat{h}(t, \cdot, \cdot))(p) & \text{dans } L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}) \text{ faible } *, \\ \mathcal{L}(\hat{h}(t, \cdot, y))(p) = \left(p + 2i\pi A(t,y) - \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{p-i\lambda} \right)^{-1}, \end{cases}$$

pour $\text{Im}(p) \notin [-2\pi M, 2\pi M]$.

En prenant la transformation de Laplace inverse on voit que $\hat{h}(t, k, y)$ vérifie :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_k \hat{h}(t, k, y) + 2i\pi A(t, y) \hat{h}(t, k, y) - \int_{-2\pi M}^{2\pi M} d\omega_y^t(\lambda) \int_0^k \hat{h}(t, \sigma, y) e^{i\lambda(k-\sigma)} d\sigma = 0 \\ \hat{h}(t, 0, y) = 1. \end{array} \right.$$

Notons, en comparant à l'équation (2.7) satisfaite par \hat{h}^ϵ , la présence dans (2.17) d'un terme de type mémoire.

Appliquant à (2.17) la transformation de Fourier inverse, on obtient :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2i\pi(x-A(t, y)) h(t, x, y) - \frac{1}{2i\pi} h(t, x, y) - \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(t)}{x + \frac{\lambda}{2\pi}} = 0, \\ \int h(t, x, y) dx = 1, \end{array} \right.$$

dont la solution est donnée par :

$$(2.19) \quad h(t, x, y) = \delta(x-A(t, y)) + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{2\pi x + \lambda} \times 1_y$$

où δ est la masse de Dirac dans \mathbb{R} .

On peut maintenant énoncer le

THEOREME 2.1

La solution u^ϵ du problème (2.1) vérifie, $\forall p \in]1, +\infty[$:

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^\epsilon \rightarrow u \quad \text{dans } L^p(]0, T[\times \mathbb{R}^N) \text{ faible } * \text{ et} \\ \quad \quad \quad \text{dans } L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^N) \text{ faible } *. \end{array} \right.$$

De plus u est donnée par :

$$(2.21) \quad u(t, x, y) = u_0(x) \int_0^t a(s, y) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{2\pi x + \lambda}, y)$$

p.p. dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$.

Démonstration

On sait que u^ϵ est donnée par :

$$(2.22) \quad u^\epsilon(t, x, y) = (u_0(\cdot, y) * \delta(\cdot - \int_0^t a^\epsilon(s, y) ds))(x).$$

D'autre part, écrivant :

$$h^\epsilon(t, x, y) = \delta(x - \int_0^t a^\epsilon(s, y) ds) \times 1_y,$$

on a vu que $\hat{h}^\epsilon(t, k, y) \rightarrow \hat{h}(t, k, y)$ solution de (2.17) et par suite $h(t, x, y)$ est donnée par (2.19), d'où l'expression (2.21).

Corollaire 2.1

Soit u la limite faible de u^ϵ . On pose :

$$(2.23) \quad R(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{2\pi x + \lambda} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}.$$

Alors, formellement, u est solution de l'équation de conservation suivante :

$$(2.24) \quad \begin{cases} \partial_t \{ (1 + \partial_x R) u \} + \partial_x \{ (a - \partial_t R) u \} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Considérons à présent le cas où le coefficient a^ϵ est indépendant de t . La fonction \hat{h}^ϵ , définie par (2.5), s'écrit alors :

$$(2.25) \quad \hat{h}^\epsilon(t, k, y) = \exp(-2i\pi k t a^\epsilon(y)).$$

Les variables t et k jouant le même rôle dans (2.17), alors, en procédant comme précédemment on obtient :

$$(2.26) \quad \begin{cases} \partial_t \hat{h} + 2i\pi k a(y) \hat{h} - k^2 \int_{-2\pi M}^{2\pi M} d\nu_y(\lambda) \int_0^t \hat{h}(s) e^{i\lambda k(t-s)} ds = 0, \\ \hat{h}|_{t=0} = 1, \end{cases}$$

et en dérivant par rapport à k on trouve :

$$(2.27) \quad \begin{cases} \partial_k \hat{h} + 2i\pi t a(y) \hat{h} - t^2 \int_{-2\pi M}^{2\pi M} d\nu_y(\lambda) \int_0^k \hat{h}(\sigma) e^{i\lambda t(k-\sigma)} d\sigma = 0, \\ \hat{h}|_{k=0} = 1. \end{cases}$$

Puisque \hat{u}_0 est indépendant de t et $\hat{u}^\epsilon(t, k, y) = \hat{u}_0(k, y) \hat{h}(t, k, y)$, la limite faible de \hat{u}^ϵ est donnée par $\hat{u}(t, k, y) = u_0(k, y) \hat{h}(t, k, y)$ et par suite (2.26) montre que \hat{u} est solution de :

$$(2.29) \quad \begin{cases} \partial_t \hat{u} + 2i\pi k a(y) \hat{u} - k^2 \int_{-2\pi M}^{2\pi M} d\nu_y(\lambda) \int_0^t \hat{u}(s, k, y) e^{i\lambda k(t-s)} ds = 0, \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0. \end{cases}$$

En prenant la transformation de Fourier inverse, on déduit que la limite faible u vérifie formellement :

$$(2.30) \quad \begin{cases} \partial_t u + a(y) \partial_x u + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^t \partial_x^2 \left\{ \int_{-2\pi M}^{2\pi M} d\nu_y(\lambda) u(s, x + \frac{\lambda}{2\pi} (t-s), y) \right\} ds = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Remarque 2.1

Utilisant (2.27) et le semi-groupe associé à (2.30) on a :

$$(2.31) \quad u(t, x, y) = u_0 \left(t \left\{ \frac{x}{t} - a(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi M}^{2\pi M} \frac{d\nu_y(\lambda)}{2\pi \frac{x}{t} + \lambda} \right\}, y \right).$$

Notons qu'il s'agit de la même mesure $d\nu_y(\cdot)$ dans (2.30) et (2.31)

II.2 - LE PROBLEME AUX LIMITES

Considérons à présent le problème aux limites :

$$(2.32) \quad \begin{cases} \partial_t u^\epsilon + a^\epsilon(y) \partial_x u^\epsilon = 0 & \text{pour } t > 0, (x,y) \in \Omega =]0,1[\times \Omega', \\ u|_{\partial\Omega^-} = u_0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où Ω' est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^{N-1} , $\partial\Omega^- = \{(x,y) \in \Omega, a^\epsilon(y) \cdot n_x < 0\}$, $n = (n_x, n_y)$ étant la normale unitaire extérieure à Ω , au point $(x,y) \in \partial\Omega$. On suppose que le coefficient $a^\epsilon(y)$ est régulier et

$$(2.33) \quad \|a^\epsilon\|_\infty \leq M \quad \text{et} \quad a^\epsilon \rightarrow a \text{ dans } L^\infty(\Omega') \text{ faible } * \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Le semi-groupe associé à (2.32) s'exprime à l'aide de la résolvante par :

$$(2.34) \quad S^\epsilon(t)(u_0) = u^\epsilon(t, \cdot) = \int_\Gamma e^{pt} (p + a^\epsilon \partial_x)^{-1}(u_0) dp$$

où Γ est un contour de \mathbb{C} convenablement choisi. Dans le cas considéré ici, on a $\partial\Omega^- = \{(0,y), y \in \Omega' \text{ si } a^\epsilon(y) > 0 \text{ et } (1,y), y \in \Omega' \text{ si } a^\epsilon(y) < 0\}$.

Pour $y \in \Omega'$ fixé, on définit l'opérateur T , de domaine $D(T)$, par :

$$(2.35) \quad D(T) = \left\{ u \in L^2(0,1), \partial_x u \in L^2(0,1), u(0) = 0 \text{ si } a^\epsilon(y) > 0 \text{ et } u(1) = 0 \text{ si } a^\epsilon(y) < 0 \right\},$$

$$(2.36) \quad T u = \partial_x u.$$

La fonction $a^\epsilon(y)$ est indépendante de x , d'où $D(T) = \{u \in H^1(\mathbb{R}), u(0) = 0 \text{ si } a^\epsilon(y) > 0 \text{ et } u(1) = 0 \text{ si } a^\epsilon(y) < 0\}$. L'opérateur T est maximal positif, donc pour tout $f \in L^2(0,1)$ il existe une seule $w^\epsilon(\cdot, y) \in D(T)$ solution de :

$$(2.37) \quad p w^\epsilon + a^\epsilon(y) \partial_x w^\epsilon = f, \quad p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > 0.$$

En prenant la transformation de Laplace en t de (2.32) on obtient :

$$(2.38) \quad \begin{cases} p v^\epsilon + a^\epsilon(y) \partial_x v^\epsilon - u_0 \in L^2((0,1) \times \Omega') \\ v^\epsilon|_{\partial\Omega^-} = 0 \end{cases}$$

où v^ϵ désigne la transformée de Laplace de u^ϵ . On approche u_0 par un élément $v_0 \in D([0,1] \times \bar{\Omega}')$. Pour $y \in \Omega'$ fixé, il existe, d'après (2.37), une seule solution $v^\epsilon(\cdot, y)$ de :

$$(2.39) \quad \begin{cases} p v^\epsilon(\cdot, y) + a^\epsilon(y) \partial_x v^\epsilon(\cdot, y) = v_0(\cdot, y) \in L^2(0,1), & \operatorname{Re} p > 0 \\ v^\epsilon(\cdot, y) \Big|_{x=0 \text{ ou } 1} = 0. \end{cases}$$

Cette solution est donnée par :

$$(2.40) \quad v^\epsilon(\cdot, y) = (p + a^\epsilon(y) \cdot T)^{-1} (v_0(\cdot, y)).$$

En utilisant la formule de représentation par l'intégrale de Dunford de la résolvante $(p + a^\epsilon(y) \cdot T)^{-1}$ donnée dans l'annexe on trouve, pour $\operatorname{Re} p > 0$:

$$(2.41) \quad v^\epsilon(\cdot, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_p} (z - a^\epsilon(y))^{-1} (p + z T)^{-1} (v_0(\cdot, y)) dz$$

où Γ_p est le contour de \mathbb{C} défini par la frontière du domaine :

$$D_p = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z \notin [-M, M], \left| z - \frac{p}{2C} \right|^2 \leq \frac{|p|^2}{4C^2} \right\}$$

où $C > 0$ est une constante fixée.

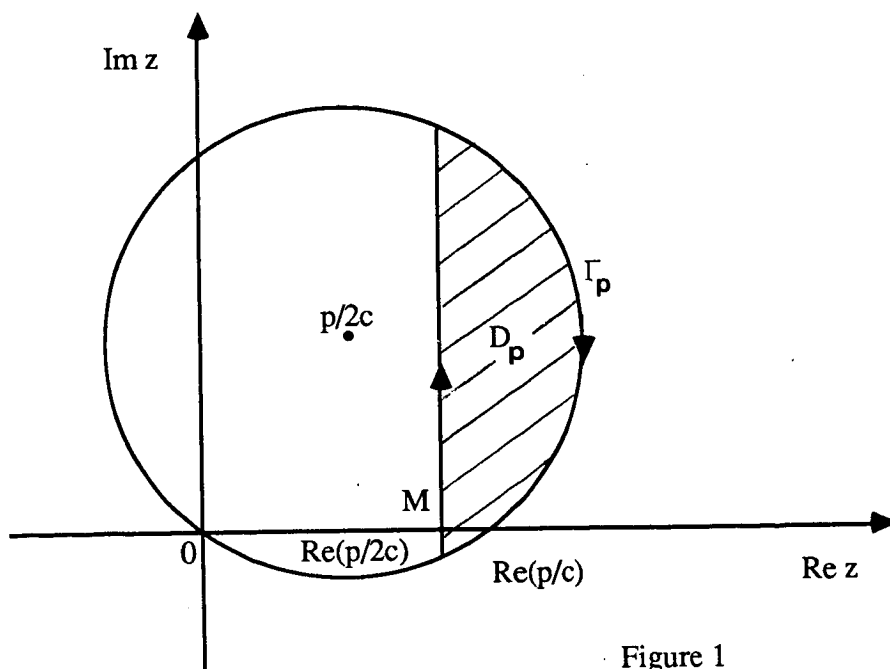


Figure 1

Notons que $(p + zT)^{-1}(v_0(\cdot, y))$ vérifie, pour tout y , la majoration

$$(2.42) \quad \left| (p + zT)^{-1}(v_0(\cdot, y)) \right|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{C|z|} \left| v_0(\cdot, y) \right|_{L^2(0,1)}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p/z) \geq C$.

Considérons maintenant la fonction définie sur \mathbb{C} par :

$$(2.43) \quad \phi_y^\epsilon(z) = (z - a^\epsilon(y))^{-1} \quad \text{p.p. en } y \in \Omega'.$$

C'est une fonction régulière en dehors de l'intervalle réel $[-M, M]$ où $|a^\epsilon(y)| \leq M, \forall y \in \Omega'$. Comme $a^\epsilon \rightarrow a$ dans $L^\infty(\Omega')$ faible *, les résultats de l'annexe montrent que :

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^\epsilon(z) \rightarrow \phi(z) \text{ dans } L^\infty(\Omega') \text{ faible } * , z \notin [-M, M], \\ \phi_y(z) = (z - a(y) + \int \frac{d\nu_y(\lambda)}{z - \lambda})^{-1} \end{array} \right.$$

où $d\nu_y(\cdot)$ est une mesure à support dans l'intervalle $[-M, M]$ dont tous les moments sont déterminés par les limites faibles de $(-a^\epsilon)^n, n \geq 1$:

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \lambda^k d\nu_y(\lambda) = \tau_k(y) \quad \text{p.p. en } y \in \Omega' , \forall k \geq 0 , \text{ avec} \\ \tau_0(y) = a^2(y) - a_2(y), \tau_1(y) = -(a_3(y) - 2a(y)a_2(y) + a^3(y)), \text{ etc..} \end{array} \right.$$

En outre, on a :

$$(2.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \lambda^{-1} d\nu_y(\lambda) = a_{-1} - a \text{ avec } (a^\epsilon)^{-n} \rightarrow a_{-n}^{-1} \text{ dans } L^\infty(\Omega') \text{ faible } *, \\ \int \lambda^{-2} d\nu_y(\lambda) = 1 - (a^2 - 1/a_{-2}). \end{array} \right.$$

En passant à la limite ($\epsilon \rightarrow 0$) dans la formule de représentation (2.41), il vient :

$$(2.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^\epsilon \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible et } v(\cdot, y) \in D(T) \text{ p.p. en } y \in \Omega', \\ v(\cdot, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_p} (z-a(y) + \int \frac{d\nu_y(\lambda)}{z-\lambda})^{-1} (p+zT)^{-1} (v_0(\cdot, y)) dz. \end{array} \right.$$

En vue d'utiliser les propriétés de l'intégrale de Dunford, nous faisons dans (2.47) le changement de variable $\zeta = 1/z$. On définit le contour $\Gamma_p^* = \{\zeta \in \mathbb{C} \text{ tel que } 1/\zeta \in \Gamma_p\}$. On a alors la représentation suivante :

$$(2.48) \quad v(\cdot, y) = - \frac{1}{2i\pi p} \int_{\Gamma_p^*} (1-\zeta a(y) + \zeta^2 \int (1-\lambda\zeta)^{-1} d\nu_y(\lambda))^{-1} (v_0 + \frac{1}{p} T)^{-1} (v_0(\cdot, y)) d\zeta$$

p.p. en $y \in \Omega'$.

Si on définit $\psi(\zeta) = \left(1 - a(y)\zeta + \zeta^2 \int (1-\lambda\zeta)^{-1} d\nu_y(\lambda)\right)^{-1}$ alors, le membre de droite de (2.48) définit, à l'aide de l'intégrale de Dunford, la fonction d'opérateurs $\psi(-\frac{1}{p} T)$, de sorte que l'on a :

$$(2.49) \quad v(\cdot, y) = \frac{1}{p} \psi\left(-\frac{1}{p} T\right) = \left(p + a(\psi)T + T^2 \int (p+\lambda T)^{-1} d\nu_y(\lambda)\right)^{-1} (v_0(\cdot, y))$$

p.p. en $y \in \Omega'$. Notons que l'opérateur $(p+\lambda T)^{-1}$ n'agit pas sur la variable y .

Lemme 2.1

Soit v^ϵ la solution de (2.38) alors

$$(2.50) \quad v^\epsilon \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible, } v(\cdot, y) \in D(T) \text{ p.p. en } y \in \Omega' \text{ et on a :}$$

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} pv(\cdot, y) + a(y)Tv(\cdot, y) + [T^2 \int (p+\lambda T)^{-1} d\nu_y(\lambda)] v(\cdot, y) = u_0(\cdot, y) \\ v|_{\partial\Omega^-} = 0 \end{array} \right.$$

pour tout $p \in \mathbb{C}$, $\text{Re } p > 0$ et p.p. en $y \in \Omega'$.

Démonstration

La représentation (2.49) est vraie pour tout $v_0 \in D([0,1] \times \bar{\Omega}')$, par densité elle est vraie pour tout $u_0 \in L^2((0,1) \times \Omega')$. Notons que, puisque T et $(p+\lambda T)^{-1}$ commutent :

$$(2.52) \quad \left(T^2 \int (p+\lambda T)^{-1} d\nu_y(\lambda) \right) [v(\cdot, y)] = \int T^2 (p+\lambda T)^{-1} (v(\cdot, y)) d\nu_y(\lambda) = \\ = \int p(+\lambda T)^{-1} T^2 v(\cdot, y) d\nu_y(\lambda).$$

Soit $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ la limite faible dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ de u^ϵ solution du problème (2.32). La transformée de Laplace en t de u est la fonction v du lemme 2.1 car v^ϵ est la transformée de Laplace de u^ϵ .

Considérons le problème suivant :

$$(2.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p+\lambda T)f = v(\cdot, y) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad \lambda \in [-M, M], \\ f|_{\sigma_1} = 0 \end{array} \right.$$

où $\sigma_1 = \{0 \text{ si } \lambda \geq 0, 1 \text{ si } \lambda < 0\}$. On note F la transformée de Laplace inverse de f , alors F est solution de :

$$(2.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t F + \lambda \partial_x F = u(t, \cdot, y), \\ F|_{t=0} = 0, \\ F|_{[0, T] \times \sigma_1} = 0. \end{array} \right.$$

La solution de (2.54) est donnée par :

$$(2.55) \quad F(t, x+\lambda t, y) = \int_0^t u(s, x+\lambda s, y) ds \quad \text{pour} \quad 0 \leq x+\lambda s \leq 1 \text{ et } 0 \leq s \leq t.$$

En prenant la transformation de Laplace inverse de (2.51), et en utilisant (2.55), il vient :

$$(2.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + a(y) \partial_x u + \int_0^t ds \int d\nu_y(\lambda) \partial_x^2 u(s, x-(t-s)\lambda, y) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{[0, T] \times \partial\Omega^-} = 0. \end{array} \right.$$

Remarque 2.2

Considérons l'opérateur P défini, pour u fonction régulière de t,x,y, par :

$$(2.57) \quad Pu(t,x,y) = \int_0^t \left(\int d\gamma_y(\lambda) \partial_x^2 u(s, x-(t-s)\lambda, y) \right) ds$$

alors, par la transformation de Fourier en x, on a :

$$(2.58) \quad \hat{P}u(t,k,y) = \int_0^t \left(\int d\gamma_y(\lambda) e^{-2i\pi k(t-s)\lambda} (2i\pi k)^2 \hat{u}(s,k,y) \right) ds.$$

On introduit le noyau :

$$(2.59) \quad \hat{K}(z,y) = \int d\nu_y(\lambda) e^{-2i\pi z\lambda},$$

alors on a :

$$(2.60) \quad \hat{P}\hat{u}(t,k,y) = \int_0^t ds \hat{K}\left(\frac{k}{t-s}, y\right) (2i\pi k) \hat{u}(s,k,y)$$

de sorte que l'opérateur P s'écrit :

$$(2.61) \quad Pu(t,x,y) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} K(z,y) u_x^2(s, x-(t-s)z, y) dz.$$

Remarquons que, puisque $d\gamma_y(\lambda) = \nu'_y(\lambda)d\lambda$, $\hat{K}(z,y) = \hat{\nu}'_y(z)$ et par suite $K(z,y) = \nu'_y(z)$.

Nous avons établi le :

THEOREME 2.2

Soit u^ϵ la solution du problème (2.32). Alors $u^\epsilon \rightharpoonup u$ dans $L^\infty(0,T, L^2(\Omega))$ faible * où u est solution du problème (2.56).

III - APPLICATION

Nous considérons un écoulement miscible dans un milieu poreux, incompressible. La concentration u^ϵ et la pression p^ϵ satisfont aux équations (1.1) et (1.2).

Nous allons considérer le cas où $\Omega =]0,1[\times \Omega'$ avec $\Omega' \subset \mathbb{R}^{N-1}$ un ouvert borné et régulier. On suppose que $\phi^\epsilon(x) \equiv 1$ et la matrice $K^\epsilon(x) = (k_{ij}^\epsilon(x))$ vérifie $k_{ij}^\epsilon = 0$ $i \neq 1, j \neq 1$ de sorte que la loi de Darcy s'écrit :

$$(3.1) \quad q_1^\epsilon(t, x, y) = - \frac{k_{11}^\epsilon(x, y)}{\mu} \partial_x p^\epsilon, \quad q_j^\epsilon(t, x, y) = 0, \quad j=2, \dots, n.$$

L'incompressibilité montre que $q_1^\epsilon(t, x, y) = \lambda^\epsilon(t, y)$, $\forall y \in \Omega', \forall x \in]0,1[, \forall t > 0$. On suppose que la pression p^ϵ vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$(3.2) \quad p^\epsilon(t, 0, y) = p_0(y), \quad p^\epsilon(t, 1, y) = p_1(y), \quad \forall y \in \Omega', \forall t > 0,$$

de sorte que l'on a (en notant $k_{11}^\epsilon(x, y) \equiv k^\epsilon(x, y)$) :

$$(3.3) \quad q_1^\epsilon(t, x, y) = \frac{\beta(y)}{1 - \int_0^1 \frac{dx}{k^\epsilon(x, y)}}, \quad \beta(y) = (p_0(y) - p_1(y)) / \mu.$$

on suppose également

$$(3.4) \quad 0 < \beta_1 \leq \beta(y) \leq \beta_2 \quad \text{p.p. en } y \in \Omega',$$

de sorte que la saturation u^ϵ vérifie le problème :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \partial_t u^\epsilon + a^\epsilon(y) \cdot \partial_x u^\epsilon = 0, \\ u^\epsilon \Big|_{t=0} = u_0, \\ u^\epsilon \Big|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(3.6) \quad a^\epsilon(y) = \frac{\beta(y)}{1 - \int_0^1 \frac{dx}{k^\epsilon(x, y)}} \quad \text{p.p. en } y \in \Omega'.$$

Nous supposons que la perméabilité vérifie :

$$(3.7) \quad 0 < m_1 \leq k^\epsilon(x, y) \leq m_2 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

ainsi,

$$(3.8) \quad \beta_1 m_1 \leq a^\epsilon(y) \leq \beta_2 m_2,$$

on a, pour des suites extraites, $a^\epsilon \rightharpoonup a$ et $1/a^\epsilon \rightharpoonup 1/a_{-1}$ dans $L^\infty(\Omega')$ faible *.
on a $1/\sigma^\epsilon \rightharpoonup 1/\sigma_{-1}$ dans $L^\infty(\Omega')$ faible * et par suite on peut écrire :

$$(3.10) \quad a(y) = \beta(y) \sigma_{-1}^{-1}(y) ; \quad a_{-1}^{-1}(y) = \beta(y) \int_0^1 \frac{dx}{k_{-1}(x, y)}$$

$$\text{où } \int_0^1 k_\epsilon^{-1}(x, y) dx \rightharpoonup \int_0^1 k_{-1}^{-1}(x, y) dx \quad \text{dans } L^\infty(\Omega') \text{ faible *}.$$

Le théorème 2.2 assure que la limite faible u de u^ϵ vérifie le problème suivant :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \frac{\beta(y)}{\sigma_{-1}(y)} \partial_x u + \int_0^t ds \int d\nu_y(\lambda) \partial_x^2 u(s, x - (t-s)\lambda, y) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{x=0} = 0, \end{array} \right.$$

où $d\nu_y(\cdot)$ est une mesure à support dans $[\beta_1 m_1, \beta_2 m_2]$ dont tous les moments sont caractérisés par les limites faibles des suites $(1/\sigma^\epsilon(y))^n$, $n \geq 1$.

Considérons maintenant l'équation elliptique satisfaite par p^ϵ :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\partial_x (k^\epsilon(x, y) \partial_x p^\epsilon) = 0 \quad x \in]0, 1[, y \in \Omega' \\ p|_{x=0} = p_0(y), p|_{x=1} = p_1(y). \end{array} \right.$$

On a :

$$(3.13) \quad k^\epsilon(x, y) \partial_x p^\epsilon = -\frac{\beta(y)}{\sigma^\epsilon(y)} \rightharpoonup \frac{\beta(y)}{\sigma_{-1}(y)} \quad \text{dans } L^\infty(\Omega') \text{ faible *}.$$

En outre, p^ϵ est dans un borné de $L^2(\Omega)$ alors, en notant p la limite faible dans $L^2(\Omega)$ de p^ϵ , on a :

$$(3.14) \quad \begin{cases} \partial_x p^\epsilon \rightarrow \partial_x p & \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } * \text{ et} \\ \partial_x p^\epsilon = - \frac{\beta(y)}{\sigma^\epsilon(y)} \cdot \frac{1}{k^\epsilon(x,y)} \rightarrow - \frac{\beta(y)}{\sigma_{-1}(y)} \cdot \frac{1}{K(x,y)} & \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } * \end{cases}$$

où $K(x,y)$ est définie par $K(x,y) = \sigma_{-1}(y) M(x,y)$ et $\frac{1}{\sigma^\epsilon(y) \cdot k^\epsilon(x,y)} \rightarrow M(x,y)$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible * de sorte que p vérifie :

$$(3.15) \quad K(x,y) \partial_x p = - \frac{\beta(y)}{\sigma_{-1}(y)}$$

et on a la relation :

$$(3.16) \quad \sigma_{-1}(y) = \int_0^1 \frac{dx}{K(x,y)} .$$

Finalement p est solution du problème :

$$(3.17) \quad \begin{cases} -\partial_x (K(x,y) \partial_x p) = 0 & \text{dans }]0,1[\times \Omega' \\ p|_{x=0} = p_0(y), \quad p|_{x=1} = p_1(y) & \text{pour } y \in \Omega' ; \end{cases}$$

où, rappelons le, le coefficient $K(x,y)$ est défini par

$$(3.18) \quad \frac{1}{k^\epsilon(x,y)} \cdot \frac{1}{\int_0^1 \frac{dx}{k^\epsilon(x,y)}} \rightarrow \frac{1}{K(x,y)} \cdot \frac{1}{\sigma_{-1}(x,y)} \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible}^* .$$

et vérifie (3.16).

Le problème homogénéisé est donc donné par (3.11) et (3.17).

IV - ANNEXE : THEOREMES DE REPRESENTATION

IV.1 - LIMITE L^∞ FAIBLE * DE $\phi_x^\epsilon(z)$

Soit $(a^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de fonctions de $L^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de \mathbb{R}^N , supposée uniformément bornée et convergente dans $L^\infty(\Omega)$ faible * :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \leq a^\epsilon(x) \leq \beta & \text{p.p. dans } \Omega \\ a^\epsilon \rightarrow a & \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

On désigne par $\phi_x^\epsilon(z)$ la fonction définie par :

$$(4.2) \quad \phi_x^\epsilon(z) = (z + a^\epsilon(x))^{-1}$$

p.p. en $x \in \Omega$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que le second membre de (4.2) ait un sens. Il résulte de (4.1) que, pour z fixé dans \mathbb{C} :

$$(4.3) \quad \phi_x^\epsilon(z) \rightarrow \phi_x(z) = \langle \nu_x, (z+\lambda)^{-1} \rangle \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *$$

où (ν_x) est la famille de mesures paramétrées de Young, associée à (a^ϵ) , vérifiant $\text{supp}(\nu_x) \subset [\alpha, \beta]$ pour presque tout $x \in \Omega$. Il s'agit ici d'obtenir des informations supplémentaires sur la fonction $\phi_x(z)$ définie par (4.3). Nous allons faire appel pour cela à un théorème de représentation des fonctions holomorphes de type Herglotz.

Définition ([1], p.53)

Soit $F(z)$ une fonction de la variable complexe z . On dit que F est une fonction de Névanlinna ou N-fonction si elle est holomorphe dans le demi-plan $\text{Im}(z) > 0$ et vérifie la propriété $\text{Im}(F(z)) < 0$ si $\text{Im}(z) > 0$.

THEOREME A ([1], p. 58-59)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F(z)$ de la variable complexe z admette la représentation suivante :

$$(4.4) \quad F(z) = \int_a^b \frac{d\omega(\lambda)}{z-\lambda} + c$$

où c est une constante et $\omega(\lambda)$ une fonction croissante bornée, est que l'on ait :

- (i) $F(z)$ est régulière à l'extérieur du segment $[a, b]$,
- (ii) $F(z) - F(\infty)$ est réel pour $z=x < a$, $z=x > b$,
- (iii) $F(z) - F(\infty)$ est une N-fonction.

Lorsque $F(z)$ satisfait la propriété supplémentaire (4.5) ci-après, on peut déduire des informations sur les moments de $d\omega(\cdot)$:

THEOREME B ([1], p.p. 54-55)

Si une N-fonction $F(z)$ vérifie la propriété suivante :

$$(4.5) \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} (iy)^{2p+1} \left\{ F(iy) - \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{\tau_{k-1}}{(iy)^k} \right\} = 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

où $\tau_0, \dots, \tau_{2N} \in \mathbb{R}$, alors $F(z)$ admet la représentation (4.4) avec $c=0$, $a=-\infty$, $b=+\infty$. De plus $d\omega(\cdot)$ vérifie :

$$(4.6) \quad \int \lambda^k d\omega(\lambda) = \tau_k \quad \text{pour } k = 0, \dots, 2p.$$

Nous appliquons ces théorèmes à la fonction $\phi_x(z)$ donnée par (4.3). On note

$$(4.7) \quad (a^\epsilon)^n \rightarrow a_n' \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } * \text{ pour } n \geq 2.$$

Pour $z \notin [-\beta, -\alpha]$, la fonction $z \rightarrow \phi_x^\epsilon(z)$ est holomorphe et admet le développement asymptotique suivant :

$$(4.8) \quad \phi_x^\epsilon(z) = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{a^\epsilon(x)}{z} + \frac{(a^\epsilon(x))^2}{z^2} - \dots + (-1)^n \frac{(a^\epsilon(x))^n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \right\};$$

en passant à la limite faible quand $\epsilon \rightarrow 0$ on voit que :

$$(4.9) \quad \phi(z) = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \right\}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \notin [-\beta, -\alpha]$. Des calculs simples montrent alors que l'on peut écrire :

$$(4.10) \quad \frac{1}{\phi_x(z)} = a(x) + z + K_x(z), \quad z \notin [-\beta, -\alpha], \quad \text{p.p. en } x \in \Omega$$

où $K_x(z)$ vérifie :

$$(4.11) \quad \begin{cases} K_x(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_{k-1}}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \\ \tau_0 = a^2 - a_2, \quad \tau_1 = (a_3 - 2aa_2 + a^3), \quad \text{etc} \dots \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$$

Tous les coefficients τ_n sont déterminés explicitement en fonction des a et a_k pour $2 \leq k \leq n$.

La fonction $z \rightarrow K_x(z)$, définie par (4.10), est régulière en dehors de l'intervalle $[-\beta, -\alpha]$, elle est réelle si $z \in \mathbb{R} \setminus [-\beta, -\alpha]$ et $K_x(\infty) = 0$. Elle satisfait (i) et (ii) du théorème A et grâce à (4.11) elle vérifie la condition (4.5) du théorème B. Montrons que $K_x(z)$ est une N-fonction. On a, d'après (4.3) et (4.10).

$$(4.12) \quad \text{Im}(K_x(z)) = -\text{Im} z \left\{ 1 - \frac{\langle \nu_x, |z+\lambda|^{-2} \rangle}{|\langle \nu_x, (z+\lambda)^{-1} \rangle|^2} \right\}.$$

L'inégalité de Jensen montre alors que $\text{Im}(K_x(z)) < 0$ dès que $\text{Im} z > 0$. Les théorèmes A et B s'appliquent alors à $z \rightarrow K_x(z)$. Il existe une fonction $\omega_x(\lambda)$ croissante et bornée pour $\lambda \in [-\beta, -\alpha]$ telle que

$$(4.13) \quad K_x(z) = \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{d\omega_x(\lambda)}{z-\lambda} \quad \text{p.p. en } x \in \Omega,$$

$$(4.14) \quad \int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^k d\omega_x(\lambda) = \tau_k(x) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall k \geq 0.$$

Nous avons donc établi la :

Proposition 4.1

La limite $L^\infty(\Omega)$ faible * $\phi_x(z)$ de $\phi_x^\epsilon(z)$ est donnée par :

$$(4.15) \quad \phi_x(z) = \left(z + a(x) + \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{d\omega_x(y)}{z-\lambda} \right)^{-1} \quad \text{p.p. en } x \in \Omega.$$

Remarque 4.1

Si $a^\epsilon \rightarrow a$ fortement alors $K_x(z) \equiv 0 \quad \forall z$ et p.p. en $x \in \Omega$. En effet, on montre par récurrence que $\tau_k \equiv 0 \quad \forall k \geq 0$ et, par suite, tous les moments de $d\omega_x(\cdot)$ sont nuls, d'où le résultat.

Remarque 4.2

On peut calculer les expressions suivantes :

$$(4.16) \quad \int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^{-k-1} d\omega_x(\lambda) = (-1)^k k! k_x^{(k)}(0), \quad k \geq 0.$$

on voit alors que :

$$(4.17) \quad \int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^{-1} d\omega_x(\lambda) = a(x) - \langle \nu_x, 1/\lambda \rangle^{-1} = a(x) - a_{-1}(x)$$

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} \lambda^{-2} d\omega_x(\lambda) = 1 + \frac{\phi'_x(0)}{|\phi_x(0)|^2} = 1 - \frac{a^2(x)}{a_{-2}(x)} \quad \text{p.p. en } x \in \Omega.$$

où $1/a^\epsilon \rightarrow 1/a_{-1}$ et $(1/a^\epsilon)^2 \rightarrow 1/a_{-2}$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible *.

Remarque 4.3

Soit $(a^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, Ω ouvert de \mathbb{R}^N , vérifiant :

$$\begin{aligned} \alpha \leq a^\epsilon(t, y) \leq \beta & \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ a^\epsilon \rightarrow a & \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \text{ faible *}. \end{aligned}$$

On désigne par $G_{t,y}^\epsilon(z)$ la fonction définie par :

$$G_{t,y}^\epsilon(z) = (z + A^\epsilon(t, y))^{-1} \quad \text{avec} \quad A^\epsilon(t, y) = \int_0^t a^\epsilon(s, y) ds,$$

p.p. en $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ et par $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + A^\epsilon(t, y) \neq 0$.

D'après l'étude précédente, on a (pour une suite extraite) pour tout $t > 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} G_{t, \cdot}^\epsilon(z) &\rightarrow G_{t, \cdot}(z) && \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible *} \\ G_{t,y}^\epsilon(z) &= (z + A(t, y) + K_y^t(z))^{-1} && \text{avec} \\ A(t, y) &= \int_0^t a(s, y) ds, \quad K_y^t(z) = \int_{t\alpha}^{t\beta} \frac{d\omega_y^t(\lambda)}{z - \lambda}, \end{aligned} \right.$$

où $\omega_y^t(\cdot)$ est une mesure à support dans $[\alpha, \beta]$ dont on sait caractériser les moments. De plus, $(t, y) \rightarrow K_y^t(z)$ est dans $W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Omega))$. Cela résulte des relations :

$$\begin{cases} \partial_t G_{t,y}^\epsilon(z) = -a^\epsilon(t, y) [G_{t,y}^\epsilon(z)]^2, \\ K_y^t(z) = [G_{t,y}^\epsilon(z)]^{-1} - z - A. \end{cases}$$

IV.2 - INTEGRALE DE DUNFORD POUR UNE RESOLVANTE

Soit $u_0 \in L^2(0,1)$, on considère pour p et z dans \mathbb{C} , le problème :

$$(4.18) \quad \begin{cases} pw + z \partial_x w = u_0, & x \in]0,1[, \\ w|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

En posant $\zeta = p/z \in \mathbb{C}$ on a le problème :

$$(4.19) \quad \begin{cases} \zeta w + \partial_x w = \frac{1}{z} u_0, & x \in]0,1[, \\ w|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

qui admet une unique solution $w \in H = \{u \in H^1(0,1), u(0) = 0\}$ dès que $\text{Re}(\zeta) > 0$; en outre, la solution w vérifie la majoration :

$$(4.20) \quad |w|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{c|z|} |u_0|_{L^2(0,1)} \quad \text{pour } \text{Re}\left(\frac{p}{z}\right) \geq c > 0.$$

La condition $\text{Re}(p/z) \geq c$ s'exprime par $z \in D_p = \left\{z \in \mathbb{C}, \left|z - \frac{p}{2c}\right| \leq \frac{|p|^2}{4c^2}\right\}$.

Soit à présent $a^\epsilon(y) \in L^\infty(\Omega')$, Ω' un ouvert de \mathbb{R} telle que

$$(4.21) \quad \begin{cases} \alpha \leq a^\epsilon(y) \leq \beta & \text{p.p. en } y \in \Omega', \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ a^\epsilon \rightarrow a & \text{dans } L^\infty(\Omega') \text{ faible } *. \end{cases}$$

Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} p \geq c \max(0, \beta)$; on définit $D_p^* = \{z \in D_p ; \operatorname{Re} z \notin [\alpha, \beta]\}$ et on note Γ_p^* la frontière de D_p^* .

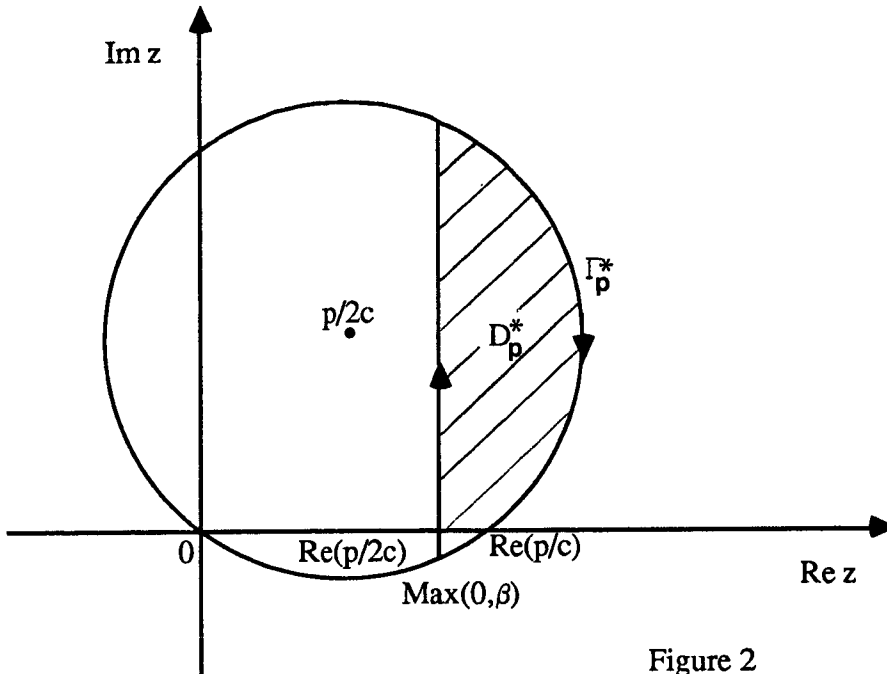


Figure 2

Nous pouvons définir la fonction suivante :

$$(4.22) \quad F_x^\epsilon(p) \equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_p^*} (z - a^\epsilon(y))^{-1} w(z, x) dz \quad \text{p.p. en } x \in]0, 1[$$

où $w(z, \cdot)$ est la solution de (4.18). La fonction $F_x^\epsilon(p)$ est bien définie puisque le pôle de $(z - a^\epsilon(y))^{-1}$ est le point $a^\epsilon(y)$ et $w(z, \cdot) \in H$ dès que $z \in D_p$. Comme l'intégration porte pour $z \in \Gamma_p^*$ on voit que l'intégrale définie par le second membre de (4.22) a un sens. La fonction $z \rightarrow w(z, \cdot)$ étant holomorphe de D_p dans $L^2(0, 1)$, le théorème de Cauchy classique montre que :

$$(4.23) \quad F_x^\epsilon(p) = w(a^\epsilon(y), \cdot).$$

Nous avons donc la

Proposition 4.2

Soit $v^\epsilon \in H$ la solution du problème :

$$(4.24) \quad \begin{cases} pv^\epsilon + a^\epsilon(y) \partial_x v^\epsilon = u_0 \in L^2(0,1), \\ v^\epsilon|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

pour a^ϵ vérifiant (4.21) et $\operatorname{Re} p \geq c \max(0, \beta)$, alors :

$$(4.25) \quad v^\epsilon(p, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_p^*} (z - a^\epsilon(y))^{-1} (p + zT)^{-1} (u_0) dz$$

où T est l'opérateur défini par $D(T) = H$ et $Tu = \partial_x u$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **AKHIEZER, N.I., KREIN, M.,** *Some Questions in the Theory of Moments*, Translation of Math. Monogr., Vol.2, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1962.
- [2] **AMAZIANE, B.** *Thèse de l'Université de Saint-Etienne, à paraître.*
- [3] **AMIRAT, Y., HAMDACHE, K., ZIANI, A.,** *Homogénéisation d'un Modèle d'Écoulements Miscibles en Milieu Poreux, Rapport INRIA à paraître.*
- [4] **BENSOUSSAN, A., LIONS, J.L., PAPANICOLAOU, G.C.,** *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] **BERGMAN, D.J.,** *Bulk Physical Properties of Composite Media*, Ecole d'Été d'Analyse Numérique, CEA-EDF-INRIA, Eyrolles, 1985, p.1-128.
- [6] **BONNEFILLE, M.,** *Propagation des Oscillations dans les Systèmes Hyperboliques de lois de Conservation*, Thèse Univ. Saint-Etienne, 1987.
- [7] **BOURGEAT, A.** *Homogenized Behavior of Two-Phase Flows in Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fractures Distribution*, Computer Methods in Appl. Mech. and Eng., 47, North-Holland, 1984, p.205-216.
- [8] **CHAVENT, G., JAFFRE, J.,** *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, North-Holland, 1986.
- [9] **DIPERNA, R.J.,** *Measure-Valued Solutions of Conservation Laws*, Arch. Rat. Mech. Anal., 8, 1985.
- [10] **DIPERNA, R.J., MAJDA, A.J.,** *Oscillations and Concentrations in Weak Solutions of the Incompressible Fluid Equations*, Commun. Math. Phys., 108, 1987, p.667-689.
- [11] **DIPERNA, R.J., MAJDA, A.J.,** *Concentrations in Regularizations for 2-D incompressible flow*, Commun. Pure and Applied math., XL, 1987, p. 301-345.

- [12] **GOLDEN, K., PAPANICOLAOU, G.C.**, *Bounds for Effective Parameters of Heterogeneous Media by Analytic Continuation*, Commun. Math. Phys., 90, 1983, p. 473-491.
- [13] **LIONS, P.L.**, *The Concentration-compactness Principle in the calculus of Variations, The Locally Compact Case, Parts I and II*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1, 1984, 109-145, 223-283.
- [14] **LIONS, P.L.**, *The Concentration-compactness Principle in the Calculus of Variations, the limit Case, parts I and II*, Riv. Mat. Iberiamericana, 1, 1984, p.145-201 and 1, 1985, p.45-121.
- [15] **LIONS, P.L., PAPANICOLAOU, G., VARADHAN, S.R.S.**, *Homogenization of Hamilton-Jacobi Equations*, Preprint.
- [16] **MCLAUGHLIN, D.W., PAPANICOLAOU, G.C., TARTAR, L.**, *Weak Limits of Semilinear Hyperbolic Systems with Oscillating Data*, Lectures Notes in Physics, 230, Springer-Verlag.
- [17] **MASCARENHAS, M.L.**, *A Linear Homogeneization problem with Time Dependent Coefficient*, Trans. Amer. Math. Soc., V. 281, n°1, 1984, p.179-195.
- [18] **MURAT, F.**, *Compacité par Compensation*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, V.5, 1978, p.489-507.
- [19] **MURAT, F.**, *H-Convergence*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique, Univ. Alger, Multigraphié, 1978.
- [20] **SANCHEZ-PALENCIA, E.**, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lect. Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.
- [21] **SERRE, D.**, *Propagation des Oscillations dans les Systèmes Hyperboliques Non Linéaires*, Congrès Saint-Etienne, 1986, Carasso, Serre, Raviart Eds., Lect. Notes in Maths., Springer-Verlag.
- [22] **SERRE, D.**, *La Compacité par Compensation pour les Systèmes Hyperboliques Non Linéaires de deux Equations à une Dimension d'Espace*, J. Math. Pures et Appl., 65, 1986, p. 423-468.
- [23] **SHVIDLER, M.I.**, *Averaging Transfer Equations in Porous Media with Random Inhomogeneities*, Translated from Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza, 1, 1985, p. 59-65.

- [24] **SHVIDLER, M.I.**, *Dispersion of a Filtration Stream in a Medium with Random Inhomogeneities*, Sov. Phys. Dokl., V.20, 3, 1975, p. 171-173.
- [25] **TARTAR, L.**, *Compensated Compactness and Applications to P.D.E.*, Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, 4, V.39, R.J. Knops ed., Pitman Press, 1979.
- [26] **TARTAR, L.**, *Solutions Oscillantes des Equations de Carleman*, Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1980-1981, Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique de palaiseau.
- [27] **TARTAR, L.**, *Etude des Oscillations dans les Equations aux Dérivées partielles non Linéaires*, Lectures Notes in Physics, 195, Springer-Verlag.
- [28] **TARTAR, L.**, *Remarks on Oscillations and Stokes Equations*, Lectures Notes in Physics, 230, Springer-Verlag.
- [29] **TARTAR, L.**, *Remarks on Homogenization*, Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media, I.M.A. volumes in math. and its Appli., 1, Ericksen, Kinderlehrer, Kohn, Lions, Eds., Springer-Verlag, 1986, p.228-246.

