

Formulation variationnelle, approximation et implementation de problemes de barres et de poutres bi- et tri-dimensionnelles. Partie A : barres et poutres tridimensionnelles

Michel Bernadou

▶ **To cite this version:**

Michel Bernadou. Formulation variationnelle, approximation et implementation de problemes de barres et de poutres bi- et tri-dimensionnelles. Partie A : barres et poutres tridimensionnelles. RR-0731, INRIA. 1987. inria-00075821

HAL Id: inria-00075821
https://inria.hal.science/inria-00075821

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 731

FORMULATION VARIATIONNELLE, APPROXIMATION ET IMPLEMENTATION DE PROBLEMES DE BARRES ET DE POUTRES BI - ET TRI-DIMENSIONNELLES PARTIE A : BARRES ET POUTRES TRIDIMENSIONNELLES

Michel BERNADOU

OCTOBRE 1987

FORMULATION VARIATIONNELLE, APPROXIMATION ET IMPLEMENTATION DE PROBLEMES DE BARRES ET DE POUTRES BI- ET TRI-DIMENSIONNELLES

PARTIE A : BARRES ET POUTRES TRIDIMENSIONNELLES

Michel BERNADOU, INRIA Rocquencourt

Résumé : Dans ce rapport, nous donnons une *formulation variationnelle* assez générale des problèmes de *barres* et de *poutres tridimensionnelles* pour des modèles prenant en compte, ou ne prenant pas en compte, les *effets de cisaillement transverse*. Puis nous indiquons quelques méthodes classiques d'*approximations conformes par éléments finis*. Dans chaque cas, nous précisons les résultats *d'estimations d'erreur* sans, ou avec, prise en compte des effets d'*intégration numérique*. Dans ce dernier cas, les critères à observer dans le choix des schémas d'intégration numérique sont soigneusement indiqués et des exemples de schémas appropriés sont fournis. Enfin, on donne une description détaillée de l'*implémentation* de ces méthodes qui a été réalisée dans la bibliothèque MODULEF ; un rapport décrivant la méthodologie et les résultats est disponible.

VARIATIONAL FORMULATION, APPROXIMATION AND IMPLEMENTATION OF BI- AND TRI-DIMENSIONAL BARS AND BEAMS

PART A : TRIDIMENSIONAL BARS AND BEAMS'

Summary : In this report, we give a *variational formulation* of problems of tridimensional *bars* and *beams* for models taking into account, or not, the effects of *transverse shear*. Next, we indicate some classical *conforming finite element approximations*. In each case, we precise the *error estimate results* without, or with, use of *numerical integration*. In this last case, the criteria which needs to be observed in the choice of the numerical integration schemes, are carefully indicated and some examples of appropriate schemes are given. Finally, we describe in detail the *implementation* of such methods which has been realized into the MODULEF library ; a report containing methodology and results is available.

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

PLAN

1 - INTRODUCTION

2 - FORMULATIONS VARIATIONNELLES

Orientation

2.1. Poutre soumise à des efforts de traction ou de compression (i.e. barre)

2.2. Poutre soumise à des efforts de flexion (avec prise en compte du cisaillement)

2.3. Poutre soumise à des efforts de flexion (sans prise en compte du cisaillement)

2.4. Poutre soumise à des efforts de torsion

2.5. Poutre soumise à un chargement général (avec prise en compte du cisaillement)

2.6. Poutre soumise à un chargement général (sans prise en compte du cisaillement)

3 - APPROXIMATION CONFORME - ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE L'ERREUR

Orientation

3.1. Les espaces d'éléments finis utilisés

3.2. Approximation conforme du problème général de poutre (avec prise en compte des effets de cisaillement)
3.2.1. : avec intégrations exactes
3.2.2. : avec intégrations approchées
3.2.3. : quelques remarques sur le choix de l'approximation

3.3. Aproximation conforme du problème général de poutre mince (sans prise en compte des effets de cisaillement)
3.3.1. : avec intégrations exactes
3.3.2. : avec intégrations approchées

4 - IMPLEMENTATION DES METHODES CONFORMES D'APPROXIMATION

4.1. Modules d'interpolation

4.2. Modules "fonctionnelle d'énergie" et "second membre" dans le cas où les efforts de cisaillement sont pris en compte

4.3. Modules "fonctionnelle d'énergie" et "second membre" dans le cas où les effets de cisaillement sont négligés

REMERCIEMENTS : Ce rapport a été relu en détails par Séverine FAYOLLE et Bernard ROUSSELET. Je souhaite les remercier pour les améliorations qu'ils m'ont signalées. Mes remerciements vont également à Maryse DESNOUS qui a assuré la dactylographie et la présentation de ce travail.

1 - INTRODUCTION

Dans ce rapport nous allons donner les formulations variationnelles des problèmes de barres et de poutres puis nous indiquerons comment approcher les solutions de ces problèmes par des méthodes d'éléments finis et comment implémenter ces méthodes.

Une *poutre* est un milieu continu tri-dimensionnel (3D en abrégé) dont deux des dimensions sont petites par rapport à la troisième. Une *barre* est une poutre à ligne moyenne rectiligne dont le chargement résultant est une force de traction ou de compression appliquée suivant la ligne moyenne de la poutre. Ainsi, une barre est une poutre particulière ; par la suite, nous parlerons uniquement de *poutres*.

Nous limiterons ce travail à l'étude des poutres vérifiant les propriétés suivantes :

i) *la ligne moyenne* des poutres considérées (i.e., le lieu des centres de gravité des sections transversales de la poutre) est *rectiligne* ;

ii) les déformations envisagées sont infinitésimales ce qui permet de se limiter à une *théorie linéaire* de poutre ;

iii) les lois de comportement envisagées sont de type *élastique, homogène et isotrope*.

L'idée de base des théories de poutres minces et moyennement épaisses est de ramener l'étude des déformations de la poutre 3D à celle des déformations de sa ligne moyenne et de ses sections normales. Ceci conduit à effectuer un certain nombre d'*hypothèses "a priori"* généralement bien satisfaites dans la pratique.

On obtient ainsi des *formulations mono-dimensionnelles* (1D). Les charges correspondantes sont obtenues sur la ligne moyenne de la poutre par intégration sur l'épaisseur des charges distribuées 3D, i.e.,

a) la résultante de charge $\vec{p}$;

b) le moment résultant des charges $\vec{m}$.

Par la suite l'espace euclidien $\mathscr{E}^3$ est rapporté à un repère orthonormé fixe $(0,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, l'*axe* $(0,\vec{e}_x)$ *coïncidant avec la ligne moyenne de la poutre*. On suppose en outre que *les plans* Oxy *et* Oxz *contiennent les axes principaux d'inertie* des sections orthogonales de la poutre. Ces considérations sont illustrées par la Figure 1.1.

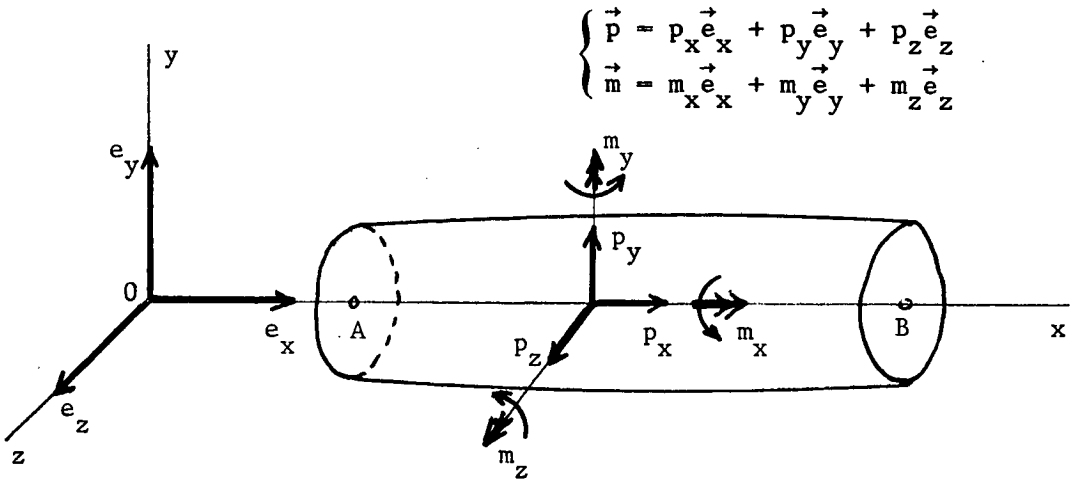


Figure 1.1 : **Les diverses charges appliquées à la poutre**

Les efforts appliqués à la poutre sont de trois types :

1) <u>tractions ou compression</u> : $p_x\vec{e}_x$

Les formulations correspondantes sont connues sous le nom d'équations de *barres* ;

2) <u>flexion</u> : $\begin{cases} p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z \\ m_y\vec{e}_y + m_z\vec{e}_z \end{cases}$

Les formulations correspondantes sont connues sous le nom d'équations de *poutres en flexion* ;

3) <u>torsion</u> : $m_x\vec{e}_x$

Les formulations correspondantes sont connues sous le nom d'équations de *poutres en torsion*.

Comme on se place ici dans le cadre de la théorie linéaire, la déformation associée à une combinaison de ces six efforts élémentaires sera égale à la combinaison des six déformations élémentaires.

Nous obtenons ainsi une formulation 3D des problèmes de poutres. De ce fait, les hypothèses i) ii) et iii) formulées plus haut sont peu restrictives. Elles permettent notamment :

i) d'approcher une *poutre "courbée"* comme un assemblage de poutres rectilignes ; en d'autres termes, on approchera la ligne moyenne de la poutre courbée à l'aide d'une ligne "brisée" dans $\mathscr{E}^3$.

ii) d'étendre ultérieurement les résultats de cette étude à des *formulations non linéaires* : l'utilisation de méthodes incrémentales ramène l'étude de la déformation d'une poutre à celle d'une succession de problèmes linéaires de poutres. Il suffira de considérer des méthodes d'approximation pour lesquelles l'élément de poutre déformé à les mêmes caractéristiques (ligne moyenne rectiligne et valeurs nodales) que l'élément non déformé.

La partie B de ce travail reprendra l'essentiel des résultats de ce rapport dans le contexte de barres et poutres bidimensionnelles (voir BERNADOU [1987]).

2 -FORMULATIONS VARIATIONNELLES

Orientation : Pour chaque type d'effort appliqué à la poutre, i.e., traction ou compression, flexion (avec ou sans prise en compte du cisaillement), torsion, nous rappelons l'expression de la fonctionnelle donnant l'énergie potentielle de la poutre, puis nous en déduisons la formulation variationnelle correspondante.

2.1. Poutre soumise à des efforts de traction ou compression (i.e. barre)

Supposons que la poutre soit soumise à une distribution de charges dont la résultante et le moment résultant sur la ligne moyenne se réduisent à (voir Figure 1.1 pour les notations) :

- une résultante $p_x \vec{e}_x$ distribuée sur la ligne moyenne ;
- une résultante (ponctuelle) $p_x(B)\vec{e}_x$ appliquée à l'extrémité B de la ligne moyenne.

Par ailleurs, on suppose que le déplacement de l'extrémité A est donné.

Ces efforts provoquent un déplacement $\vec{u} = (u_x,0,0)$ des particules situées sur la ligne moyenne. Or, *l'énergie potentielle de la poutre* ainsi chargée, associée à un champ de déplacement $v_x \vec{e}_x$ des particules situées sur la ligne moyenne vaut :

$$J_1(v_x) = \int_A^B \frac{1}{2} E\mathcal{A}\left(\frac{dv_x}{dx}\right)^2 dx - \int_A^B p_x v_x \, dx - p_x(B)v_x(B) \qquad (2.1.1)$$

E = module de Young ; (2.1.2)

a = aire de la section transversale de la poutre au point courant x. (2.1.3)

Formulation variationnelle correspondante

Posons

$$U = \{v \in H^1[A,B]\} \tag{2.1.4}$$

$$V = \{v \in H^1[A,B] \ , \ v(A) = 0\} \tag{2.1.5}$$

où $H^1[A,B] = \{v \in L^2[A,B] \ ; \ v' \in L^2[A,B]\}$.

La (ou les) solution(s) $u_x \vec{e}_x$ du problème vont minimiser l'énergie potentielle J_1 de la poutre. Compte tenu des symétries, cela équivaut à dire que u_x est solution du problème suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Etant donnés } u_x(A) \in \mathbb{R} \ , \ P_x(B) \in \mathbb{R} \ , \ p_x \in L^2[A,B] \ , \\ \text{trouver } u_x - u_x(A) \in V \text{ tel que} \\ \int_A^B E a \dfrac{du_x}{dx} \dfrac{dv_x}{dx} \, dx = \int_A^B p_x v_x \, dx + P_x(B) v_x(B) \\ \forall v_x \in V \ . \end{array}\right\} \tag{2.1.6}$$

Théorème 2.1.1 : Le problème (2.1.6) *admet une solution unique.*

□

2.2. Poutre soumise à des efforts de flexion (avec cisaillement)

Cette fois-ci la poutre est soumise à une distribution de charges dont la résultante et le moment résultant sur la ligne moyenne se réduisent à (voir Figure 1.1 pour les notations) *deux cas de charges* que nous examinons séparément ci-après :

Cas de charge 2.2.1 (générant une flexion dans la direction Oy)

C'est le cas pour lequel la résultante et le moment résultant sur la ligne moyenne se réduisent à

- une résultante $p_y \vec{e}_y$ distribuée sur la ligne moyenne ;
- une résultante (ponctuelle) $P_y(B) \vec{e}_y$ appliquée à l'extrémité B de la ligne moyenne ;
- un moment résultant $m_z \vec{e}_z$ distribué sur la ligne moyenne ;

→

L'ensemble de ces efforts provoque une déformation de la poutre (dans le plan Oxy) qui est définie à l'aide des deux caractéristiques suivantes de la ligne moyenne :

i) *le champ de déplacement* $\vec{u} = (0,u_y,0)$ des particules de la ligne moyenne ;

ii) *le vecteur rotation* $\vec{\beta} = (0,0,\beta_z)$. Ici β_z mesure sur $\vec{e}_z$ l'angle dont tourne la section normale (voir Figure 2.2.1) :

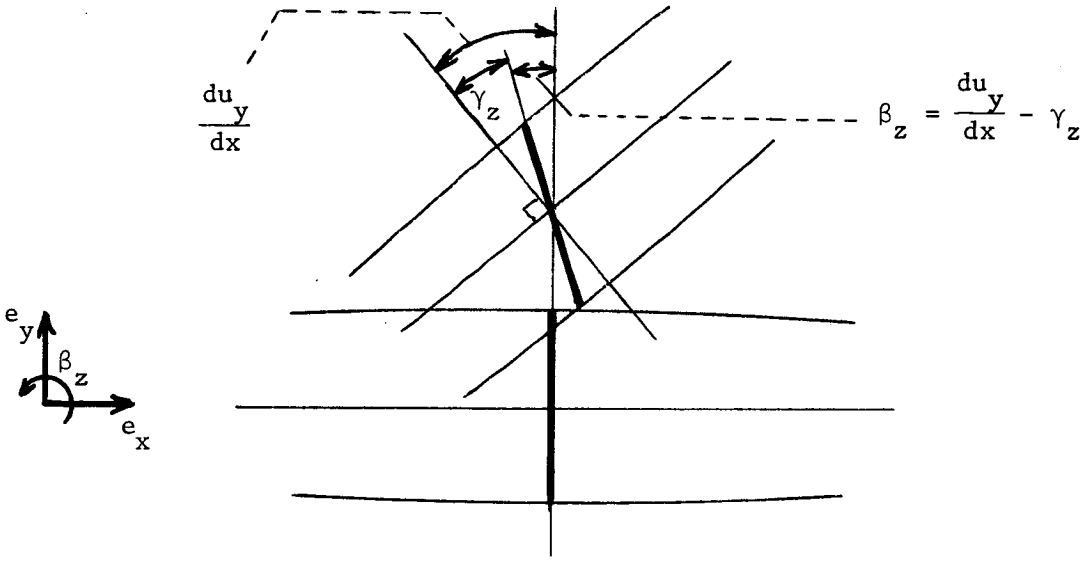


Figure 2.2.1 : Hypothèses de déformations de la poutre illustrée sur la coupe Oxy de la poutre

Energie potentielle correspondante

L'énergie potentielle de la poutre correspondant au cas de charge 2.2.1, associée

i) à un champ de déplacement $v_y\vec{e}_y$ des particules situées sur la ligne moyenne ;

ii) à un champ de rotation $\theta_z\vec{e}_z$ des sections normales à la poutre,

est donnée par

$$J_2(v_y,\theta_z) = \frac{1}{2}\int_A^B EI_z\,(\frac{d\theta_z}{dx})^2\,dx + \frac{k}{2}\int_A^B G\alpha(\frac{dv_y}{dx} - \theta_z)^2\,dx - \int_A^B (p_y v_y + m_z\theta_z)\,dx - P_y(B)v_y(B) - M_z(B)\theta_z(B) \qquad (2.2.1)$$

où

E = module de Young ; (2.2.2)

I_z = moment d'inertie par rapport à Oz de la section normale à la ligne moyenne au point d'abscisse x, i.e., $I_z = \int y^2 \, dydz$ (2.2.3)

$k = \frac{5}{6}$ = facteur de correction de cisaillement (2.2.4)

G = module de cisaillement . (2.2.5)

Formulation variationnelle correspondante

$$\left.\begin{array}{l} \text{Etant donnés } u_y(A) \in \mathbb{R}\ ,\ \beta_z(A) \in \mathbb{R}\ ,\ P_y(B) \in \mathbb{R}\ , \\ M_z(B) \in \mathbb{R}\ ,\ p_y \in L^2[A,B] \text{ et } m_z \in L^2[A,B]\ ,\ \text{trouver} \\ (u_y - u_y(A)\ ,\ \beta_z - \beta_z(A)) \in V \times V \text{ tel que} \\ \int_A^B EI_z \frac{d\beta_z}{dx}\frac{d\theta_z}{dx}\,dx + k\int_A^B G\mathcal{A}\left(\frac{du_y}{dx} - \beta_z\right)\left(\frac{dv_y}{dx} - \theta_z\right)dx \\ \qquad = \int_A^B (p_y v_y + m_z\theta_z)\,dx + P_y(B)v_y(B) + M_z(B)\theta_z(B) \\ \forall (v_y, \theta_z) \in V \times V\ , \end{array}\right\} \quad (2.2.6)$$

où V désigne l'espace défini en (2.1.5).

Théorème 2.2.1 : Le problème (2.2.6) *admet une solution unique.*

□

Cas de charge 2.2.2 (générant une flexion dans la direction Oz)

C'est le cas pour lequel la résultante et le moment résultant sur la ligne moyenne se réduisent à

- une résultante $p_z\vec{e}_z$ distribuée sur la ligne moyenne ;
- une résultante (ponctuelle) $P_z(B)\vec{e}_z$ appliquée à l'extrémité B de la ligne moyenne ;
- un moment résultant $m_y\vec{e}_y$ distribué sur la ligne moyenne ;
- un moment résultant (ponctuel) $M_y(B)\vec{e}_y$ appliqué à l'extrémité B de la ligne moyenne.

L'ensemble de ces efforts provoque une *déformation de la poutre* qui sera définie à l'aide des deux caractéristiques suivantes de la ligne moyenne :

i) *le champ de déplacement* $\vec{u} = (0,0,u_z)$ des particules de la ligne moyenne ;

ii) *le vecteur rotation* $\vec{\beta} = (0,\beta_y,0)$: dans cette théorie avec *prise en compte du cisaillement*, on suppose que toute section plane normale à la ligne moyenne de la poutre non déformée reste plane après déformation. L'angle β_y mesuré sur $\vec{e}_y$ est l'angle dont a tourné cette section normale ($\beta_y = -\, du_z/dx + \gamma_y$).

Energie potentielle correspondante

L'énergie potentielle de la poutre correspondant au cas de charge 2.2.2, associée

i) à un champ de déplacement $v_z\vec{e}_z$ des particules situées sur la ligne moyenne ;

ii) à un champ de rotation $\theta_y\vec{e}_y$ des sections normales à la poutre, est donnée par :

$$\left.\begin{aligned} J_3(v_z,\theta_y) = \frac{1}{2}\int_A^B EI_y \left(\frac{d\theta_y}{dx}\right)^2 dx \\ + \frac{k}{2}\int_A^B G\alpha \left(\frac{dv_z}{dx} + \theta_y\right)^2 dx - \int_A^B p_z v_z\, dx \\ - \int_A^B m_y\theta_y\, dx - P_z(B)v_z(B) - M_y(B)\theta_y(B) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.7)$$

où E, k et G sont définis en (2.2.2) (2.2.4) et (2.2.5) et

$$\left.\begin{aligned} I_y = \text{moment d'inertie par rapport à Oy de la section} \\ \text{normale à la ligne moyenne au point d'abcisse x,} \\ \text{i.e., } I_y = \int z^2\, dydz\ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.8)$$

Formulation variationnelle correspondante

Etant donnés $u_z(A) \in \mathbb{R}$, $\beta_y(A) \in \mathbb{R}$, $P_z(B) \in \mathbb{R}$, $M_y(B) \in \mathbb{R}$, $p_z \in L^2[A,B]$ et $m_y \in L^2[A,B]$, trouver $u_z - u_z(A) \in V$, $\beta_y - \beta_y(A) \in V$ tel que

$$\left.\begin{aligned} \int_A^B EI_y \frac{d\beta_y}{dx}\frac{d\theta_y}{dx}\, dx + k\int_A^B G\alpha \left(\frac{du_z}{dx} + \beta_y\right)\left(\frac{dv_z}{dx} + \theta_y\right) dx \\ = \int_A^B (p_z v_z + m_y\theta_y)\, dx + P_z(B)v_z(B) + M_y(B)\theta_y(B) \\ \forall (v_z,\theta_y) \in V\times V\ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.9)$$

Théorème 2.2.2 : Le problème (2.2.9) *admet une solution unique.*

□

2.3. Poutre soumise à des efforts de flexion (sans prise en compte du cisaillement)

Les formulations du paragraphe 2.2 prennent en compte les effets du cisaillement, i.e., une section plane de la poutre orthogonale à la ligne moyenne avant déformation reste plane après déformation *mais non nécessairement orthogonale à la ligne moyenne* déformée. Ces hypothèses sur la nature de la déformation s'appliquent indifféremment aux poutres moyennement épaisses ou aux poutres minces.

Cependant dans le cas de poutres suffisamment minces, il est possible de supposer que toute section plane de la poutre orthogonale à la ligne moyenne avant déformation reste plane et *orthogonale* après déformation à la ligne moyenne déformée. Cette hypothèse, de type Euler-Bernouilli, *revient à ne pas tenir compte du cisaillement*.

En se reportant à la Figure 2.2.1, cela revient pour chacun des cas de charges de types 2.2.1 ou 2.2.2, à supposer que les angles γ_z et γ_y sont nuls, i.e.,

$$\beta_z = \frac{du_y}{dx} \text{ et } \beta_y = -\frac{du_z}{dx} . \qquad (2.3.1)$$

Dans le cas de charge 2.2.1, ces considérations sont illustrées par la Figure 2.3.1.

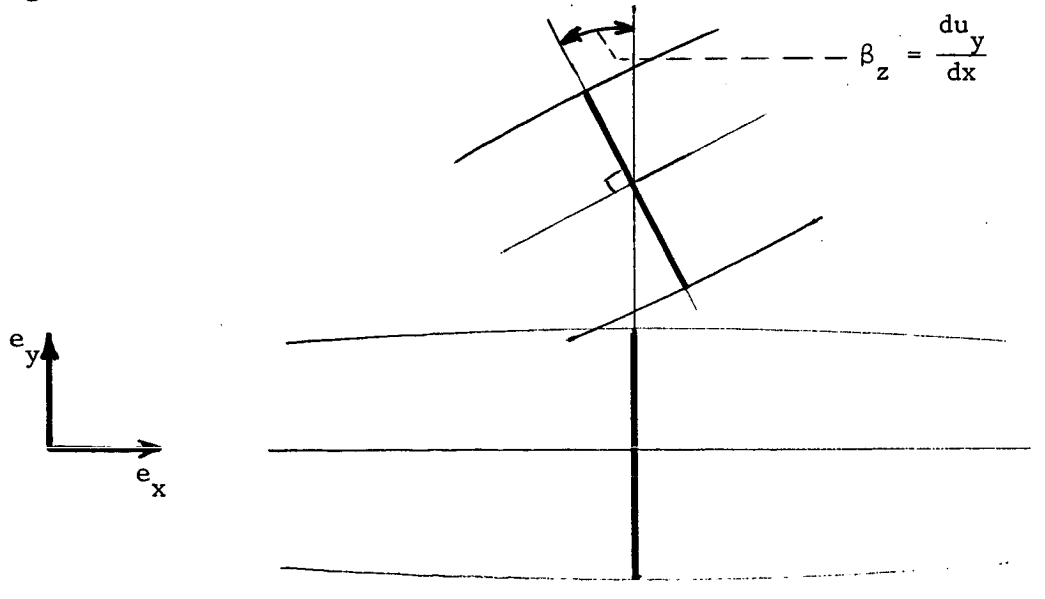


Figure 2.3.1 : Hypothèses de déformations de la poutre illustrées sur la coupe Oxy de la coupe (pas de cisaillement)

Energie potentielle correspondant au cas de charges 2.2.1

L'énergie potentielle de la poutre correspondant au cas de charge 2.2.1 associée à un champ de déplacement $v_y \vec{e}_y$ des particules situées sur la ligne moyenne, s'écrit maintenant grâce à la première relation (2.3.1) :

$$\left.\begin{aligned} \tilde{J}_2(v_y) = \frac{1}{2}\int_A^B EI_z \left(\frac{d^2v_y}{dx^2}\right)^2 dx - \int_A^B \left(p_y v_y + m_z \frac{dv_y}{dx}\right) dx \\ - P_y(B)v_y(B) - M_z(B)\frac{dv_y}{dx}(B) \ . \end{aligned}\right\} \quad (2.3.2)$$

Formulation variationnelle correspondant au cas de charge 2.2.1 (sans cisaillement)

Posons

$$\tilde{U} = \{v \in H^2[A,B]\} \quad (2.3.3)$$

$$\tilde{V} = \{v \in H^2[A,B] \ , \ v(A) = 0 \ , \ v'(A) = 0\} \ .$$

D'où la formulation

Etant donnés $u_y(A) \in \mathbb{R}$, $u'_y(A) \in \mathbb{R}$, $P_y(B) \in \mathbb{R}$, $M_z(B) \in \mathbb{R}$, $p_y \in L^2[A,B]$, $m_z \in L^2[A,B]$, trouver $u_y - u_y(A) - (x-x_A)u'_y(A) \in \tilde{V}$ tel que

$$\left.\begin{aligned} \int_A^B EI_z \frac{d^2u_y}{dx^2}\frac{d^2v_y}{dx^2} dx = \int_A^B \left(p_y v_y + m_z \frac{dv_y}{dx}\right) dx \\ + P_y(B)v_y(B) + M_z(B)\frac{dv_y}{dx}(B) \ , \ \forall v_y \in \tilde{V} \ . \end{aligned}\right\} \quad (2.3.5)$$

Théorème 2.3.1 : Le problème (2.3.5) *admet une solution unique.*

□

Energie potentielle correspondant au cas de charges 2.2.2

L'énergie potentielle de la poutre correspondant au cas de charge 2.2.2 associée à un champ de déplacement $v_z \vec{e}_z$ des particules situées sur la ligne moyenne, s'écrit maintenant

$$\left.\begin{aligned} \tilde{J}_3(v_z) = \frac{1}{2}\int_A^B EI_y \left(\frac{d^2v_z}{dx^2}\right)^2 dx - \int_A^B \left(p_z v_z - m_y \frac{dv_z}{dx}\right) dx \\ - P_z(B)v_z(B) + M_y(B)\frac{dv_z}{dx}(B) \ . \end{aligned}\right\} \quad (2.3.6)$$

Formulation variationnelle correspondant au cas de charges 2.2.2

Etant donnés $u_z(A) \in \mathbb{R}$, $u'_z(A) \in \mathbb{R}$, $P_z(B) \in \mathbb{R}$, $M_y(B) \in \mathbb{R}$, $p_z \in L^2[A,B]$, $m_y \in L^2[A,B]$, trouver $u_z - u_z(A) - (x-x_A)u'_z(A) \in \tilde{V}$ tel que

$$\left.\begin{aligned} \int_A^B EI_y \frac{d^2u_z}{dx^2}\frac{d^2v_z}{dx^2}\,dx = \int_A^B \left(p_z v_z - m_y \frac{dv_z}{dx}\right) dx \\ + P_z(B)v_z(B) - M_y(B)\frac{dv_z}{dx}(B) \ , \ \forall v_z \in \tilde{V} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.7)$$

Théorème 2.3.2 : Le problème (2.3.7) *admet une solution unique.*

□

2.4. Poutre soumise à des efforts de torsion

Cette fois-ci la poutre est soumise à une distribution de charges dont la résultante et le moment résultant sur la ligne moyenne se réduisent (voir Figure 1.1 pour les notations) à

- un moment résultant $m_x \vec{e}_x$ distribué sur la ligne moyenne ;
- un moment résultant (ponctuel) $M_x(B)\vec{e}_x$ appliqué à l'extrémité B de la ligne moyenne.

Suivant Landau-Lifchitz [1, pages 88 à 94], on obtient les expressions suivantes :

Energie potentielle de la poutre associée à un champ de rotation $\theta_x \vec{e}_x$ des sections normales

$$J_4(\theta_x) = \frac{1}{2}\int_A^B C \left(\frac{d\theta_x}{dx}\right)^2 dx - \int_A^B m_x\theta_x \, dx - M_x(B)\theta_x(B) \qquad (2.4.1)$$

où

$$C = \text{rigidité de torsion.} \qquad (2.4.2)$$

Le calcul de ce coefficient C est effectué dans Landau-Lifchitz [1, page 90].

Formulation variationnelle correspondante

Etant donnés $\beta_x(A) \in \mathbb{R}$, $M_x(B) \in \mathbb{R}$, $m_x \in L^2[A,B]$, trouver $\beta_x - \beta_x(A) \in V$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \int_A^B C \frac{d\beta_x}{dx} \frac{d\theta_x}{dx}\, dx = \int_A^B m_x \theta_x\, dx + M_x(B)\theta_x(B) \\ \forall \theta_x \in V\ . \end{array}\right\} \qquad (2.4.3)$$

l'espace V ayant été défini en (2.1.5).

Théorème 2.4.1 : Le problème (2.4.3) *admet une solution unique.*

□

2.5. Poutre soumise à un chargement général (avec prise en compte du cisaillement)

Après avoir examiné séparément les déformations d'un poutre soumise à des efforts de traction (ou de compression), de flexion et de torsion, nous allons mettre à profit la linéarité de l'approche pour donner une formulation globale du problème général. En rassemblant les formulations variationnelles (2.1.6) (2.2.6) (2.2.9) et (2.4.3), on obtient :

Formulation variationnelle du problème général

Etant donnés $\vec{u}(A) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\beta}(A) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{P}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{M}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \in (L^2[A,B])^3$, $\vec{m} \in (L^2[A,B])^3$, trouver $\vec{u} - \vec{u}(A) \in V^3$, $\vec{\beta} - \vec{\beta}(A) \in V^3$ tels que

$$\left.\begin{array}{l} \int_A^B [E\alpha \frac{du_x}{dx} \frac{dv_x}{dx} + EI_y \frac{d\beta_y}{dx} \frac{d\theta_y}{dx} + EI_z \frac{d\beta_z}{dx} \frac{d\theta_z}{dx} \\ \quad + kG\alpha \{(\frac{du_y}{dx} - \beta_z)(\frac{dv_y}{dx} - \theta_z) + (\frac{du_z}{dx} + \beta_y)(\frac{dv_z}{dx} + \theta_y)\} \\ \quad + C \frac{d\beta_x}{dx} \frac{d\theta_x}{dx}]\, dx = \int_A^B (\vec{pv} + \vec{m\theta})\, dx + \vec{P}(B)\vec{v}(B) + \vec{M}(B)\vec{\theta}(B) \\ \forall \vec{v} \in V^3\ ,\ \forall \vec{\theta} \in V^3\ . \end{array}\right\} \qquad (2.5.1)$$

Théorème 2.5.1 : Le problème (2.5.1) *admet une solution unique.*

□

2.6 Poutre soumise à un chargement général (sans prise en compte du cisaillement)

Par analogie avec le paragraphe 2.5, nous rassemblons maintenant les résultats (2.1.6) (2.3.5) (2.3.7) et (2.4.3). Il vient :

Formulation variationnelle du problème général

Etant donnés $\vec{u}(A) \in \mathbb{R}^3$, $u'_y(A) \in \mathbb{R}$, $u'_z(A) \in \mathbb{R}$, $\beta_x(A) \in \mathbb{R}$, $\vec{p} \in (L^2[A,B])^3$, $\vec{m} \in (L^2[A,B])^3$, $\vec{P}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{M}(B) \in \mathbb{R}^3$, trouver $u_x - u_x(A) \in V$, $u_y - u_y(A) - (x-x_A)u'_y(A) \in \tilde{V}$, $u_z - u_z(A) - (x-x_A)u'_z(A) \in \tilde{V}$, $\beta_x - \beta_x(A) \in V$ tels que

$$\left.\begin{aligned} &\int_A^B \left[E\mathcal{A} \frac{du_x}{dx}\frac{dv_x}{dx} + EI_y \frac{d^2u_z}{dx^2}\frac{d^2v_z}{dx^2} + EI_z \frac{d^2u_y}{dx^2}\frac{d^2v_y}{dx^2} \right] dx \\ &\quad + C \frac{d\beta_x}{dx}\frac{d\theta_x}{dx} \Big] dx = \int_A^B \left(\vec{p}\vec{v} + m_x\theta_x - m_y \frac{dv_z}{dx} + m_z \frac{dv_y}{dx} \right) dx \\ &\quad + \vec{P}(B)\vec{v}(B) + M_x(B)\theta_x(B) - M_y(B) \frac{dv_z}{dx}(B) + M_z(B) \frac{dv_y}{dx}(B) \\ &\forall \vec{v} \in V\times\tilde{V}\times\tilde{V} \text{ et } \forall \theta_x \in V \ . \end{aligned}\right\} \quad (2.6.1)$$

Théorème 2.6.1 : Le problème (2.6.1) *admet une solution unique.*

□

3 - APPROXIMATION CONFORME - ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE L'ERREUR

Orientation : Partant des formulations variationnelles (2.5.1) (resp. (2.6.1)) relatives au problème linéaire général d'une poutre chargée en traction (ou compression), en flexion et en torsion, avec (resp. sans) prise en compte des effets de cisaillement, nous proposons dans ce paragraphe des méthodes conformes d'éléments finis permettant d'approcher les solutions de ces problèmes.

3.1 Les espaces d'éléments finis utilisés

Le "maillage" : tous les problèmes considérés sont formulés sur le segment [A,B]. On considère donc une *partition uniforme* de cet intervalle :

$$\left.\begin{aligned} &\bar{I} = [A,B] = \bigcup_{i=1}^{M} I_i \text{ avec } I_i = [a_{i-1}, a_i] \ , \\ &x_{a_i} = x_A + ih \ , \ 0 \le i \le M \ , \ a_o = A \ , \ a_M = B \ , \end{aligned}\right\} \quad (3.1.1)$$

de pas $h = \frac{x_A - x_B}{M}$, M étant un entier strictement positif.

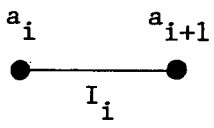
Nous allons définir maintenant les sous-espaces discrets des espaces U et $\tilde{U}$ définis en (2.1.4) et (2.3.3) respectivement, i.e.,

$$U = \{v \in H^1[A,B]\} \tag{3.1.2}$$

$$\tilde{U} = \{v \in H^2[A,B]\} \tag{3.1.3}$$

Définition de $U_h \subset U$

L'espace U_h est l'espace des fonctions $v_h \in \mathscr{C}^0(\bar{I})$ pour lesquelles les restrictions $v_h|_{I_i}$ génèrent l'espace $P_1(I_i)$, $1 \leq i \leq M$. L'élément correspondant est défini sur la Figure 3.1.1.



$$P_{I_i} = P_1(I_i)$$

$$\sum_{I_i} = \{v(a_i) \ , \ v(a_{i+1})\}$$

$$\|v-\pi_{I_i} v\|_{m,I_i} \leq Ch_{I_i}^{2-m} |v|_{2,I_i} \ ,$$

$$\forall v \in H^2(I_i) \ , \ 0 \leq m \leq 2 \ ,$$

Figure 3.1.1 : **L'élément fini** P_1

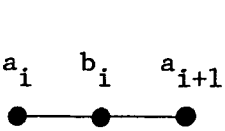
On définit aussi l'espace

$$V_h = \{v_h \in U_h \ , \ v_h(A) = 0\} \tag{3.1.4}$$

de telle sorte que $V_h \subset V$ où V est l'espace défini en (2.1.5), i.e.,

$$V = \{v \in U \ , \ v(A) = 0\} \ . \tag{3.1.5}$$

Nous indiquons dans les Figures 3.1.2 et 3.1.3 deux autres éléments finis couramment utilisés dans les problèmes de poutres et pour lesquels les espaces associés vérifient également les inclusions $U_h \subset U$ et $V_h \subset V$.



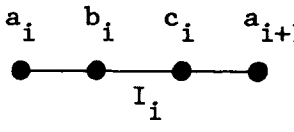
$$P_{I_i} = P_2(I_i)$$

$$\sum_{I_i} = \{v(a_i) \ , \ v(b_i) \ , \ v(a_{i+1})\}$$

$$\|v-\pi_{I_i} v\|_{m,I_i} \leq Ch_{I_i}^{3-m} |v|_{3,I_i} \ ,$$

$$\forall v \in H^3(I_i) \ , \ 0 \leq m \leq 3 \ ,$$

Figure 3.1.2 : **L'élément fini** P_2 (type Lagrange)



$$P_{I_i} = P_3(I_i)$$

$$\Sigma_{I_i} = \{v(a_i)\ ,\ v(b_i)\ ,\ v(c_i)\ ,\ v(a_{i+1})\}$$

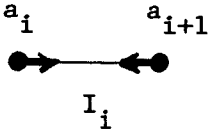
$$\|v-\pi_{I_i} v\|_{m,I_i} \leq C h_{I_i}^{4-m} |v|_{4,I_i}\ ,$$

$$\forall v \in H^4(I_i)\ ,\ 0 \leq m \leq 4\ ,$$

Figure 3.1.3 : **L'élément fini** P_3 (type Lagrange)

Définition de $\tilde{U}_h \subset \tilde{U}$

L'espace $\tilde{U}_h$ est l'espace des fonctions $v_h \in \mathscr{C}^1(I)$ pour lesquelles les restrictions $v_h|_{I_i}$ génèrent l'espace $P_3(I_i)$, $1 \leq i \leq M$. L'élément fini utilisé est défini sur la Figure 3.1.4.



$$P_{I_i} = P_3(I_i)$$

$$\Sigma_{I_i} = \{v(a_i)\ ,\ v(a_{i+1})$$
$$Dv(a_i)(a_{i+1}-a_i)\ ,\ Dv(a_{i+1})(a_i-a_{i+1})\}$$

$$\|v-\pi_{I_i} v\|_{m,I_i} \leq C h_{I_i}^{4-m} |v|_{4,I_i}\ ,$$

$$\forall v \in H^4(I_i)\ ,\ 0 \leq m \leq 4\ ,$$

Figure 3.1.4 : **L'élément fini** P_3 (type Hermite)

3.2. Approximation conforme du problème général de poutre (avec prise en compte des effets de cisaillement)

Nous donnons ci-après la formulation approchée du problème (2.5.1) à l'aide d'une méthode conforme d'éléments finis. Ceci conduit à deux formulations distinctes suivant que l'on utilise ou non les techniques d'intégration numérique.

3.2.1. Application conforme du problème (2.5.1) avec intégrations exactes

Problème 3.2.1 : Etant donnés $\vec{u}(A) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\beta}(A) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{P}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{M}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \in (L^2[A,B])^3$, $\vec{m} \in (L^2[A,B])^3$, *trouver* $\vec{u}_h - \vec{u}(A) \in \vec{V}_h$, $\vec{\beta}_h - \vec{\beta}(A) \in \vec{V}_h$, $\vec{V}_h = V_h \times V_h \times V_h$, *tels que*

$$a[(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h) ; (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = f[\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] \ , \ \forall(\vec{v}_h,\vec{\theta}_h) \in \vec{V}_h \times \vec{V}_h \qquad (3.2.1)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} a[(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h) ; (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = & \\ \int_A^B [E\mathcal{A} \frac{du_{hx}}{dx}\frac{dv_{hx}}{dx} + EI_y \frac{d\beta_{hy}}{dx}\frac{d\theta_{hy}}{dx} + EI_z \frac{d\beta_{hz}}{dx}\frac{d\theta_{hz}}{dx} & \\ + kG\mathcal{A}\{(\frac{du_{hy}}{dx} - \beta_{hz})(\frac{dv_{hy}}{dx} - \theta_{hz}) + (\frac{du_{hz}}{dx} + \beta_{hy})(\frac{dv_{hz}}{dx} + \theta_{hy})\} & \\ + C \frac{d\beta_{hx}}{dx}\frac{d\theta_{hx}}{dx}] \, dx & \end{aligned}\right\} (3.2.2)$$

$$f[(\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = \int_A^B (\vec{p}\vec{v}_h + \vec{m}\vec{\theta}_h) \, dx + \vec{P}(B)\vec{v}_h(B) + \vec{M}(B)\vec{\theta}_h(B) \qquad (3.2.3)$$

De manière classique (voir CIARLET [1978]), on obtient :

Théorème 3.2.1 : Le problème (3.2.1) *admet un solution unique* $(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h)$. *De plus si* m *désigne l'ordre des polynômes utilisés pour construire l'espace* V_h (m = 1, 2 ou 3) *si* $\vec{u}_h \in (H^{m+1}[A,B])^3$, $\vec{\beta}_h \in (H^{m+1}[A,B])^3$ *et si* $\vec{p}$ *et* $\vec{m}$ *sont suffisamment réguliers, alors*

$$\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{1,I} + \|\vec{\beta}-\vec{\beta}_h\|_{1,I} \leq Ch^m(\|\vec{u}\|_{m+1,I} + \|\vec{\beta}\|_{m+1,I}) \ . \qquad (3.2.4)$$

□

3.2.2. Approximation conforme du problème (2.5.1) avec intégrations approchées

On écrit désormais

$$\int_A^B g(x) \, dx = \sum_{i=1}^{M} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(x) \, dx \simeq \sum_{i=1}^{M} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell g(b_{i\ell}) \qquad (3.2.5)$$

ce qui revient à dire que les intégrales sont calculées de manière approchée à l'aide d'un schéma d'intégration numérique. L'utilisation de ces techniques est intéressante, voire indispensable, quand les coefficients apparaissant dans les formes bilinéaires et linéaires sont variables, ou bien quand les charges sont des fonctions de la variable x, ou encore pour des approximations de degré élevé.

En pratique, cela revient à introduire un nouveau problème approché :

Problème 3.2.2 : Etant donnés $\vec{u}(A) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\beta}(A) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{P}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{M}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p}$ *et* $\vec{m}$ *suffisamment réguliers, trouver* $\vec{u}_h - \vec{u}(A) \in \vec{V}_h$, $\vec{\beta}_h - \vec{\beta}(A) \in \vec{V}_h$ *tels que*

$$\left.\begin{aligned} & a_h[(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h) \ ; \ (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = f_h[(\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] \\ & \forall (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h) \in \vec{V}_h \times \vec{V}_h \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.6)$$

où cette fois-ci

$$\left.\begin{aligned} a_h[(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h) \ ; \ (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell \{ & E\mathcal{A} \frac{du_{hx}}{dx} \frac{dv_{hx}}{dx} \\ & + EI_y \frac{d\beta_{hy}}{dx} \frac{d\theta_{hy}}{dx} + EI_z \frac{d\beta_{hz}}{dx} \frac{d\theta_{hz}}{dx} \\ & + kG\mathcal{A} [(\frac{du_{hy}}{dx} - \beta_{hz})(\frac{dv_{hy}}{dx} - \theta_{hz}) + (\frac{du_{hz}}{dx} + \beta_{hy})(\frac{dv_{hz}}{dx} + \theta_{hy})] \\ & + C \frac{d\beta_{hx}}{dx} \frac{d\theta_{hx}}{dx} \} (b_{i\ell}) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.7)$$

$$\left.\begin{aligned} f_h[(\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell (\vec{pv}_h + \vec{m\theta}_h)(b_{i\ell}) \\ + \vec{P}(B)\vec{v}_h(B) + \vec{M}(B)\vec{\theta}_h(B) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.8)$$

□

Remarque 3.2.1 : Naturellement, nous avons désigné par $\vec{u}_h, \vec{\beta}_h$ les solutions des problèmes 3.2.1 et 3.2.2, ceci pour limiter les notations, mais il n'y a aucune raison pour que ces solutions soient identiques.

□

De manière classique (voir CIARLET [1978] ou BERNADOU [1980]) on obtient :

Théorème 3.2.2 : Soit m *l'ordre des polynômes utilisés pour construire l'espace* V_h *(ici* m = 1, 2 ou 3*). On suppose que les schémas d'intégration numérique utilisés sont exacts pour des polynômes de degrés* 2m-2*, i.e.,*

$$E(\phi) = 0 \quad , \quad \forall \phi \in P_{2m-2} \qquad (3.2.9)$$

où

$$E(\phi) = \int_{I_i} \phi(x)\, dx - \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell\, \phi(b_{i\ell}) \ . \qquad (3.2.10)$$

Alors, pour tout $\vec{u},\vec{\beta} \in (H^{m+1}[A,B])^3$ *le problème* (3.2.4) *admet une solution unique vérifiant*

$$\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{1,I} + \|\vec{\beta}-\vec{\beta}_h\|_{1,I} \le Ch^m(\|\vec{u}\|_{m+1,I} + \|\vec{\beta}\|_{m+1,I}) \ . \qquad (3.2.11)$$

□

Dans le Tableau 3.2.1, nous indiquons pour chacun des éléments finis proposés dans les Figures 3.1.1 à 3.1.3 :

- les résultats d'estimation d'erreur donnés en (3.2.11), sous la forme abrégée $O(h^m)$;

- la régularité requise des solutions exactes ;

- le critère requis sur le schéma d'intégration numérique, suivant (3.2.9) ;

- un exemple de schéma d'intégration numérique approprié (suivant Gauss-Legendre : cf. BATHE [1982, p. 276]).

3.2.3. Quelques remarques sur le choix de l'approximation

Nous venons de proposer trois éléments finis pour approcher le problème général de poutre suivant une méthode conforme. Le choix de la méthode va dépendre du problème considéré :

i) *cas d'une poutre "modérément" épaisse*

Dans ce cas, on *pourra utiliser indifféremment les trois méthodes associées aux trois éléments finis du* Tableau 3.2.1.

Naturellement, les éléments de poutres déformées obtenus à l'aide d'approximation de type P_2 ou P_3 de Lagrange sont courbés. C'est pourquoi, dans le cas de *problèmes non linéaires*, il sera préférable de n'utiliser que des éléments de type P_1-Lagrange, ceci afin qu'à chaque itération les éléments de poutres déformées soient à ligne moyenne rectiligne.

ii) *Cas d'une poutre mince*

Dans le cas d'une poutre mince le terme de cisaillement dans l'expression de l'énergie est très petit (quatrième terme de l'expression (2.5.1)). L'utilisation d'éléments finis de type P_1-Lagrange conduit à surestimer ce terme.

C'est pourquoi (cf. BATHE [1982, page 340]) dans le cas de poutres minces *on utilisera des éléments finis de type* P_1 *ou* P_3 *de Lagrange*.

Elément fini utilisé pour construire V_h / Résultats	m=1	m=2	m=3
Estimation d'erreur $\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{1,I}+\|\vec{\beta}-\vec{\beta}_h\|_{1,I}$	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$
Régularité requise de $\vec{u}$ et $\vec{\beta}$	$\vec{u},\vec{\beta} \in (H^2(I))^3$	$\vec{u},\vec{\beta} \in (H^3(I))^3$	$\vec{u},\vec{\beta} \in (H^4(I))^3$
Critère d'intégration numérique	$E(\phi)=0 \ , \ \forall \phi \in P_o$	$E(\phi)=0 \ , \ \forall \phi \in P_2$	$E(\phi)=0 \ , \ \forall \phi \in P_4$
Exemple de schémas d'intégration numérique appropriés	x_i x_{i+1} L = 1 noeud $\omega_1 = x_{i+1}-x_i$ b_{i1} = point quelconque de l'intervalle	x_i x_{i+1} L = 2 noeuds $\omega_1 = \omega_2 = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$ $b_{i\alpha} = \frac{x_{i+1}-x_i}{2} a_\alpha + \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ $a_\alpha = \mp 0.577350269189626$ $\alpha = 1,2$	x_i x_{i+1} L = 4 noeuds $\omega_1 = \omega_4 = \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \delta_1$ $\omega_2 = \omega_3 = \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \delta_2$ $\delta_1 = 0.347854845137454$ $\delta_2 = 0.652145154862546$ $b_{i\alpha} = \frac{x_{i+1}-x_i}{2} a_\alpha + \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ $a_1, a_4 = \mp 0.861136311594053$ $a_2, a_3 = \mp 0.339981043584856$

Tableau 3.2.1 : Résultats d'approximation conforme

Cependant les éléments finis de type P_1 sont très appréciés d'une part pour leur mise en oeuvre facile, d'autre part pour la résolution de problèmes non linéaires (voir i)). C'est pourquoi les ingénieurs ont cherché à améliorer le comportement des approximations de bas degré ce qui les a conduit à proposer deux méthodes intéressantes reposant sur des approximations de type P_1-Lagrange :

a) l'utilisation de la *théorie discrète de Kirchhoff* ;

b) l'utilisation de l'*intégration sélective ou réduite*.

Nous n'entrerons pas ici dans la discussion de ces diverses améliorations et renvoyons pour cela à BATHE [1982] et CRISFIELD [1986].

3.3. Approximation conforme du problème général de poutre mince (sans prise en compte des effets de cisaillement)

Dans l'approximation d'une poutre *mince* il est généralement possible de négliger les effets du cisaillement. La formulation variationnelle correspondante (voir équation (2.6.1)) ne laisse subsister comme inconnues que les trois composantes du déplacement (u_x,u_y,u_z) et la composante d'angle de torsion β_x. Cette réduction du nombre d'inconnues se fait au détriment de l'ordre du système qui dans le cas présent est d'ordre 4 (au lieu de 2) en u_y et u_z. Ce changement va compliquer quelque peu l'approximation car il va nécessiter l'utilisation d'éléments finis de classe $\mathscr{C}^1$.

3.3.1. Approximation conforme du pb (2.6.1) avec intégrations exactes

A partir de la formulation du problème (2.6.1), il est possible de définir le problème 3.3.1 suivant :

Problème 3.3.1 : Etant donnés $\vec{u}(A) \in \mathbb{R}^3$, $u'_y(A) \in \mathbb{R}$, $u'_z(A) \in \mathbb{R}$, $\beta_x(A) \in \mathbb{R}$, $\vec{p} \in (L^2[A,B])^3$, $\vec{m} \in (L^2[A,B])^3$, $\vec{P}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{M}(B) \in \mathbb{R}^3$, *trouver* $u_{hx} - u_x(A) \in V_h$, $u_{hy} - u_y(A) - (x-x_A)u'_y(A) \in \tilde{V}_h$, $u_{hz} - u_z(A) - (x-x_A)u'_z(A) \in \tilde{V}_h$, $\beta_{hx} - \beta_x(A) \in V_h$ *tels que*

$$\left.\begin{aligned} & a[(\vec{u}_h,\beta_{hx}) \ ; \ (\vec{v}_h,\theta_{hx})] = f[(\vec{v}_h,\theta_{hx})] \\ & \forall \vec{v}_h \in V_h \times \tilde{V}_h \times \tilde{V}_h \quad , \quad \forall \theta_{hx} \in V_h \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.1)$$

où

$$\left.\begin{aligned} a[(\vec{u}_h;\beta_{hx}) \ , \ (\vec{v}_h;\theta_{hx})] = \int_A^B [& E\mathcal{A} \frac{du_{hx}}{dx}\frac{dv_{hx}}{dx} \\ & + EI_y \frac{d^2u_{hz}}{dx^2}\frac{d^2v_{hz}}{dx^2} + EI_y \frac{d^2u_{hy}}{dx^2}\frac{d^2v_{hy}}{dx^2} + C \frac{d\beta_{hx}}{dx}\frac{d\theta_{hx}}{dx}] \ dx \end{aligned}\right\} (3.3.2)$$

$$f[(\vec{v}_h,\theta_{hx})] = \int_A^B (\vec{p}\vec{v}_h + m_x\theta_{hx} - m_y \frac{dv_{hz}}{dx} + m_z \frac{dv_{hy}}{dx})\, dx$$
$$+ \vec{P}(B)\vec{v}_h(B) + M_x(B)\theta_{xh}(B)$$
$$- M_y(B) \frac{dv_{hz}}{dx}(B) + M_z(B) \frac{dv_{hy}}{dx}(B) \quad . \qquad (3.3.3)$$

Théorème 3.3.1 : Le problème 3.3.1 *a une solution unique* $(\vec{u}_h,\beta_{hx})$. *De plus si* m *désigne l'ordre des polynômes utilisés pour construire l'espace* V_h (m = 1, 2, 3, *voir* Figures 3.1.1 à 3.1.3), *si* $\vec{u} \in H^{n+2}[A,B] \times (H^{n+3}[A,B])^2$, $\beta_x \in H^{n+2}[A,B]$, $n = \min(m-1,1)$ *et si* $\vec{p}$ *et* $\vec{m}$ *sont suffisamment réguliers, alors*

$$\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{H^1\times(H^2)^2} + \|\beta_x-\beta_{hx}\|_{H^1}$$
$$\leq Ch^{n+1}(\|\vec{u}\|_{H^{n+2}\times(H^{n+3})^2} + \|\beta_x\|_{H^{n+2}}) \quad . \qquad (3.3.4)$$

3.3.2. Approximation conforme du problème 2.6.1 avec intégration numérique

Pour les raisons mentionnées dans la section 3.2.2, on a souvent recours aux techniques d'intégration numérique ce qui conduit à la définition du nouveau problème approché suivant :

Problème 3.3.2 : Etant donnés $\vec{u}(A) \in \mathbb{R}^3$, $u_y'(A) \in \mathbb{R}$, $u_z'(A) \in \mathbb{R}$, $\beta_x(A) \in \mathbb{R}$, $\vec{P}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{M}(B) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p}$ *et* $\vec{m}$ *suffisamment réguliers, trouver* $u_{hx} - u_x(A) \in V_h$, $u_{hy} - u_y(A) - (x-x_A)u_y'(A) \in \tilde{V}_h$, $u_{hz} - u_z(A) - (x-x_A)u_z'(A) \in \tilde{V}_h$, $\beta_{hx} - \beta_x(A) \in V_h$ *tels que*

$$a_h[(\vec{u}_h,\beta_{hx}) ; (\vec{v}_h,\theta_{hx})] = f_h[(\vec{v}_h,\theta_{hx})]$$
$$\forall (\vec{v}_h,\theta_{hx}) \in V_h\times\tilde{V}_h\times\tilde{V}_h\times V_h \quad , \qquad (3.3.5)$$

où cette fois-ci

$$a_h[(\vec{u}_h,\beta_{hx}) ; (\vec{v}_h,\theta_{hx})] = \sum_{i=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell \{EA \frac{du_{hx}}{dx}\frac{dv_{hx}}{dx}$$
$$+ EI_y \frac{d^2u_{hz}}{dx^2}\frac{d^2v_{hz}}{dx^2} + EI_z \frac{d^2u_{hy}}{dx^2}\frac{d^2v_{hy}}{dx^2} + C \frac{d\beta_{hx}}{dx}\frac{d\theta_{hx}}{dx}\}(b_{i\ell}) \qquad (3.3.6)$$

$$f_h[(\vec{v}_h,\theta_{hx})] = \sum_{i=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell \{\vec{pv}_h + m_x\theta_{hx} - m_y \frac{dv_{hz}}{dx} + m_z \frac{dv_{hy}}{dx}\}(b_{i\ell}) + \vec{P}(B)\vec{v}_h(B) + M_x(B)\theta_{hx}(B) + \left.- M_y(B) \frac{dv_{hz}}{dx}(B) + M_z(B) \frac{dv_{hy}}{dx}(B)\right\} \quad (3.3.7)$$

□

Remarque 3.3.1 : Ici encore, les solutions $\vec{u}_h$ et β_{hx} des problèmes 3.3.1 et 3.3.2 n'ont a priori aucune raison d'être identiques.

□

Avec les méthodes développées dans CIARLET [1978] ou BERNADOU [1980], on obtient :

Théorème 3.3.2 : Soit m *l'ordre des polynômes utilisés pour construire l'espace* V_h *(ici* m = 1, 2 *ou* 3*). On suppose que les schémas d'intégration numérique utilisés sont exacts pour des polynômes de degré* 2p, p = max(m-1,1) *i.e., avec* (3.2.10) *:*

$$E(\phi) = 0 \quad , \quad \forall \phi \in P_{2p} \quad . \quad (3.3.8)$$

Alors, pour tout $\vec{u} \in H^{n+2}[I] \times (H^{n+3}(I))^2$, $\beta_x \in H^{n+2}[I]$, n = min(m-1,1) *et tout* $\vec{p}$ *et* $\vec{m}$ *suffisamment réguliers, il vient*

$$\left.\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{H^1\times(H^2)^2} + \|\beta_x-\beta_{hx}\|_{H^1} \leq Ch^{n+1}(\|\vec{u}\|_{H^{n+2}\times(H^{n+3})^2} + \|\beta_x\|_{H^{n+2}})\right. \quad (3.3.9)$$

□

Dans le Tableau 3.3.1, nous indiquons pour chacun des éléments finis proposés dans les Figures 3.1.1 à 3.1.3 pour la construction de V_h et pour l'élément fini proposé dans la Figure 3.1.4 pour la construction de $\tilde{V}_h$:

- les résultats d'estimation d'erreur donnés en (3.3.9), sous la forme abrégée $O(h^{n+1})$;

- la régularité requise des solutions exactes ;

- le critère requis sur le schéma d'intégration numérique, suivant (3.3.8) ;

- un exemple de schéma d'intégration numérique approprié (suivant Gauss-Legendre : cf. BATHE [1982, p. 376]).

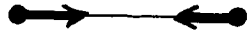
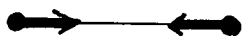
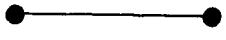
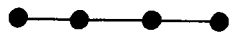
Elément fini utilisé pour construire $\tilde{V}_h$	P3-Hermite 	P3-Hermite 	P3-Hermite 
Elément finis utilisé pour construire V_h Résultats	m=1 ; n=0 ; p=1 	m=2 ; n=1 ; p=1 	m=3 ; n=1 ; p=2 
Estimation d'erreur $\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{H^1\times(H^2)^2} + \|\beta_x-\beta_{hx}\|_{1,I}$	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^2)$
Régularité requise de $\vec{u}$ et β_x	$\vec{u} \in H^2\times(H^3)^2$ $\beta_x \in H^2$	$\vec{u} \in H^3\times(H^4)^2$ $\beta_x \in H^3$	$\vec{u} \in H^3\times(H^4)^2$ $\beta_x \in H^3$
Critère d'intégration numérique	$E(\phi) = 0$, $\forall\phi \in P_2$	$E(\phi) = 0$, $\forall\phi \in P_2$	$E(\phi) = 0$, $\forall\phi \in P_4$
Exemple de schémas d'intégration numérique approprié	voir colonne 3 du Tableau 3.2.1	voir colonne 3 du Tableau 3.2.1	voir colonne 4 du Tableau 3.2.1

Tableau 3.3.1 : Résultats d'approximation conforme pour le problème général de poutre (sans prise en compte des effets de cisaillement)

Remarque 3.3.2 : D'un point de vue approximation il semble que la meilleure, au meilleur coût, soit celle correspondant à m = 2. Cette approximation est en général bien adaptée aux problèmes de poutres *minces*.

Par contre ces trois types d'approximations ne paraissent pas être satisfaisants dans le cas de problèmes non linéaires : la déformée d'un élément de poutre rectiligne n'est plus une poutre à ligne moyenne rectiligne.

□

4 - IMPLEMENTATION DES METHODES CONFORMES D'APPROXIMATION

4.1. Modules d'interpolation

Nous donnons tout d'abord les diverses relations permettant de programmer les modules d'interpolation associés aux éléments finis 1-D décrits dans les Figures 3.1.1 à 3.1.4. La distinction entre ces quatre éléments finis sera faite à l'aide des indices suivants :

$$\left.\begin{array}{l} 1 : \text{pour l'élément fini 1D de type (1)-Lagrange} \\ 2 : \text{pour l'élément fini 1D de type (2)-Lagrange} \\ 3 : \text{pour l'élément fini 1D de type (3)-Lagrange} \\ H : \text{pour l'élément fini 1D de type (3)-Hermite} \end{array}\right\} \qquad (4.1.1)$$

Implémentation de l'élément fini 1D de type (1)-Lagrange

Avec les notations ci-contre, l'interpolée $\pi_{K1}v$ d'une fonction $v \in \mathscr{C}^o(I)$, $I = \overset{M}{\underset{i=1}{\mathbf{U}}} I_i$, s'écrit



$$\pi_{K1}v\big|_{I_i} = [DL_{1i}(v)]_{1\times 2}\ [\lambda 1]_{2\times 1} \qquad (4.1.2)$$

où

$$[DL_{1i}(v)]_{1\times 2} = [v(a_{i-1}) \quad v(a_i)] \qquad (4.1.3)$$

$$^t[\lambda 1]_{1\times 2} = [1-\lambda \quad \lambda] \qquad (4.1.4)$$

$$\lambda = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \qquad (4.1.5)$$

et

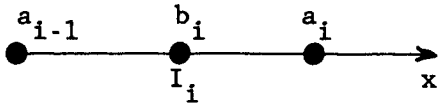
x_{i-1}, x_i = abcisses respectives des noeuds a_{i-1} et a_i.

Par la suite, nous utiliserons la dérivée de l'interpolée $\pi_{K1}v\big|_{I_i}$ qui est donnée par

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\pi_{K1}v}{dx}\Big|_{I_i} = [DL_{1i}(v)]_{1\times 2}\ [d_{x_i}\lambda_1]_{2\times 1} \\ \text{avec} \\ ^t[d_{x_i}\lambda 1] = \dfrac{1}{x_i-x_{i-1}}\ [-1 \quad 1]\ . \end{array}\right\} \qquad (4.1.6)$$

Implémentation de l'élément fini 1D de type (2)-Lagrange

Avec les notations précédentes et celles de la figure ci-contre, il vient



$$\pi_{K2}v\big|_{I_i} = [DL_{2i}(v)]_{1\times 3}\ [\lambda 2]_{3\times 1} \tag{4.1.7}$$

où

$$[DL_{2i}(v)]_{1\times 3} = [v(a_{i-1})\quad v(b_i)\quad v(a_i)] \tag{4.1.8}$$

$${}^t[\lambda 2]_{1\times 3} = [(1-\lambda)(1-2\lambda)\quad 4\lambda(1-\lambda)\quad \lambda(2\lambda-1)]\ ,\ \lambda = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

Il s'ensuit

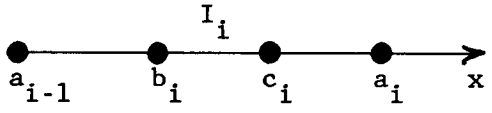
$$\frac{d\pi_{K2}v}{dx}\Big|_{I_i} = [DL_{2i}(v)]_{1\times 3}\ [d_{x_i}\lambda 2]_{3\times 1} \tag{4.1.9}$$

avec

$${}^t[d_{x_i}\lambda 2]_{1\times 3} = \frac{1}{x_i-x_{i-1}}\ [4\lambda-3\quad 4(1-2\lambda)\quad 4\lambda-1]\ .$$

Implémentation de l'élément fini 1D de type (3)-Lagrange

Avec les notations précédentes et celles de la figure ci-contre, il vient



$$\pi_{K3}v\big|_{I_i} = [DL_{3i}(v)]_{1\times 4}\ [\lambda 3]_{4\times 1} \tag{4.1.10}$$

où

$$[DL_{3i}(v)]_{1\times 4} = [v(a_{i-1})\quad v(b_i)\quad v(c_i)\quad v(a_i)] \tag{4.1.11}$$

$${}^t[\lambda 3]_{1\times 4} = [\tfrac{1}{2}\ (1-\lambda)(2-3\lambda)(1-3\lambda)\quad \tfrac{9}{2}\ \lambda(2-3\lambda)(1-\lambda)$$

$$-\ \tfrac{9}{2}\ \lambda(1-3\lambda)(1-\lambda)\quad \tfrac{1}{2}\ \lambda(1-3\lambda)(2-3\lambda)]$$

$$\lambda = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

Il s'ensuit

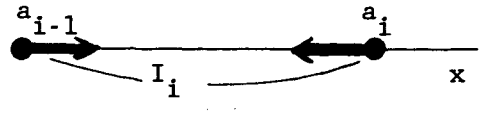
$$\frac{d\pi_{K3}v}{dx}\Big|_{I_i} = [DL_{3i}(v)]_{1\times 4}\ [d_{x_i}\lambda 3]_{4\times 1} \tag{4.1.12}$$

avec

$$ {}^t[d_{x_i}\lambda 3] = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \left[\frac{1}{2}(-11 + 36\lambda - 27\lambda^2) \quad \frac{9}{2}(2 - 10\lambda + 9\lambda^2) \right. $$
$$ \left. - \frac{9}{2}(1 - 8\lambda + 9\lambda^2) \quad \frac{1}{2}(2 - 18\lambda + 27\lambda^2)\right] . $$

Implémentation de l'élément fini 1D de type (3)-Hermite

Avec les notations utilisées pour l'étude de l'élément de type (1)-Lagrange et avec les notations de la figure ci-contre, il vient :



$$ \pi_{KH}{}^v\big|_{I_i} = [DL_{Hi}(v)]_{1\times 4}\ [\lambda H]_{4\times 1} \tag{4.1.13} $$

où

$$ \left.\begin{aligned} [DL_{Hi}(v)]_{1\times 4} &= [v(a_{i-1}) \quad v(a_i) \\ &\qquad Dv(a_{i-1})(a_i - a_{i-1}) \quad Dv(a_i)(a_{i-1} - a_i)] \\ {}^t[\lambda H]_{1\times 4} &= [(1-\lambda)^2(2\lambda+1) \quad \lambda^2(3-2\lambda) \quad \lambda(1-\lambda)^2 \quad \lambda^2(1-\lambda)] \end{aligned}\right\} \tag{4.1.14} $$

$$ \lambda = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} . $$

Il s'ensuit

$$ \frac{d\pi_{KH}{}^v}{dx}\Big|_{I_i} = [DL_{Hi}(v)]_{1\times 4}\ [d_{x_i}\lambda H]_{4\times 1} \tag{4.1.15} $$

avec

$$ {}^t[d_{x_i}\lambda H] = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} [6\lambda(\lambda-1) \quad 6\lambda(1-\lambda) \quad (1-\lambda)(1-3\lambda) \quad \lambda(2-3\lambda)] \tag{4.1.16} $$

et

$$ \frac{d^2\pi_{KH}{}^v}{dx^2}\Big|_{I_i} = [DL_{Hi}(v)]_{1\times 4}\ [d_{xx_i}\lambda H]_{4\times 1} \tag{4.1.17} $$

avec

$$ {}^t[d_{xx_i}\lambda H] = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} [6(2\lambda-1) \quad 6(1-2\lambda) \quad 2(-2+3\lambda) \quad 2(1-3\lambda)] \tag{4.1.18} $$

Dans les relations ci-dessus, nous avons utilisé une définition *locale* des degrés de liberté. Par la suite, pour réaliser l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires, il sera préférable d'utiliser une définition *globale* des degrés de liberté. En désignant par ℓ_i la longueur de l'intervalle I_i , il vient ainsi

$$[DL_{Hi}(v)]_{1\times4} = [DG_{Hi}(v)]_{1\times4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\ell_i \end{bmatrix} \tag{4.1.19}$$

avec

$$[DG_{Hi}(v)]_{1\times4} = [v(a_{i-1}) \quad v(a_i) \quad d_x v(a_{i-1}) \quad d_x v(a_i)] \tag{4.1.20}$$

4.2. Modules "fonctionnelle d'énergie" et "second membre" associés à la formulation (3.2.1) dans le cas où les effets de cisaillement sont pris en compte

La formulation (3.2.1) correspond au cas d'intégrations exactes. Pour cela nous supposons ici que les données E, $\mathcal{A}$, I_y, I_z, k, G, C, $\vec{p}$, $\vec{m}$ sont constants sur l'intervalle [A,B]. Les relations (3.2.2) et (3.2.3) peuvent être réécrits sous la forme :

$$a[(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h) \ ; \ (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = \sum_{i=1}^{M} \int_{a_{i-1}}^{a_i} {}^tU_h[A_{IJ}] \ V_h \ dx \tag{4.2.1}$$

$$f[(\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = \sum_{i=1}^{M} \int_{a_{i-1}}^{a_i} {}^tF \ V_h \ dx + {}^tG(B) \ V_h(B) \tag{4.2.2}$$

avec

$${}^tU_h = [u_{hx} \ u_{hy} \ u_{hz} \ u'_{hx} \ u'_{hy} \ u'_{hz} \ \beta_{hx} \ \beta_{hy} \ \beta_{hz} \ \beta'_{hx} \ \beta'_{hy} \ \beta'_{hz}] \tag{4.2.3}$$

et

$${}^tF = [p_x \ p_y \ p_z \ 0 \ 0 \ 0 \ m_x \ m_y \ m_z \ 0 \ 0 \ 0] \tag{4.2.4}$$

$${}^tG = [P_x \ P_y \ P_z \ 0 \ 0 \ 0 \ M_x \ M_y \ M_z \ 0 \ 0 \ 0] \tag{4.2.5}$$

$$[A_{IJ}] = \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ \hline & & & Ea & & & & \\ & & & & kGa & 0 & 0 & 0 & -kGa & \\ & & & & 0 & kGa & 0 & kGa & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & kGa & & kGa & 0 & \\ & & & & -kGa & 0 & 0 & 0 & kGa & \\ \hline & & & & & & & & C & \\ & & & & & & & & & EI_y \\ & & & & & & & & & & EI_z \end{array}\right] \qquad (4.2.6)$$

Les termes omis dans la matrice (4.2.6) sont nuls.

Mais avec les relations (4.1.2) et (4.1.6), il vient :

$$^{t}U_h = [DG_i(\vec{u}_h, \vec{\beta}_h)]_{1\times12}\ [LAMBD_i]_{12\times12} \qquad (4.2.7)$$

avec

$$\left.\begin{array}{l}[DG_i(\vec{u}_h, \vec{\beta}_h)]_{1\times12} = [DL_{1i}(u_{hx})\ DL_{1i}(u_{hy})\ DL_{1i}(u_{hz}) \\ \qquad\qquad DL_{1i}(\beta_{hx})\ DL_{1i}(\beta_{hy})\ DL_{1i}(\beta_{hz})]\end{array}\right\} \qquad (4.2.8)$$

et

$$[LAMBD_i] = \begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Dès lors, on peut écrire

$$a[(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h) \; ; \; (\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)] = \sum_{i=1}^{M} [DG_i(\vec{u}_h,\vec{\beta}_h)]_{1\times 12} \; [K_i]_{12\times 12} \; {}^t[DG_i(\vec{v}_h,\vec{\theta}_h)]$$

avec

$$[K_i] = \int_{a_{i-1}}^{a_i} [LAMBD_i] \; [A_{IJ}] \; {}^t[LAMBD_i] \; dx$$

soit

$$[K_i] = \begin{bmatrix} \frac{Ea}{\ell_i} & -\frac{Ea}{\ell_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{Ea}{\ell_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{kGa}{\ell_i} & -\frac{kGa}{\ell_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}kGa & \frac{1}{2}kGa \\ & & & \frac{kGa}{\ell_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}kGa & -\frac{1}{2}kGa \\ & & & & \frac{kGa}{\ell_i} & -\frac{kGa}{\ell_i} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}kGa & -\frac{1}{2}kGa & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{kGa}{\ell_i} & 0 & 0 & +\frac{1}{2}kGa & +\frac{1}{2}kGa & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{C}{\ell_i} & -\frac{C}{\ell_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & & & & \frac{C}{\ell_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & A_y & B_y & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & A_y & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & A_z & B_z \end{bmatrix}$$

et

$$A_y = \frac{1}{3}kG\alpha\,\ell_i + \frac{EI_y}{\ell_i} \qquad A_z = \frac{1}{3}kG\alpha\,\ell_i + \frac{EI_z}{\ell_i}$$

$$B_y = \frac{1}{6}kG\alpha\,\ell_i - \frac{EI_y}{\ell_i} \qquad B_z = \frac{1}{6}kG\alpha\,\ell_i - \frac{EI_z}{\ell_i}$$

Remarque 4.2.1 : Par analogie, on formerait les matrices élémentaires associées à des interpolations utilisant les éléments finis de types (2) et (3)-Lagrange.

□

Remarque 4.2.2 : Naturellement, le passage au cas où l'on utilise des techniques d'intégration numérique est immédiat (voir section 3.2.2).

□

4.3. Modules "fonctionnelle d'énergie" et "second membre" dans le cas où les effets de cisaillement sont négligés

Rappelons que dans ce cas on ne prend pas en compte le cisaillement ce qui conduit à approcher les composantes u_{hy} et u_{hz} dans l'espace $\tilde{V}_h$ associé à des éléments finis de type P3-Hermite. Ici encore, on se limite au cas d'intégrations exactes. Les relations (3.3.2) et (3.3.3) permettent d'écrire :

$$a[(\vec{u}_h,\beta_{hx}) \; ; \; (\vec{v}_h,\theta_{hx})] = \sum_{i=1}^{M} \int_{a_{i-1}}^{a_i} {}^tU_h[B_{IJ}]\, V_h \, dx \qquad (4.3.1)$$

$$f[(\vec{v}_h;\theta_{hx})] = \sum_{i=1}^{M} \int_{a_{i-1}}^{a_i} {}^tFV_h \, dx + {}^tG(B)\, V_h(B) \qquad (4.3.2)$$

avec

$${}^tU_h = [u_{hx}\; u_{hy}\; u_{hz}\; u'_{hx}\; u'_{hy}\; u'_{hz}\; u''_{hy}\; u''_{hz}\; \beta_{hx}\; \beta'_{hx}] \qquad (4.3.3)$$

et

$${}^tF = [p_x\; p_y\; p_z\; 0\; m_z\; -m_y\; 0\; 0\; m_x\; 0] \qquad (4.3.4)$$

$${}^tG = [P_x\; P_y\; P_z\; 0\; M_z\; -M_y\; 0\; 0\; M_x\; 0] \qquad (4.3.5)$$

$$[B_{IJ}] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & & Ea & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & & EI_z & & & & \\ & & & & & & & EI_y & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & C & \end{bmatrix} \qquad (4.3.6)$$

Avec les relations (4.1.2) (4.1.6) d'une part, (4.1.13) (4.1.15) et (4.1.17) d'autre part, il vient :

$$^{t}U_h = [DL_i(\vec{u}_h, \beta_{hx})]_{1\times12}\ [LAMBD_i]_{12\times10} \qquad (4.3.7)$$

avec

$$[DL_i(\vec{u}_h, \beta_{hx})]_{1\times12} = [DL_1(u_{hx})\ DL_H(u_{hy})\ LD_H(u_{hz})\ DL_1(\beta_{hx})] \qquad (4.3.8)$$

et

$$[LAMBD_i] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda H & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda H & 0 & d_{xx_i}\lambda H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda H & 0 & 0 & d_{x_i}\lambda H & 0 & d_{xx_i}\lambda H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 1 & d_{x_i}\lambda 1 \end{bmatrix} \qquad (4.3.9)$$

Pour assembler les diverses matrices de rigidité élémentaires, il sera commode d'utiliser en (4.3.7) et (4.3.8) des degrés de liberté *globaux*. Avec (4.1.19) et (4.1.20) il vient

$$[DL_i(\vec{u}_h, \beta_{hx})]_{1\times12} = [DG_i(\vec{u}_h, \beta_{hx})]_{1\times12}\ [D_i]_{12\times12}$$

où la matrice *diagonale* $[D_i]$ est donnée par

$$[D_i]_{12\times12} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \ell_i\ \ -\ell_i\ \ 1\ \ 1\ \ \ell_i\ \ -\ell_i\ \ 1\ \ 1]$$

et

$$[DG_i(\vec{u}_h,\beta_{hx})]_{1\times12} = [DL_{1i}(u_{hx})\ DG_{Hi}(u_{hy})\ DG_{Hi}(u_{hz})\ DL_{1i}(\beta_{hx})]\ .$$

Dès lors, on peut écrire

$$a[(\vec{u}_h,\beta_{hx})\ ;\ (\vec{v}_h,\theta_{hx})] = \sum_{i=1}^{M} [DG_i(\vec{u}_h,\beta_{hx})]_{1\times12}\ [K_i]_{12\times12}\ {}^t[DG_i(\vec{v}_h,\theta_{hx})]_{12\times1}$$

avec

$$[K_i] = [D_i] \int_{a_{i-1}}^{a_i} [LAMBD_i]\ [B_{IJ}]\ {}^t[LAMBD_i]\ dx\ {}^t[D_i]\ .$$

On trouve finalement

$$[K_i]=\frac{1}{\ell_i}\begin{array}{c}\begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_1' & v_2' & w_1 & w_2 & w_1' & w_2' & \theta_{x1} & \theta_{x2} \end{matrix}\\ \begin{bmatrix}
E\mathcal{a} & & & & & & & & & & & \\
-E\mathcal{a} & E\mathcal{a} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_z}{\ell_i^2} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_z}{\ell_i^2} & \frac{12EI_z}{\ell_i^2} & & & \text{Sym} & & & & & \\
0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell_i} & \frac{-6EI_z}{\ell_i} & 4EI_z & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{+6EI_z}{\ell_i} & \frac{-6EI_z}{\ell_i} & 2EI_z & 4EI_z & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell_i^2} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{\ell_i^2} & \frac{12EI_y}{\ell_i^2} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{+6EI_y}{\ell_i} & \frac{-6EI_y}{\ell_i} & 4EI_y & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{+6EI_y}{\ell_i} & \frac{-6EI_y}{\ell_i} & 2EI_y & 4EI_y & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & C
\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix} u_1\\ u_2\\ v_1\\ v_2\\ v_1'\\ v_2'\\ w_1\\ w_2\\ w_1'\\ w_2'\\ \theta_{x1}\\ \theta_{x2}\end{matrix}$$

Remarque 4.3.1 : Il s'agit-là de l'implémentation du cas où l'on utilise des éléments finis de type (1)-Lagrange avec les éléments finis de type 3-Hermite. Si l'on remplace les éléments finis de type (1)-Lagrange par des éléments finis de type (2) ou (3) Lagrange, l'implémentation est tout à fait similaire.

□

Remarque 4.3.2 : Naturellement, le passage au cas où l'on utilise des techniques d'intégration numérique est immédiat (voir section 3.3.2).

□

BIBLIOGRAPHIE

BATHE, K.J. [1982] : *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

BERNADOU, M. [1980] : Convergence of conforming finite element methods for general shell problems, *Internat. J. Engng. Sci., 18*, pp. 249-276.

BERNADOU, M. [1987] : Formulation variationnelle, approximation et implémentation de problèmes de barres et de poutres bi et tri-dimensionnelles. Partie B : Barres et poutres bidimensionnelles. Rapport Technique INRIA (A paraître).

BERNADOU, M. - BOISSERIE, J.M. [1982] : *The Finite Element Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations*. Birkhaüser, Boston.

CIARLET, P.G. [1978] : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.

COMPE, C. - GEORGE, P.L. - ROUSSELET, B. - VIDRASCU, M. [1986] : Les éléments de poutre en élasticité linéaire de la bibliothèque MODULEF. Rapport de Recherche INRIA n° 562.

COMPE, C. - MICHAUX, O. - MULLER, B. [1986] : Un préprocesseur et un logiciel de résolution sur Mac Intosh pour des problèmes de structure de poutre en dimension deux. Rapport Technique INRIA n° 74.

CRISFIELD, M.A. [1986] : *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis, Vol. 1 : Linear Analysis.* Pineridge Press, Swansea, U.K.

LANDAU, L. - LIFCHITZ, E. [1967] : *Théorie de l'Elasticité*, Editions MIR, Moscou.

WEMPNER, G. [1981] : *Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn.