Homogeneisation d'un modele d'ecoulements miscibles en milieu poreux

Yacine Amirat, K. Hamdache, A. Ziani

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 802

HOMOGENEISATION D'UN MODELE D'ECOULEMENTS MISCIBLES EN MILIEU POREUX

Youcef AMIRAT
Kamel HAMDACHE
Abdelhamid ZIANI

MARS 1988

HOMOGENEISATION D'UN MODELE D'ECOULEMENTS MISCIBLES EN MILIEU POREUX

*****

HOMOGENIZATION OF A MISCIBLE DISPLACEMENTS MODEL IN POROUS MEDIA

Youcef AMIRAT(*)
Kamel HAMDACHE(**)
Abdelhamid ZIANI(***)

(*) INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. 105-78153, Le Chesnay Cédex, France.
(**) ENSTA/GHN, Centre de l'Yvette, Chemin de la Hunière, 91120 Palaiseau Cédex, France.
(***) Institut de Mathématiques, USTHB, B.P. 31, El Alia, Alger, Algérie.

RESUME

On considère un modèle 1-D d'écoulements miscibles incompressibles dans un milieu poreux, sans terme de dispersion. On montre l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème, pour des données peu régulières. On étudie ensuite l'homogénéisation du problème. Le problème limite est du même type; le résultat est obtenu grâce à une propriété de compacité des courbes caractéristiques associées.

ABSTRACT

We consider a 1-D model for incompressible miscible displacements in porous media without any dispersion term. Existence and uniqueness results for non smooth data are proved. We study the homogenization of the model. The limit problem is of the same type. The result is obtained thanks to compactness properties of the corresponding characteristic curves.

MOTS-CLES

Caractéristiques - Homogénéisation - Milieux poreux.

KEY WORD

Characteristics - Homogenization - Porous media.

HOMOGENEISATION D'UN MODELE D'ECOULEMENTS MISCIBLES EN MILIEU POREUX

Youcef AMIRAT,
Kamel HAMDACHE,
Abdelhamid ZIANI.

I. INTRODUCTION

On s'intéresse aux déplacements miscibles dans un milieu poreux, c'est-à-dire des déplacements au cours desquels le fluide déplaçant et le fluide déplacé deviennent miscibles en toutes proportions (au sens de [7], [10]). La composition du mélange est alors décrite par sa concentration de masse. Si on néglige les effets dûs à la diffusion moléculaire et à la dispersion, les équations modélisant le déplacement miscible s'écrivent dans $\Omega \times]0,T[$, $T > 0$, (voir [6]) :

$$\partial_t(\sigma(x)\ \Phi(x,p)\ \rho(p,u)u) + \mathrm{div}(uq) = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t(\sigma(x)\ \Phi(x,p)\ \rho(p,u)) + \mathrm{div}\ q = 0, \tag{1.2}$$

$$q = -\sigma(x)\ \frac{K(x)}{\mu(u,p)}\ (\mathrm{grad}\ p - \rho(p,u)\ g\ \mathrm{grad}\ Z(x)), \tag{1.3}$$

auxquelles on adjoint une loi d'état (relation entre la densité et la pression) ainsi que des conditions initiales et aux limites. Dans (1.1), (1.2), (1.3), Ω représente le milieu poreux, $\Phi(x,p)$ la porosité, $K(x)$ la perméabilité, p la pression, u la concentration, $\rho(p,u)$ la densité du fluide (mélange) (dépendant principalement de p et peu de u), $\mu(u,p)$ (dépendant principalement de u et peu de p) la viscosité du fluide, $Z(x)$ la profondeur du point $x \in \Omega$, g l'accélération de la pesanteur et $\sigma(x)$ une fonction définissant la section du milieu.

Dans le cas incompressible, c'est-à-dire Φ indépendant de p et ρ constant, lorsque, de plus, on néglige le terme de gravité et on prend $\sigma(x) \equiv 1$, les équations de l'écoulement miscible deviennent :

$$\Phi(x)\ \partial_t u + q\ \mathrm{grad}\ u = 0, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{div}\ q = 0, \tag{1.5}$$

$$q = -\frac{K(x)}{\mu(u)}\ \mathrm{grad}\ p. \tag{1.6}$$

On suppose à présent le milieu poreux hétérogène; les fonctions Φ et K dépendent d'un paramètre ϵ lié à la microstructure du milieu. De ce fait, les inconnnues du problème (p et u dans le cas incompressible, et, p,u,ρ dans le cas compressible) dépendent aussi de ϵ. On s'intéresse alors au comportement limite, lorsque $\epsilon \to 0$, des inconnues du problème ou encore à l'homogénéisation des équations correspondantes. Nous renvoyons à [4], [9], pour les fondements de la méthode d'homogénéisation et l'étude de nombreux exemples. Concernant l'homogénéisation d'équations modélisant l'écoulement d'un fluide diphasique dans un milieu poreux (cas immiscible avec pression capillaire ou miscible avec dispersion) voir [1] et [5].

Dans [11], [12], Shvidler a considéré le système (1.4), (1.5), (1.6), et a donné, par une analyse des fluctuations, des équations effectives associées à ce système. Des termes de mémoire apparaissent, traduisant un phénomène de dispersion (voir [11]).

Dans ce travail, nous considérons le problème d'homogénéisation du modèle le plus simple, c'est-à-dire 1-D, incompressible. Dans [2], [3], nous considérons respectivement un modèle 2-D, incompressible et un modèle 1-D, compressible. Le problème étudié ici est le suivant. On pose $\Omega =]0,1[$ et $Q = \Omega \times]0,T[$. Φ et K sont deux fonctions de $L^\infty(\Omega)$ vérifiant :

(1.7) $$0 < \Phi_- \leq \Phi(x) \leq \Phi_+ \qquad \text{p.p. dans } \Omega,$$

(1.8) $$0 < K_- \leq K(x) \leq K_+ \qquad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et μ est une fonction numérique définie sur $[0,1]$. Nous la supposerons lipschitzienne et strictement positive.

$p(x,t)$ et $u(x,t)$, u à valeurs dans $[0,1]$, vérifient :

(1.9) $$\Phi(x)\, \partial_t u + q\, \partial_x u = 0,$$

(1.10) $$q = -\frac{K(x)}{\mu(u)}\, \partial_x p,$$

(1.11) $$\partial_x q = 0,$$

avec, comme condition initiale,

(1.12) $$u(x,0) = u_0(x),$$

avec, comme condition aux limites sur p,

$$(1.13) \qquad p(0,t) = p_0(t),$$

$$(1.14) \qquad p(1,t) = p_1(t),$$

et, comme condition aux limites sur u,

$$(1.15) \qquad u(0,t) = u_1(t).$$

Nous supposons que p_0 et p_1 sont dans $L^\infty(0,T)$ et

$$(1.16) \qquad p_0(t) > p_1(t) \qquad \text{p.p. dans }]0,T[,$$

et, u_0 et u_1 à valeurs dans $[0,1]$. On précisera plus loin la régularité de ces fonctions.

Des équations (1.9),...,(1.15), on peut éliminer p : (1.11) implique $q = q(t)$, d'où, intégrant (1.10) sur Ω et tenant compte de (1.13), (1.14),

$$(1.17) \qquad q(t) = \big(p_0(t) - p_1(t)\big) \Big/ \int_0^1 \frac{\mu(u(x,t))}{K(x)}\, dx.$$

Introduisons l'opérateur $\tilde{q}$ défini pour $v \in L^\infty(Q)$, v à valeurs dans $[0,1]$, et pour presque tout $t \in]0,T[$, par :

$$(1.18) \qquad \tilde{q}(v(\cdot,t),t) = (p_0(t) - p_1(t)) \Big/ \int_0^1 \frac{\mu(v(x,t))}{K(x)}\, dx.$$

Le problème (P) consiste à trouver u(x,t) et q(t), avec u à valeurs dans $[0,1]$, vérifiant :

$$(1.19) \qquad \Phi(x)\, \partial_t u + q(t)\, \partial_x u = 0 \qquad \text{dans } Q,$$

$$(1.20) \qquad q(t) = \tilde{q}(u(\cdot,t),t) \qquad \text{dans }]0,T[,$$

ainsi que (1.12) et (1.15).

Nous étudions au paragraphe II, l'existence et l'unicité d'une solution du problème (P). L'existence sera établie à l'aide du théorème de point fixe de Schauder. Le paragraphe III est consacré à l'homogénéisation du problème (P).

Le problème limite est du même type que (1.19), (1.20) et le résultat est obtenu grace à une propriété de compacité des courbes caractéristiques associées à l'équation (1.19).

Remerciements : Les auteurs remercient François Murat pour les discussions fructueuses qu'ils ont eues avec lui.

II - RESOLUTION DU PROBLEME (P)

Donnons tout d'abord la définition d'une solution faible du problème (P).

Définition Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_1 \in L^\infty(0,T)$, u_0 et u_1 à valeurs dans $[0,1]$. On dira que (u,q) est solution faible du problème (P) si les conditions suivantes sont réalisées :

a) $u \in L^\infty(Q)$, $q \in L^\infty(0,T)$, u à valeurs dans $[0,1]$,

b) $q(t) = \tilde{q}(u(\cdot,t),t)$ p.p. dans $]0,T[$,

c) $\forall \phi \in C_0^1([0,1[\times [0,T[)$ (c'est-à-dire ϕ est C^1 à support compact inclus dans $[0,1[\times[0,T[$) on a :

$$\int_Q (\Phi(x)\ \partial_t\phi + q(t)\ \partial_x\phi)\ u\ dx\ dt = \int_\Omega \Phi(x)\ u_0(x)\ \phi(x,0)\ dx + \int_0^T q(t)\ u_1(t)\ \phi(0,t)\ dt.$$

II.1 - Existence d'une solution faible

On va montrer l'existence d'une solution faible à l'aide du thèorème de point fixe de Schauder :

THEOREME 2.1 Soit E un espace de Banach, S une partie non vide, convexe et fermée de E, et $F : S \to S$ une application continue à image TS précompacte. Alors F admet au moins un point fixe.

On se place dans le cadre suivant. On prend $E = L^1(Q)$ et $S = \{u \in E;\ 0 \le u(x,t) \le 1$ p.p. dans $Q\}$. S est évidemment une partie convexe et fermée de E. L'application F est définie ainsi : étant donné $u \in S$, on pose :

(2.1) $\qquad q(t) = \tilde{q}(u(\cdot,t),t) \qquad$ p.p. dans $]0,T[$,

$\tilde{q}$ étant défini par (1.18); ainsi $q \in L^\infty(0,T)$. Ensuite on détermine w comme étant la solution de :

$$(2.2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_Q (\Phi(x)\ \partial_t\phi + q(t)\ \partial_x\phi)\ w\ dxdt = \int_\Omega \Phi(x)\ u_0(x)\ \phi(x,0)\ dx + \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \int_0^T q(t)\ u_1(t)\ \phi(0,t)\ dt \\ \forall \phi \in C_0^1\big([0,1[\times[0,T[\big). \end{array}\right.$$

On pose alors $w = F(u)$. Il est alors clair que montrer l'existence d'une solution faible de (P) revient à chercher un point fixe de F. L'existence et l'unicité de w, solution de (2.1), résulte du

Lemme 2.1 Etant donné $\Phi \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant (1.7), $q \in L^\infty(0,T)$ strictement positive (i.e. $q(t) > 0$ p.p. dans $]0,T[$), $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^1(0,T)$, alors il existe $w \in L^1(Q)$, unique, vérifiant (2.2).

Démonstration

point 1 : **Existence**

On introduit les courbes caractéristiques associées à l'opérateur différentiel $\Phi\,\partial_t + q\,\partial_x$. Soit l'équation différentielle :

(2.3) $$\frac{dX}{dt} = q(t)/\Phi(X),$$

avec, $(s,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}$ étant donnés, la condition initiale

(2.4) $$X(s) = x.$$

(2.3), (2.4) admet dans $W^{1,\infty}(]0,T[)$ une solution unique, notée $X(t;x,s)$ et on a $X(\cdot;\cdot,s) \in W^{1,\infty}(Q)$. En effet, Φ étant prolongée par périodicité à $\mathbb{R}$ (pour la commodité des calculs), posons :

(2.5) $$\psi(z) = \int_0^z \Phi(\xi)\ d\xi.$$

Grâce à (1.7), ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc bijective. Soit $X(t)$ une solution de (2.3), (2.4); alors

$$\psi(X(t)) = \int_s^t q(\sigma)\ d\sigma + \psi(x),$$

d'où

$$X(t) = \psi^{-1}(\int_s^t q(\sigma)\ d\sigma + \psi(x))$$

et donc

(2.6) $$X(t;x,s) = \psi^{-1}(\int_s^t q(\sigma)\ d\sigma + \psi(x)).$$

Ce qui montre l'existence et l'unicité dans $W^{1,\infty}(]0,T[)$ de la solution de (2.3), (2.4). De (2.6) on déduit :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t;x,s) = \Phi(x)/\Phi(X(t;x,s)), \text{ et donc}$$

$$X(\cdot;\cdot,s) \in W^{1,\infty}(Q).$$

On définit maintenant w sur Q en posant :

(2.7) $$w(x,t) = \begin{cases} u_0(X(0;x,t)) & \text{si } x>X(t;0,0) \\ u_1(S(x,t)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $S(x,t)$ est donné par : $\int_t^{S(x,t)} q(\sigma)d\sigma = -\psi(x)$. Il est clair que $w \in L^1(Q)$. Un calcul facile montre que w vérifie (2.2). L'existence est ainsi démontrée.

point 2 : **Unicité**

Soit $w \in L^1(Q)$ tel que :

(2.8) $$\int_Q (\Phi(x)\, \partial_t\phi + q(t)\, \partial_x\phi) w \, dxdt = 0 \qquad \forall\ \phi \in C_0^1([0,1[\times[0,T[).$$

Par le changement de variables $y = \psi(x)$ et de fonctions $\tilde{w}(y,t) = w(\psi^{-1}(y),t)$, $\tilde{\phi}(y,t) = \phi(\psi^{-1}(y),t)$, on déduit de (2.8) que :

(2.9) $$\int_0^{\psi(1)} \int_0^T (\partial_t\tilde{\phi} + q(t)\, \partial_x\tilde{\phi})\, \tilde{w}\, dy\, dt = 0 \qquad \forall\ \tilde{\phi} \in C_0^1([0,\psi(1)[\times[0,T[).$$

On va montrer que $\tilde{w} \equiv 0$. Posons : $v(y,t) = \int_0^y \tilde{w}(\xi,t)\, d\xi$.

On a :

(2.10) $$\int_0^{\psi(1)} \int_0^T (\partial_t\tilde{\phi} + q(t)\, \partial_y\tilde{\phi})\, v\, dy\, dt = 0 \qquad \forall\ \tilde{\phi} \in C_0^1([0,\psi(1)[\times[0,T[).$$

En effet, par intégration par parties qui est loisible puisque $\partial_y v \in L^1(]0,\psi(1)[\times]0,T[)$, on a :

(2.11) $$\int_0^T \int_0^{\psi(1)} \partial_t\tilde{\phi}\, v\, dy\, dt = - \int_0^T \int_0^{\psi(1)} \partial_t\tilde{\phi}_1\, \tilde{w}\, dydt,$$

où

$$\tilde{\phi}_1(y,t) = \int_0^y \phi(\xi,t)\, d\xi \quad , \text{ et}$$

(2.12) $$\int_0^T \int_0^{\psi(1)} q(t)\, \partial_y\tilde{\phi}\, v\, dydt = - \int_0^T \int_0^{\psi(1)} q(t)\, \tilde{\phi}\, \tilde{w}\, dy\, dt = \int_0^T \int_0^{\psi(1)} q(t)\, \partial_y\tilde{\phi}_1\, \tilde{w}\, dy\, dt$$

$\tilde{\phi}_1$ étant dans $C_0^1([0,\psi(1)[\times[0,T[)$, (2.10) résulte alors de (2.9), (2.11) et (2.12).

Montrons maintenant que $v \equiv 0$. On va vérifier que

$\int_0^T \int_0^{\psi(1)} v\, g\, dy\, dt = 0 \quad \forall\ g \in C_0^{1,0}([0,\psi(1)[\times[0,T[)$ (espace des fonctions continues sur $[0,\psi(1)[\times[0,T[$, continument dérivables par rapport à y et à support compact inclus dans $[0,\psi(1)[\times[0,T[$; ce qui impliquera par densité que l'égalité a lieu pour tout $g \in C_0^0([0,\psi(1)[\times[0,T[)$ et donc $v=0$. Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\zeta\geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \zeta(\xi)\, d\xi = 1$. On pose : $\zeta_\delta(\xi) = \frac{1}{\delta}\, \zeta(\frac{\xi}{\delta})$ pour $\delta>0$, puis, q étant prolongée par 0 hors de $[0,T]$, $q_\delta(t) = q * \zeta_\delta(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $g \in C_0^{1,0}([0,\psi(1)[\times[0,T[)$. Il existe une fonction $\phi_\delta \in C^1([0,\psi(1)[\times[0,T[)$ unique solution de :

$$
(2.13) \qquad \begin{cases} -\partial_t\phi_\delta - q_\delta(t)\,\partial_y\phi_\delta = g & \text{dans }]0,\psi(1)[\times]0,T[, \\ \\ \phi_\delta(x,T) = 0 & \text{p.p. dans }]0,\psi(1)[. \end{cases}
$$

On vérifie immédiatement que cette fonction ϕ_δ est donnée par :

$$
\phi_\delta(y,t) = \int_t^T g(X_\delta(s;y,t),\, s)\, ds\ , \qquad \text{où}
$$

$$
X_\delta(t;y,s) = \int_s^t q_\delta(\sigma)\, d\sigma + y\ , \qquad \forall (s,t) \in [0,T],\ y \in [0,\psi(1)].
$$

La fonction g étant à support compact, on déduit que :

$$
\phi_\delta \in C_0^1([0,\psi(1)[\ \times [0,T[).
$$

Donc, grâce à (2.10)

$$
\int_0^T \int_0^{\psi(1)} \{\partial_t\phi_\delta + q(t)\,\partial_y\phi_\delta\}\ v\, dy\, dt = 0.
$$

On peut donc écrire :

$$
\int_0^T \int_0^{\psi(1)} vg\ dy\ dt = \int_0^T \int_0^{\psi(1)} v(q(t) - q_\delta(t))\, \partial_y\phi_\delta\ dy\ dt,
$$

et par une intégration par parties :

$$
(2.14) \qquad \int_0^T \int_0^{\psi(1)} v\ g\ dy\ dt = - \int_0^T \int_0^{\psi(1)} (q(t)-q_\delta(t))\ \phi_\delta\ \tilde{w}\ dy\ dt.
$$

Le second membre de (2.14) tend vers 0 quand δ tend vers 0, par application du théorème de Lebesgue. Donc $v \equiv 0$ et par suite $\tilde{w}$ et w sont nulles; ce qui termine la démonstration.

Remarque 2.1 On déduit de (2.7) que, si u_0 et u_1 sont dans S, alors w, solution de (2.2), est dans S.

Il résulte du lemme 2.1 que l'application F est bien définie. Montrons qu'elle satisfait les hypothèses du théorème de Schauder. Grâce à la remarque 2.1, FS $\subset$ S. On va maintenant établir les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2 FS est précompact.

Démonstration : E étant complet, cela revient à montre que FS est relativement compact. Soit (w_n) une suite de FS, $w_n = F(u_n)$, $u_n \in S$, $\forall$ n.

Posons :

$$q_n(t) = \tilde{q}(u_n(\cdot,t),t) \qquad \text{p.p. dans }]0,T[,$$

que l'on prolonge ensuite par périodicité à $\mathbb{R}$,

$X_n(s;x,t) = \psi^{-1}(\int_s^t q^n\, d\sigma + \psi(x))$ pour $s \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $x \in \overline{\Omega}$, ψ étant définie par (2.5),

$$Q_n^1 = \{(x,t) \in Q;\ x > X_n(t;0,0)\},$$
$$Q_n^2 = \{(x,t) \in Q;\ x < X_n(t;0,0)\}.$$

La suite S_n est définie sur Q par la relation :

$$X_n(S_n(x,t);\ x,t) = 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \overline{Q}.$$

Avec ces notations on a (voir (2.7)) :

$$w_n(x,t) = \begin{cases} u_0(X_n(0;x,t)) & \text{p.p. dans } Q_n^1, \\ u_1(S_n(x,t)) & \text{p.p. dans } Q_n^2, \end{cases}$$

soit encore, u_0 (resp. u_1) étant prolongée par 0 hors de Ω (resp. de $]0,T[$),

$$w_n(x,t) = u_0(X_n(0;x,t))\ \chi_n^1(x,t) + u_1(S_n(x,t))\ \chi_n^2(x,t) \qquad \text{p.p. dans } Q,$$

χ_n^1 (resp. χ_n^2) étant la fonction caractéristique de Q_n^1 (resp. Q_n^2).

les suites $X_n(0;..)$ et S_n sont bornées dans $W^{1,\infty}(Q)$, puisque :

$$\frac{\partial X_n}{\partial x}(0;x,t) = \Phi(x) \;/\; \Phi(X_n(0;x,t)),$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial x}(x,t) = \Phi(x) \;/\; q_n(t),$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial t}(x,t) = 1.$$

Par le théorème d'Ascoli, on déduit l'existence de deux sous suites, encore notées $X_n(0;\cdot,\cdot)$ et S_n, convergentes dans $C^0(\overline{Q})$. Notons X et S leur limite respective.

D'autre part, q_n étant bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$, on a (par extraction de sous suite encore notée q_n),

(2.15) $$q_n \rightharpoonup q \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}) \text{ faible } *,$$

par conséquent $\int_s^t q^n \, d\sigma \to \int_s^t q \, d\sigma$, $\qquad \forall\, s \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in [0,T]$.

Il en résulte :

$$X = X(0;\cdot\,\cdot),$$

$$X\,(S(x,t);\, x,t) = 0 \qquad \forall\,(x,t) \in Q,$$

où $X(s;x,t)$ désigne la fonction définie pour $s \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $x \in \Omega$, par :

$$X(s;x,t) = \psi^{-1}\Big(\int_s^t q \, d\sigma + \psi(x)\Big).$$

De plus, X et S sont dans $W^{1,\infty}(Q)$.

Considérons maintenant la fonction w définie sur Q par

(2.16) $$w(x,t) = u_0(X(0;x,t))\ \chi^1(x,t) + u_1(S(x,t))\ \chi^2(x,t)$$

où χ^1 (resp. χ^2) désigne la fonction caractéristique de Q^1 (resp. Q^2) lequel est défini (resp.) par :

$$Q^1 = \{(x,t) \in Q \;;\; x > X(t;0,0)\},$$

$$Q^2 = \{(x,t) \in Q \;;\; x < X(t;0,0)\}.$$

Il est clair que $w \in S$. Montrons que la suite ainsi extraite de w_n converge vers w dans $L^1(Q)$. On écrit :

$$w_n - w = I_n^1 + I_n^2 \quad , \quad \text{avec}$$

$$I_n^1 = (u_0(X_n) - u_0(X))\,(\chi_n^1-\chi^1) + \chi^1(u_0(X_n) - u_0(X)) + u_0(X)\,(\chi_n^1 - \chi^1),$$

$$I_n^2 = (u_1(S_n) - u_1(S))\,(\chi_n^2-\chi^2) + \chi^2(u_1(S_n) - u_1(S)) + u_1(S)\,(\chi_n^2 - \chi^2).$$

Le premier et le troisième terme de I_1 tendent vers 0 car u_0 est bornée et

$$\int_Q | \chi_n^1 - \chi^1| \, dxdt \leq \int_0^T | X_n(t;0,0) - X(t;0,0) | \, dt$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Montrons que le deuxième terme de I_n^1 tend vers 0 dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. On introduit une suite de fonctions régulières u_{om} convergente vers u_0 dans $L^1(\mathbb{R})$. On écrit ensuite, p.p. dans $]0,T[$, pour tous n, m :

(2.17)
$$\int_\Omega | u_0(X_n) - u_0(X) | \, dx \leq \int_\Omega | u_0(X_n) - u_{om}(X_n) | \, dx$$
$$+ \int_\Omega | u_{om}(X_n) - u_{om}(X) | \, dx + \int_\Omega | u_{om}(X) - u_0(X) | \, dx.$$

Dans le premier terme du second membre de (2.16), on effectue le changement de variable $y = X_n(0;x,t)$ $(x = X_n(t;y,0))$; il vient :

(2.18)
$$\int_\Omega | u_0(X_n(0;x,t)) - u_{om}(X_n(0;x,t)) | \, dx =$$
$$\int_{\mathbb{R}} | u_0(y) - u_{om}(y) | \frac{\Phi(y)\, dy}{\Phi(X_n(t;0,0))} \leq C \int_{\mathbb{R}} | u_0(y) - u_{om}(y) | \, dy$$

où, grâce a (1.7), C est une constante indépendante de n et m. On en déduit que le premier membre de (2.18) tend vers 0 quand n et m tendent vers ∞. De la même façon on montre que le troisième terme du second membre de (2.17) tend vers 0. Quant au premier, il tend vers 0 grâce à la convergence de $X_n(0;\cdot,\cdot)$ vers $X(0;\cdot,\cdot)$ dans $C^0(\overline{Q})$. Le lemme est ainsi démontré.

<u>*Lemme 2.3*</u> F est continue.

<u>*Démontration*</u> : Soit (u_n) une suite de S convergente vers u dans $L^1(Q)$. D'après la démonstration du lemme 2.2, la fonction w, définie par (2.16), est l'unique valeur d'adhérence de la suite $w_n = F(u_n)$. On en déduit, FS étant relativement compact, que (toute) la suite (w_n) converge vers w. De plus, μ étant continue, q, défini par (2.15), vérifie $q(t) = \tilde{q}(u\bullet,t),t)$ et par suite $w = F(u)$.

F vérifie les hypothèses du théorème de Schauder, ce qui nous donne le :

<u>*THEOREME 2.2*</u> Sous les hypothèses (1.7), (1.8), le problème (P) admet une solution faible (u,q), avec :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(X(0;x,t)) & \text{si } x > X(t;0,0) \\ u_1(S(x,t)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

X étant donné par (2.6) et S par la relation :

$$X(S(x,t);\ x,t) = 0 \qquad \forall\ (x,t) \in Q.$$

II.2 - <u>Régularité</u>

On introduit l'espace des fonctions à variation bornée. Rappelons la définition de cet espace. D étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, nous notons M(D) l'espace des mesures de Radon sur D. Muni de la norme, notée $\int_D |\nu|$, définie par le nombre :

$$\sup_{\substack{\phi\in\mathcal{D}(D) \\ \|\phi\|_\infty \leq 1}} < \nu, \phi >,$$

M(D) est un espace de Banach et $L^1(D)$ en est un sous espace fermé. L'espace des fonctions à variation bornée est alors l'espace VB(D) défini par :

$$VB(D) = \left\{ v \in L^1(D);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in M(D), \quad i=1,\dots,d \right\} .$$

Cet espace a été étudié par de nombreux auteurs, cf. en particulier [8], [13]. le nombre $\sum_{i=1}^{d} \int_D \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|$, noté $VT(v)$, est dit variation totale de v. VB(D) est de Banach pour la norme naturelle :

$$\| v \|_{VB(D)} = \| v \|_{L^1(D)} + VT(v)$$

et $W^{1,1}(D)$ en est un sous espace fermé.

Notons enfin deux propriétés utiles (approximation et compacité) de VB(D) :

(i) A tout $v \in VB(D)$, on peut associer une suite $v_m \in W^{1,1}(D) \cap C^\infty(D)$ telle que

$$v_m \to v \text{ dans } L^1(D) \text{ et } VT(v_m) \to VT(v).$$

(ii) L'espace VB(D) est inclus, avec injection continue, dans $L^{d^*}(D)$, $d^*=d/d-1$ si $d\geq 2$ ($d^*=+\infty$ sinon), et l'injection de VB(D) dans $L^p(D)$, $1\leq p<d^*$, est compacte (ces résultats sont les mêmes que pour $W^{1,1}(D)$).

On va établir le résultat de régularité suivant.

__THEOREME 2.3__ On suppose que $u_0 \in VB(\Omega)$ et $u_1 \in VB(0,T)$. Alors le problème (P) admet une solution faible (u,q) avec :

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;M(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\Omega;M(0,T)).$$

Si, de plus, (p_0-p_1) est lipschitzienne alors q est lipschitzienne.

__Démonstration__ : Soit (u,q) la solution faible obtenue précédemment :

$$u = u_0(X)\, \chi^1 + u_1(S)\, \chi^2.$$

Considérons une suite $u_{om} \in W^{1,1}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tel que $u_{om} \to u_0$ dans $L^1(Q)$ et $VT(u_{om})$ bornée. La suite $\tilde{u}_{om}$ définie par :

$$\tilde{u}_{om}(x) = \begin{cases} u_{om}(x) & \text{si } \frac{1}{m} \leq x \leq 1 \\ m \cdot u_{om}(1/m)x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \end{cases}$$

vérifie : $\tilde{u}_{om} \in W^{1,1}(\Omega)$; $\tilde{u}_{om} \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$, $VT(\tilde{u}_{om})$ est bornée, et $\tilde{u}_{om}(0) = 0$.

Considérons aussi une suite (u_{1m}) sur $[0,T]$ vérifiant des propriétés analogues. On pose alors :

$$u_m = \tilde{u}_{om}(X)\, \chi^1 + \tilde{u}_{1m}(S)\, \chi^2.$$

Il est clair que $u_m \in W^{1,1}(Q) \cap C^0(\overline{Q})$. De plus, $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ (resp. $\frac{\partial u_m}{\partial x}$) est bornée dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ (resp. $L^\infty(\Omega;\ L^1(0,T))$). En effet :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial u_{om}}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial t} \chi^1 + \frac{\partial u_{om}}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial t} \chi^2,$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = \frac{\partial u_{om}}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial x} \chi^1 + \frac{\partial u_{1m}}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial x} \chi^2$$

et le résultat découle des propriétés de $\tilde{u}_{om}$, $\tilde{u}_{1m}$ et X. Enfin, $u_m \to u$ dans $L^1(Q)$.

Montrons à présent que q est lipschitzienne. Compte tenu de (1.17), il suffit de montrer que l'application $t \to \overline{q}(t) = \int_\Omega \mu(u(x,t))\, dx$ est lipschitzienne. On pose : $\overline{q}_m(t) = \int_\Omega \mu(u_m(x,t))\, dx$; μ étant lipschitzienne, on a $\overline{q}_m \to q$ p.p. dans $]0,T[$. Soit à présent $t_1, t_2 \in [0,T]$; on écrit :

$$| \overline{q}_m(t_1) - \overline{q}_m(t_2) | \leq C \int_\Omega | u_m(x,t_1) - u_m(x,t_2) |\, dx$$

$$\leq C \;| t_1 - t_2 |\; \sup_{t \in]0,T[} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_m}{\partial x}(x,t) \right| dx \leq CC' \;| t_1 - t_2 |$$

avec C, C' indépendantes de m. On en déduit que

$$| \overline{q}(t_1) - \overline{q}(t_2) | \leq CC' \;| t_1 - t_2 | ,$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque 2.2 Si $u_0 \in W^{1,1}(\Omega)$, $u_1 \in W^{1,1}(0,T)$ et si la condition de compatibilité $u_0(0) = u_1(0)$ est vérifiée, alors $u \in W^{1,1}(Q)$ ((u,q) étant solution faible du problème (P)).

II.3 - Un résultat d'unicité

THEOREME 2.3 Sous les hypothèses :

$$u_0 \in VB(\Omega), \quad u_1 \in VB(0,T),$$

le problème (P) admet une unique solution faible.

Démonstration : Soit (u_1,q_1) et (u_2,q_2) deux solutions faible du problème (P). q_i, i=1,2, étant considéré comme donnée, on sait (voir lemme 2.1) que u_i,i=1,2, est l'unique solution dans $L^\infty(Q)$ de :

$$\int_Q (\Phi(x)\,\partial_t\phi + q_i\partial_x\phi)\,u_i\,dx\,dt = \int_\Omega \Phi(x)\,u_0(x)\,\phi(x,0)\,dx + \int_0^T q(t)\,u_1(t)\,\phi(0,t)\,dt$$

$$\forall\,\phi \in C_0^1\,([0,1[\times[0,T[).$$

De plus,

$$u_i = u_0(X_i)\,\chi_i^1 + u_1(S_i)\,\chi_i^2,$$

avec

$$X_i(s,x,t) = \psi^{-1}(\int_s^t q_i\,d\sigma + \psi(x)), \quad x \in \Omega,\ s,t \in [0,T]$$

et S_i défini par :

$$X_i(S_i(x,t);\ x,t) = 0 \qquad \forall\,(x,t) \in Q.$$

En opérant, comme au paragraphe II.2, à l'aide des suites $\tilde{u}_{om}$ et $\tilde{u}_{1m}$, on obtient l'existence de suites u_m^1 et u_m^2 vérifiant, pour i=1,2 :

$$(2.19)\quad \begin{cases} \Phi(x)\,\partial_t u_m^i + q_i\,\partial_x u_m^i = 0 & \text{dans } Q, \\ u_m^i(x,0) = \tilde{u}_{om}(x) & \text{dans } \Omega, \\ u_m^i(0,t) = \tilde{u}_{1m}(t) & \text{dans }]0,T[, \end{cases}$$

$u^i_m \in W^{1,1}(Q) \cap C^0(\overline{Q})$,

$\dfrac{\partial u^i_m}{\partial t}$ (resp. $\dfrac{\partial u^i_m}{\partial x}$) borné dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ (resp. $L^\infty(\Omega;L^1(0,T))$, et

$u^i_m \to u$ dans $L^1(Q)$.

Posons : $u_m = u^1_m - u^2_m$; alors $u_m \in W^{1,1}(Q)$ et u_m vérifie :

(2.20) $$\Phi(x)\, \partial_t u_m + q_1\, \partial_x u_m = (q_2 - q_1)\, \partial_x u^2_m \qquad \text{dans } Q,$$

(2.21) $$u_m(x,0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$

(2.22) $$u_m(0,t) = 0 \qquad \text{dans }]0,T[.$$

On multiplie les deux membres de (2.20), formellement (sinon prendre la régularisée sg_η) par $sg(u_m)$ et on intègre sur $\Omega\times]0,t[$; on obtient, après intégration par parties et compte tenu de (2.21), (2.22) :

(2.23) $$\int_\Omega \Phi(x)\, |\, u_m(x,t)\, |\, dx + \int_0^t q_1(\tau)\, |\, u_m(1,\tau)\, |\, d\tau \leq$$
$$\int_0^t |\, q_2(\tau) - q_1(\tau)\, | \int_\Omega |\, \partial_x u^2_m\, |\, dx\, d\tau.$$

Comme $\partial_x u^2_m$ est borné dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ et $\tilde{q}$ est un opérateur lipschitzien, le second membre de (2.23) est majoré par :

$$C \int_0^t\!\!\int_\Omega |\, u^1(x,\tau) - u^2(x,\tau)\, |\, dx d\tau,$$

où C est une constante strictement positive indépendante de m.

On en déduit, q_1 étant positif :

$$\int_\Omega |\, u_m(x,t)\, |\, dx \leq C \int_0^t\!\!\int_\Omega |\, u^1(x,\tau) - u^2(x,\tau) |\, dx\, d\tau$$

et en faisant $m \to \infty$, on obtient :

$$\int_{\Omega} | u(x,t) | \, dx \leq C \int_0^t \int_{\Omega} | u(x,\tau) | \, dx \, d\tau,$$

d'où, par le lemme de Gronwall, $u(x,t) = 0$.

III - HOMOGENEISATION DU PROBLEME (P)

On suppose maintenant que les coefficients ϕ et K dépendent d'un paramètre $\epsilon > 0$ destiné à tendre vers 0. La solution du problème (P) dépend alors de ϵ. Les fonctions dépendant de ϵ seront indiciées par ϵ. Les hypothèses sont les suivants :

(3.1) $\qquad u_0 \in VB(\Omega), \; u_1 \in VB(]0,T[),$

(3.2) $\qquad 0 < \Phi_- \leq \Phi^\epsilon(x) \leq \Phi_+$ $\qquad$ p.p. dans Ω, indépendamment de ϵ,

(3.3) $\qquad 0 < K_- \leq K^\epsilon(x) \leq K_+$ $\qquad$ p.p. dans Ω, indépendamment de ϵ.

D'après II, le problème (P) admet, pour tout $\epsilon>0$, une unique solution faible (u^ϵ,q^ϵ), avec $u^\epsilon \in VB(Q)$. Nous nous intéressons au comportement limite de (u^ϵ,q^ϵ) lorsque $\epsilon \to 0$. De (3.2), (3.3) on déduit l'existence de suites extraites de Φ^ϵ et $1/K^\epsilon$ tel que :

(3.4) $\qquad \Phi^\epsilon \rightharpoonup \Phi^0$ $\qquad$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible *,

(3.5) $\qquad 1/K^\epsilon \rightharpoonup 1/K^0$ $\qquad$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible *.

On a alors le résultat suivant :

__THEOREME 3.1__ Sous les hypothèses (3.1), (3.2), (3.3), la solution (u^ϵ,q^ϵ) converge p.p. vers (u^0,q^0) unique solution faible du problème :

(3.6) $\qquad \Phi^0(x) \, \partial_t u^0 + q^0(t) \, \partial_x u^0 = 0$ $\qquad$ dans Q,

(3.7) $\qquad q^0(t) = (p_0(t) - p_1(t)) \Big/ \int_0^1 \frac{\mu(u^0(x,t))dx}{K^0(x)}$ $\qquad$ dans $]0,T[$, (3.8) $u^0(x,0) = u_0(x)$ dans Ω,

(3.9) $u^0(0,t) = u_1(t)$ dans $]0,T[$.

Démonstration : On a (voir (2.7)) :

$$u^\epsilon(x,t) = \begin{cases} u_0(X^\epsilon(0;x,t)) & \text{si } x > X^\epsilon(t;0,0), \\ u_1(S^\epsilon(x,,t)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec :

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \psi^\epsilon(z) = \int_0^z \Phi^\epsilon(\xi)\, d\xi,\ X^\epsilon(t;x,s) = (\psi^\epsilon)^{-1}\, [\int_s^t q^\epsilon(\sigma)\, d\sigma + \psi^\epsilon(x)]; \\ X^\epsilon(S^\epsilon(x,t);\ x,t) = 0 \qquad \forall\ (x,t) \in Q. \end{cases}$$

Comme dans la démonstration du lemme 2.2, on peut extraire de X^ϵ et S^ϵ, deux suites convergentes dans $C^0(\overline{Q})$. Notons X^0 et S^0 leur limite respective. Alors, pour tout t, x :

$$(3.11) \qquad \psi^\epsilon(X^\epsilon(0;x,t)) \to \psi^0(X^0(t,x)) = \int_0^{X^0(t;x)} \Phi^0(\xi)\, d\xi.$$

Pour cela, on écrit :

$$\psi^\epsilon(X^\epsilon) - \psi^0(X^0) = \psi^\epsilon(X^\epsilon) - \psi^\epsilon(X^0) + \psi^\epsilon(X^0) - \psi^0(X^0),$$

$$\psi^\epsilon(X^0) \to \psi^0(X^0) \text{ grâce à (3.4),}$$

puis, grâce à (3.2),

$$|\ \psi^\epsilon(X^\epsilon) - \psi^0(X^0)\ | \le \Phi_+\ |\ X^\epsilon - X^0\ | \text{ qui tend vers 0 quand } \epsilon \to 0 \text{ d'où (3.11).}$$

D'autre part, q^ϵ étant borné dans $L^\infty(0,T)$, on a pour une suite extraite :

(3.12) $q^\epsilon \rightharpoonup q^0$ dans $L^\infty(0,T)$ faible *, par conséquent $\int_s^t q^\epsilon(\sigma)\, d\sigma \rightarrow \int_s^t q^0(\sigma)\, d\sigma$, pour tout s,t. De (3.10), (3.11), (3.12) on tire alors :

$$X^0 = X^0(0;\cdot,\cdot),$$
$$X^0(S^0(x,t);\ x,t) = 0 \qquad \forall\ (x,t) \in Q,$$

où

$$X^0(s;x,t) = (\psi^0)^{-1}\ [\int_s^t q^0(\sigma)\, d\sigma + \psi^0(x)].$$

On montre ensuite, comme dans la démonstration du lemme 2.2, que u^ϵ (suite extraite) converge p.p. dans Q vers u_0, solution faible de (3.6), (3.8), (3.9). La convergence p.p. de u^ϵ vers u^0 et la continuité de μ entrainent (3.7). (u^0, q^0) est ainsi solution faible du problème (P^0), et on a unicité. On en déduit que toute la suite (u^ϵ,q^ϵ) converge p.p. vers (u^0, q^0).

Remarque 3.1 : Homogénéisation de la pression

On a (voir (1.10), (1.13), (1.14)) :

$$p^\epsilon(x,t) = p_0(t) - q^\epsilon(t) \int_0^x \frac{\mu(u^\epsilon(\xi,t))}{K^\epsilon(\xi)}\, d\xi$$

d'où :

$$p^\epsilon(x,t) \rightarrow p^0(x,t) \qquad \text{p.p. dans Q, avec :}$$

$$p^0(x,t) = p_0(t) - q^0(t) \int_0^x \frac{\mu(u^0(\xi,t))\, d\xi}{K^0(\xi)}\ .$$

REFERENCES

[1] **AMAZIANE, B.**, *Thèse de l'Université de Saint-Etienne*, à paraître.

[2] **AMIRAT, Y., HAMDACHE, K., ZIANI, A.**, *Homogénéisation d'Equations Hyperboliques du Premier Ordre - Application aux Milieux Poreux*, Rapport INRIA, à paraître.

[3] **AMIRAT, Y., HAMDACHE, K., ZIANI, A.**, *Homogénéisation d'un Modèle d'Ecoulements Miscibles Compressibles en Milieu Poreux*, Rapport INRIA, à paraître.

[4] **BENSOUSSAN, A., LIONS, J.L., PAPANICOLAOU, G.C.**, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[5] **BOURGEAT, A.**, *Homogenized Behavior of Two-Phase Flows in Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fractures Distribution*, Computer Methods in Appl. Mech. and Eng., 47, North-Holland, 1984, p. 205-216.

[6] **CHAVENT, G., JAFFRE, J.**, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, North-Holland, 1986.

[7] **MARLES, C.M.**, *Cours de Production*, Tome 4 : *Les Ecoulements Polyphasiques en Milieu Poreux*, Technip, Paris, 1972.

[8] **MIRANDA, M.**, *Comportamento delli Successioni Convergenti di Frontiere Minimali*, Ren. Sem. Mat. Univ. Padova, 1967, p. 238-257.

[9] **SANCHEZ-PALENCIA, E.**, *Non-homogenous Media and Vibration Theory*, Lect. Notes in Phys., 127, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[10] **SCHEIDEGGER, A.E.**, *The Physics of Flow Through Porous Media*, University of Toronto Press, Toronto, 1974.

[11] **SCHVIDLER, M.I.**, *Averaging Transfer Equations in Porous Media with Random Inhomogeneities*, Transl. from Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza, 1, 1985, p. 59-65.

[12] **SCHVIDLER, M.I.**, *Dispersion of a Filtration Stream in a medium with Random Inhomogeneities*, Sov. Phys. Dokl., v. 20, 3, 1975, p. 171-173.

[13] **VOLPERT, A.I.**, *The Spaces BV and Quasilinear Equations*, Math. USSR-Sbornik, v.2, 1967, n°2, p. 225-267.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique