

# Evaluation des files d'attente en station pour le protocole Aloha

Philippe Jacquet

► **To cite this version:**

Philippe Jacquet. Evaluation des files d'attente en station pour le protocole Aloha. RR-0698, INRIA. 1987. <inria-00075855>

**HAL Id: inria-00075855**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075855>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITE DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tel. (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 698

### **EVALUATION DES FILES D'ATTENTE EN STATION POUR LE PROTOCOLE ALOHA.**

**Philippe JACQUET**

**JUILLET 1987**

# EVALUATION DES FILES D'ATTENTE EN STATION POUR LE PROTOCOLE ALOHA.

*Philippe Jacquet*  
INRIA-Rocquencourt  
(FRANCE)

## Résumé

*Nous étudions différentes versions du protocole Aloha. Nous adoptons l'hypothèse d'un trafic poissonien uniformément répartie sur une population large, mais finie, de stations identiques. Chaque station est modélisée comme une file d'attente de capacité infinie avec un seul serveur. Notre propos est d'évaluer les phénomènes de files d'attente aux stations quand le nombre  $N$  de stations croît indéfiniment pour une charge cumulée égale  $\lambda$ . Les protocoles considérés sont Aloha standard, Aloha à arrivées libres et Aloha sous contrôle Rivest. Nous terminons par quelques remarques sur les distributions asymétriques de trafic. Une annexe numérique (avec des courbes) est donnée*

# THE EVALUATION OF QUEUEING PHENOMENA IN ALOHA SYSTEMS.

*Philippe Jacquet*  
INRIA-Rocquencourt  
(FRANCE)

## Abstract

*We analyze different versions of the ALOHA protocol. Our model consists in a Poisson symmetric traffic on a large, but finite, population of identical stations. We consider each station as a queue with single server and infinite buffer. Our purpose is the evaluation queueing phenomena when the number  $N$  of stations tends to infinity with a finite cumulated load  $\lambda$ . We evaluate standard ALOHA, free access ALOHA and Rivest-ALOHA. We finally give some remarks about asymmetric case. At the end of the note, we provide a graphic appendix.*

# EVALUATION DES FILES D'ATTENTE EN STATION POUR LE PROTOCOLE ALOHA.

*Philippe Jacquet*  
INRIA-Rocquencourt  
(FRANCE)

## Résumé

*Nous étudions différentes versions du protocole Aloha. Nous adoptons l'hypothèse d'un trafic poissonien uniformément répartie sur une population large, mais finie, de stations identiques. Chaque station est modélisée comme une file d'attente de capacité infinie avec un seul serveur. Notre propos est d'évaluer les phénomènes de files d'attente aux stations quand le nombre  $N$  de stations croît indéfiniment pour une charge cumulée égale  $\lambda$ . Les protocoles considérés sont Aloha standard, Aloha à arrivées libres et Aloha sous contrôle Rivest. Nous terminons par quelques remarques sur les distributions asymétriques de trafic. Une annexe numérique (avec des courbes) est donnée*

## I. Introduction: modèle de réseau et protocole Aloha

Dans cette note nous étudions un canal à accès multiple sur lequel est connectées  $N$  stations. On pose l'hypothèse du canal sloté et du feedback ternaire (blanc, succès, collision) [1]. Pour communiquer entre elles les stations appliquent le protocole de communication Aloha [2] dont on rappelle brièvement les modalités.

Une station qui a un message à transmettre tire à *pile ou face* à chaque slot. Quand elle a juste tiré face elle transmet son message sur le slot courant. Si son message passe, tant mieux, et elle peut se mettre en attente pour son prochain message. Si son message ne passe pas (collision), elle garde le message et recommence la procédure avec tirage à pile ou face jusqu'à ce que le message passe effectivement.

On suppose que les tirages à pile ou face se font pour toutes les stations avec avec la même probabilité  $P$ , appelée *probabilité de retransmission*.

$$\text{pr}(\text{face}) = P$$

et on a, bien sûr,  $0 < P < 1$ .

On fait l'hypothèse que toutes les stations sont identiques et qu'elles peuvent être considérées chacune comme une file d'attente à serveur unique. Les messages en attente, qui ont été générés au niveau de la station, sont stockés dans la file d'attente. Le serveur, ou coupleur, modélise l'interface physique avec le canal. Il sert les messages les uns après les autres, dans un ordre arbitraire ou optimisé qui ne nous importe pas dans le cadre de cette note [3]. Un service consiste pour le coupleur à prendre en charge un message jusqu'à ce que ce dernier soit passé avec succès sur le canal. Le service ne peut pas subir de préemption : le coupleur doit terminer son service avant d'en commencer un autre.

On suppose la loi de generation de message au niveau des stations comme étant de Poisson de charge cumulée  $\lambda$  messages par slot, uniformément repartit sur toute les stations (trafic poissonien symétrique [4]).

Le système est donc entièrement décrit par les trois paramètres :  $\lambda$ ,  $N$  et  $P$ .

## II. Processus markovien, principe de l'analyse

On sait analyser le système d'une manière exacte quand  $N = 2$  [5]. Dans l'état actuel des connaissances une analyse exacte pour  $N > 2$  n'est guère envisageable. Pour palier à cette difficulté on va procéder d'une manière approchée.

On suppose dans ce qui suit que  $N$  est très grand, voire asymptotiquement infini. Quand  $N = \infty$ , on sait que le protocole Aloha est intrassablement instable [6]; dans le cas fini on peut s'attendre à ce que les délais moyens subis par les messages soient  $O(N)$ . Donc, le cas échéant, on réajustera l'échelle de temps en conséquence. De même on procède à l'ajustement de la probabilité de retransmission

$$P = \frac{p}{N}$$

la quantité  $p$  étant fixée indépendamment de  $N$ . Le système est donc asymptotiquement décrit par les deux paramètres  $p$  et  $\lambda$ .

Nous décrivons l'espace d'états du processus markovien de la manière suivante. A l'instant  $t$  l'état du système est décrit par la suite

$$(q_0(t), q_1(t), \dots, q_n(t), \dots)$$

où  $q_n(t)$  a pour valeur la proportion de stations avec une file d'attente (message en service compris) de longueur  $n$ . Cette suite est donc un état du processus markovien; sa connaissance suffit pour évaluer, d'une manière probabiliste, l'évolution ultérieure du système. A la place de la suite, on peut introduire d'une manière équivalente la série génératrice  $q(t, z)$ , avec variable complexe  $z$ ,

$$q(t, z) = \sum_n q_n(t) z^n .$$

**Theorème :** Quand  $N = \infty$  et  $\lambda < pe^{-p}$ , on a convergence vers un état stationnaire  $(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ , ou une série génératrice stationnaire  $r(z)$ ; c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(t) = r_n$$

ou bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t, z) = r(z) ,$$

avec

$$r(z) = \frac{1-x}{1-xz} ,$$

le paramètre  $x$  étant la solution comprise entre 0 et 1 de l'équation

$$pxe^{-px} = \lambda .$$

Si  $\lambda > pe^{-p}$  alors le processus markovien est divergent et le réseau est instable.

Le libellé de ce théorème mérite quelques explications. Quand  $N$  est fixé, la distribution stationnaire du système est d'une manière générale une mesure positive  $\mu_N(q)$  sur tout l'espace des suites ou séries génératrices  $q$ . Le théorème ne veut signifier que le fait que la suite de mesures stationnaires  $\mu_N$  converge, au sens des distributions, vers la mesure de Dirac au point  $r$  quand  $N$  croît indéfiniment:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = \delta_r .$$

Le lecteur averti aura reconnu dans l'expression de  $r(z)$  la série génératrice de la distribution stationnaire d'une population soumise à un taux de naissance sur mortalité aléatoire de  $x$ .

Pour des raisons de symétrie, il est aussi évident que  $r(z)$  décrira la série génératrice de la longueur de la file d'attente dans une station aléatoire. Cette constatation nous permettra de dériver la distribution du délai pour un message aléatoire.

### III. Preuve par la Loi des Grands Nombres

Notre objectif initial consiste à examiner le comportement de la transition markovienne entre  $q(t, z)$  et  $q(t + Ndt, z)$  quand  $N \rightarrow \infty$  et  $dt \rightarrow 0$  (mais pas trop cependant, afin que  $Ndt \rightarrow \infty$ ).

A l'instant  $t$ , le nombre de stations actives (ayant au moins un message en attente) est  $N(1 - q_0(t))$ . Appelons  $x = 1 - q_0$ . Soit  $k$  un entier quelconque; la probabilité pour qu'au slot  $t$  exactement  $k$  stations tirent *face* et ainsi tentent une transmission est

$$\binom{Nx}{k} \left(\frac{p}{N}\right)^k \left(1 - \frac{p}{N}\right)^{N-k}.$$

Quand  $N \rightarrow \infty$  cette probabilité converge vers

$$\frac{(px)^k}{k!} e^{-px}$$

qui correspond à une distribution de Poisson de paramètre  $px$ , d'après la loi des grands nombres. On peut considérer  $px$  comme une sorte de *charge offerte*.

La quantité  $dt$  étant petite, la distribution  $q(t, z)$  ne change guère entre  $t$  et  $t + Ndt$ . En conséquence, entre  $t$  et  $t + Ndt$ , la loi des tentatives d'émission sur les slots reste de Poisson de paramètre  $px$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \text{pr}(\text{blanc}) &= e^{-px} \\ \text{pr}(\text{succès}) &= px e^{-px} \\ \text{pr}(\text{collision}) &= 1 - e^{-px} - px e^{-px}. \end{aligned}$$

De cet état probabiliste des slots on déduit que le débit du canal est de  $px e^{-px}$ . Donc, entre  $t$  et  $t + Ndt$ , il y a  $px e^{-px} Ndt$  stations actives qui perdent un message (c'est à dire parvient à le passer avec succès), selon la loi des grands nombres. Dans le même temps, compte tenu des arrivées poissoniennes sur chacune des stations, il y a  $\lambda Ndt$  stations qui gagnent un nouveau message.

Pour être plus précis, la loi des grands nombres nous dicte que le nombre de messages passés entre  $t$  et  $t + Ndt$  est  $Npx e^{-px} dt + O(\sqrt{Ndt})$  et le nombre de nouveaux messages générés est  $\lambda Ndt + O(\sqrt{Ndt})$ .

Il advient donc, selon ce qui précède, que la transition entre  $t$  et  $t + Ndt$  est déterministe en ce sens que, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,  $q(t + Ndt, z)$  tend à être une fonction de  $q(t, z)$ :

$$q(t + Ndt, z) = q(t, z) + \overbrace{\lambda q(t, z)(z-1)dt}^{\text{nouvelles arrivées}} + \underbrace{p(q(z, t) - q(t, 0)) e^{-px} \left(\frac{1}{z} - 1\right) dt}_{\text{sortie de messages}} + O(dt, z).$$

Si on applique à l'échelle temporelle l'homothétie de rapport  $N$ , on obtient, en faisant tendre  $dt$  vers 0, l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, z) = \left(q(t, z) - q(t, 0)\right) \left(\frac{1}{z} - 1\right) p e^{-p(1-q(t, 0))} + q(t, z)(z-1)\lambda.$$

**Corollaire :** L'état stationnaire du système vérifie  $\frac{\partial}{\partial t} q(t, z) = 0$ , donc c'est une des racines de l'équation d'équilibre

$$\left(r(z) - r(0)\right) \left(\frac{1}{z} - 1\right) p e^{-p(1-r(0))} + r(z)(z-1)\lambda = 0.$$

De plus en résolvant l'équation différentielle complète on peut décrire la phase transitoire du réseau, avant qu'il atteigne son état d'équilibre.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation d'équilibre. Pour ce faire, il faut déjà remarquer qu'elle correspond à l'équation d'équilibre de la distribution d'une population soumise à un taux de naissance  $\lambda$  et à un taux de mortalité  $pe^{-p(1-r(0))}$ . Donc le fait de trouver  $r(z)$  est équivalent au fait de trouver ce taux de mortalité. En divisant l'équation d'équilibre par  $z - 1$  et en faisant  $z = 1$  on établit l'équation simple

$$p(1 - r(0))e^{-p(1-r(0))} = \lambda$$

que l'on peut exprimer par  $ye^{-y} = \lambda$  en posant  $1 - r(0) = y/p$ , (donc  $0 \leq y \leq p$ ).

Si  $p \leq 1$  alors l'équation précédente n'a qu'une seule racine et le problème est résolu.

Si  $p > 1$ , mais  $\lambda < pe^{-p}$ , il n'y a toujours qu'une seule solution et tout va bien.

Un problème se pose quand  $p > 1$  et  $pe^{-p} < \lambda < e^{-1}$ . En effet dans ce cas là, l'équation  $ye^{-y} = \lambda$  a deux racines  $y_1$  et  $y_2$ , numérotées ainsi dans l'ordre croissant. Or il n'y a qu'un seul état stationnaire et il faut donc lever l'ambiguïté.

**Proposition :** Quand  $p > 1$  et  $pe^{-p} < \lambda < e^{-1}$  le système est asymptotiquement divergent.

**Preuve :** Dans un premier temps remarquons que  $y_1$  correspond à un état d'équilibre stable tandis que  $y_2$  correspond à un état d'équilibre instable (*metastable*).

En effet, si on déplace  $y$  légèrement à droite de  $y_1$ , c'est à dire si on diminue légèrement  $q(0, t)$ , alors le débit de sortie du canal  $ye^{-y}$  sera légèrement supérieur à  $\lambda$ . Dans ce cas on peut s'attendre, d'une manière empirique, à ce que le nombre de stations actives diminue, c'est à dire que  $q(t, 0)$  augmente et ramène  $y$  sur sa position d'équilibre. On peut faire le même raisonnement à gauche de  $y_1$ : si  $q(t, 0)$  augmente alors le débit du canal diminuera par rapport au débit d'entrée et ceci aura pour conséquence une diminution compensatrice de  $q(t, 0)$ . Donc la racine  $y_1$  correspond à un état d'équilibre stable.

En revanche on constate le phénomène inverse sur  $y_2$ . Si on écarte  $q(t, 0)$  de sa position d'équilibre, le différentiel entre le débit de sortie du canal et le débit d'entrée aux stations aura maintenant pour conséquence d'aggraver l'écart perturbateur. Donc la racine  $y_2$  correspond à un état d'équilibre instable.

Parvenu à ce point de la réflexion on serait tenté de déclarer  $y_1$  racine de l'équation d'équilibre correspondant à l'état stationnaire limite. Malheureusement si on pousse le raisonnement précédent on constate que si on perturbe  $y_2$  sur la gauche alors le système va se déplacer jusqu'à sa position stable  $y_1$ . Par contre si on perturbe  $y_2$  sur la droite, alors le système va progresser jusqu'à atteindre  $y = p$  (ou  $q(t, 0) = 0$ ) qui se révèle, à la lumière de ce qui précède, être une sorte de point limite absorbant.

La proposition est donc démontrée. Le système est bien divergent mais on peut raffiner l'analyse: il existe deux positions metastables avant d'atteindre le point limite absorbant. Le premier ( $y_1$ ) est quasi-stable; une étude par les *larges déviations* [7] montrerait que le temps moyen pour sortir de cet état est de l'ordre de  $\exp(O(N))$ . Le deuxième ( $y_2$ ) est très instable avec un temps moyen de sortie de l'ordre de  $O(N^2)$  (excursion à partir du deuxième ordre).

**Corollaire :** Le débit maximal du système stable est celui que l'on aurait avec toutes les files d'attente saturées (quand  $q(t, 0) = 0$  en l'occurrence).

#### IV. Analyse du protocole Aloha à arrivées libres

Au protocole Aloha on introduit la modification suivante. Quand le coupleur entame un nouveau service, il émet immédiatement le nouveau message sur le slot courant sans tenter de tirage à pile ou face. Donc pour chaque message la première tentative d'émission est immédiate.

**Theorème :** Le débit maximal pour lequel le réseau est stable sous le protocole Aloha à arrivées libres est

$$\lambda_{\max} = \frac{pe^{-p}}{1 - e^{-p} + pe^{-p}} .$$

Lorsque  $p \rightarrow 0$  alors  $\lambda_{\max} \rightarrow \frac{1}{2}$ .

**Preuve :** Nous allons supposer que toutes les stations sont saturées, et nous allons examiner l'état stationnaire d'un tel système vis à vis du canal. Pour un slot aléatoire nous introduisons la probabilité  $X_1$  qu'il y ait un message émis pour la première fois.  $X_0 = 1 - X_1$  est la probabilité de l'évènement contraire.

Comme les stations sont saturées, chaque message a ou a eu un prédécesseur dans sa file d'attente. Donc si un message est à sa première tentative d'émission au slot  $i$ , c'est que son prédécesseur est passé avec succès sur le slot  $i - 1$ . Donc chaque sortie correspond, au slot suivant, à la première émission d'un nouveau message. On a donc l'égalité formelle:

$$\lambda = X_1 .$$

Le débit du canal peut être calculé d'une autre manière. La charge offerte sur le canal est  $p$  (toutes les stations sont actives). La probabilité de succès sur un slot aléatoire est donc  $pe^{-p}$ , si il n'existe pas, sur le slot en question, de message en première tentative. Elle est de  $e^{-p}$  si il y a une première tentative. Ce qui nous amène à la formule:

$$\lambda = X_0pe^{-p} + X_1e^{-p} .$$

Cette dernière formule, rapprochée avec la précédente, permet d'exprimer  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_{\max} = \frac{pe^{-p}}{1 - e^{-p} + pe^{-p}} .$$

On remarque que lorsque  $p = 1$ ,  $\lambda_{\max} = e^{-1}$ . Quand  $p > 1$ ,  $\lambda_{\max} < pe^{-p}$ . Quand  $p < 1$ , alors  $\lambda_{\max} > pe^{-p}$ . Le protocole à arrivées libres est donc moins bon que le protocole standard quand  $p > 1$ , et est cependant meilleur quand  $p < 1$ . Pour  $p$  petit on a le développement suivant

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}p + O(p^2) .$$

On peut brièvement passer en revue la méthode analytique pour déduire l'état stationnaire du système quand  $\lambda < \lambda_{\max}$ . Appelons toujours  $X_1$  la probabilité, pour un slot aléatoire, de voir la première tentative d'un message qui avait un prédécesseur en file.  $X_0$  est la probabilité de l'évènement complémentaire ( $X_0 + X_1 = 1$ ). En raison de l'accès immédiat au canal des messages qui viennent juste d'être générés sur des sites inactifs, la charge offerte a maintenant pour expression

$$y = px + \lambda(1 - x) ,$$

avec  $x = q(t, 0)$ .

**Theorème :** On a tout d'abord les relations

$$X_1 = \lambda x ,$$

et

$$\lambda = X_1e^{-y} + X_0ye^{-y}$$

ce qui permet de calculer numériquement  $x$  et  $X_1$  en fonction de  $\lambda$  et  $p$ . Quand un message est pris en charge par le coupleur, en ce qui concerne la statistique du délai de service, il y a lieu de distinguer si le message avait un prédécesseur ou non. Soit  $\beta_1^*(s)$  la transformée de Laplace-Stieljes de la distribution du délai de service quand le message avait un prédécesseur et soit  $\beta_0^*(s)$  la transformée de Laplace-Stieljes du service dans le cas contraire. On a les formules suivantes

$$\beta_1^*(s) = e^{-y} + \frac{1 - e^{-y}}{1 + \mu s} ,$$



$$\beta_0^*(s) = X_0 e^{-y} + \frac{1 - X_0 e^{-y}}{1 + \mu s},$$

avec  $\mu = pX_0 e^{-y}$ . On en déduit la transformée de Laplace-Stieljes  $W^*(s)$  de l'attente en file d'un message aléatoire, définie par

$$W^*(s) = \int_0^\infty \text{pr}(\text{attente} \in [Nx, N(x+dx)]) e^{-xs},$$

et qui a pour expression

$$W^*(s) = \frac{\mu e^y - \lambda}{\mu e^y + \lambda X_1} \left( \frac{s + \lambda(\beta_1^*(s) - \beta_0^*(s))}{s - \lambda(1 - \beta_1^*(s))} \right).$$

**Peuve :** Remarquons tout d'abord que l'expression de la transformée de Laplace-Stieljes du délai de service a une signification probabiliste simple. Un message, à sa première tentative, a une probabilité  $e^{-y}$  si il a un prédecesseur, ou une probabilité  $X_0 e^{-y}$  dans le cas contraire, de passer avec un délai nul (a cause de l'accès immédiat pour la première tentative). En cas d'échec le temps de service est de Poisson de paramètre  $\mu$  comme c'est le cas pour le protocole standard, avec la différence maintenant que la probabilité de tirer face et de tomber sur un slot libre est  $\mu = pX_0 e^{-y}$ .

Les deux égalités  $X_1 = \lambda x$  et  $\lambda = (X_1 + yX_0)e^{-y}$  signifient, pour la première, que  $X_1/\lambda$  est la probabilité pour un message nouvellement généré de trouver sa file non vide, pour la seconde, que le débit d'entrée est égal au débit de sortie.

## V. Analyse du protocole Aloha-Rivest

Dans cette section nous nous proposons d'analyser les phénomènes de file d'attente dans le cas du protocole Rivest à arrivées libres. Le protocole Aloha-Rivest [8] est une version contrôlée du protocole Aloha dans lequel est opéré un réajustement dynamique de la probabilité de retransmission en fonction du feedback du canal. Ce contrôle assure au protocole une stabilité avec des délais finis même quand la population est virtuellement infinie ( $N = \infty$ ), du moment que  $\lambda < e^{-1}$  [9].

Cette propriété, appelée *transparence canal* [10], fait en sorte que le canal est, d'une manière probabiliste, équivalent à un réseau complet point à point où les délais d'accès et d'acheminement sont indépendants du nombre total de nœuds. Une des conséquences remarquable de cette propriété est que les phénomènes de file d'attente tendent à disparaître complètement quand la population des stations augmente. Donc le premier résultat que l'on peut énoncer tout de suite est qu'il n'y a pas de file d'attente aux stations pour le protocole Rivest quand  $N = \infty$  et  $\lambda < e^{-1}$ . On rappelle que ce n'est pas le cas pour les précédentes versions du protocole Aloha qui induisent des files d'attente quelque soit  $p$  et  $\lambda$ .

Nous rappelons brièvement la procédure de contrôle. En cas de *collision* on opère le réajustement suivant

$$\frac{1}{P} \leftarrow \frac{1}{P} + \frac{1}{e-2} + \frac{1}{e}.$$

En cas de non collision (*blanc, succès*):

$$\frac{1}{P} \leftarrow \max\left\{ \frac{1}{P} - 1 + \frac{1}{e}, \frac{1}{P_{\max}} \right\}.$$

$P_{\max}$  est une constante arbitraire du réseau choisie dans  $]0, 1[$ . On voit que le principe des réajustements est de considérer  $1/P$  comme une estimation grossière du nombre de stations bloquées, sachant que si  $P$  est trop grand il y aura trop de collisions et que si, à l'inverse,  $P$  est trop petit il y aura trop de blancs.

**Theoreme :** Le protocole de Rivest à arrivées libres admet une zone de stabilité quand  $e^{-1} < \lambda < 0.420692$  ( $e^{-1} = 0.367879$ ) où des files d'attente coexistent. L'état stationnaire est défini d'une manière similaire au

protocole Aloha à arrivées libres à la différence que  $p$  est aussi une variable à déterminer. La charge offerte étant toujours  $y = \lambda(1 - x) + px$ , on a maintenant trois équations:

$$X_1 = \lambda x$$

$$\lambda = (X_1 + X_0 y) e^{-y}$$

et

$$(1 + X_0 y) e^{-y} = 2e^{-1},$$

dont la résolution permet d'exprimer  $p$ ,  $X_1$  et  $x$  en fonction de  $\lambda$ . Les expressions des transformées de Laplace-Stieltjes des distributions des délais de service et d'attente restent identiques au cas du protocole Aloha à arrivées libres sans contrôle.

**Preuve :** Le point important de la preuve de ce théorème consiste à remarquer que lorsque des files d'attente se forment le nombre de stations bloquées tend à ne plus être négligeable par rapport à  $N$  (comme cela serait le cas en transparence canal). En conséquence, le processus de réajustement va tendre à donner à  $P$  une valeur suffisamment petite afin que  $p = PN$  soit constant. Reste donc à déterminer  $p$  avec précision. La solution consiste à remarquer que l'évolution dynamique de  $p$  s'arrête quand on a atteint un état stationnaire où l'état probabiliste des slots est

$$\text{pr}(\text{non collision}) = \frac{2}{e}$$

$$\text{pr}(\text{collision}) = 1 - \frac{2}{e}.$$

C'est à dire l'état probabiliste qu'on aurait si à chaque slot le canal était soumis à des tentatives d'émission suivant une loi de Poisson de taux 1. Pour le protocole Aloha à arrivées libres on sait que la probabilité d'une non collision est  $(1 + X_0 y) e^{-y}$ , ce qui justifie la troisième équation. À saturation, on a vu que la charge offerte est  $y = p$  et que  $X_1 = \lambda_{\max}$ . Donc à saturation cette équation devient

$$\frac{(1 + p - e^{-p}) e^{-p}}{1 - e^{-p} + p e^{-p}} = \frac{2}{e},$$

dont la résolution donne  $p = 0.609049$  et  $\lambda_{\max} = 0.420692$ . Les deux premières équations sont directement issues de l'analyse du protocole à arrivées libres et  $p$  fixé.

### Quelques remarques au sujet du domaine d'ergodicité dans le cas asymétrique

Dans ce qui précède nous nous sommes cantonnés à étudier des distributions de trafic uniformes sur l'ensemble des stations. Dans ce qui suit on essaye d'aborder les cas où les trafics sont asymétriques.

Dans un premier temps, on va explorer le problème où la population totale de stations est divisée en  $m$  sous-populations de stations identiques d'effectifs respectifs  $N_1, N_2, \dots, N_m$ .

$$N_1 + \dots + N_m = N.$$

Dans chacune des sous-populations, chaque station est soumise à un même taux d'arrivée poissonien, à savoir  $\frac{\lambda_i}{N}$  dans la sous-population  $i$ . Pour des raisons de commodités on effectue la normalisation

$$\sigma_i = \frac{N_i}{N}.$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i = 1$$

et

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i \lambda_i = \lambda .$$

On peut analyser complètement le système en introduisant les séries génératrices  $q^i(z)$  des longueurs respectives des files d'attente dans la sous population  $i$ . On va se contenter d'examiner  $x_i = 1 - q^i(0)$ , la proportion de stations actives dans la sous population  $i$ . On sait que la donnée de  $x_i$  suffira pour analyser complètement le système pour les protocoles considérés. La charge offerte est

$$y = p \sum_{i=1}^m \sigma_i x_i .$$

Donc, pour le protocole Aloha standard, on arrive à l'équation usuelle

$$\lambda = ye^{-y}$$

qui se subdivise en  $m$  sous équations

$$\lambda_i = px_i e^{-y} .$$

Evidemment il faut déjà considérer comme divergents les systèmes qui admettent deux solutions car, en vertu de l'étude de la section III, il y en a une des deux qui est instable et qui s'ouvre nécessairement sur un état limite absorbant. On sait que ce problème ne se pose que lorsque  $p > 1$ . La région d'ergodicité pour ce système, c'est à dire l'ensemble des vecteurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  pour lesquels le système est stable est l'image de  $[0, 1]^m$ , d'élément générique  $(x_1, \dots, x_m)$ , par la fonction

$$\lambda_i = px_i e^{-p \sum_j \sigma_j x_j} .$$

En fait il faut prendre soin d'éliminer de cette image les vecteurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  qui dominent des vecteurs limites absorbants  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ . On définit les vecteurs limites absorbants suivant une extension multi-dimensionnelle du raisonnement mono-dimensionnelle de la section III. Soit  $(x'_1, \dots, x'_m)$  les paramètres stationnaires de la distribution  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ . Elle est absorbante si il existe  $i$  tel que  $x'_i = 1$ .  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  domine  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$  si

$$\forall i : \lambda_i \geq \lambda'_i \text{ et } \lambda_i > \lambda'_i \Rightarrow x'_i = 1 .$$

L'étude est plus difficile pour le protocole Aloha à arrivées libres. La charge offerte a pour nouvelle expression

$$y = \sum_{i=1}^m \sigma_i (px_i + \lambda_i(1 - x_i)) .$$

Il faut faire intervenir une nouvelle inconnue  $X^i$ , telle que  $\sigma_i X^i$  soit la probabilité pour que le slot courant voit la première tentative d'un message de la sous population  $i$  ayant eu un prédécesseur en file (qui est donc passé au slot précédent). Donc la probabilité générale pour que le slot courant voit la première tentative d'un message, sans distinction de provenance, ayant eu un prédécesseur en file est

$$X_1 = \sum_{i=1}^m \sigma_i X^i ,$$

la somme étant possible, les événements évoqués par ces probabilités étant disjoints. Avec  $X_0 = 1 - X_1$ , on retrouve l'équation globale

$$\lambda = X_0 ye^{-y} + X_1 e^{-y} ,$$

qui se subdivise en  $m$  sous equations:

$$\lambda_i = (X_0 p x_i + X^i) e^{-y} ,$$

que l'on peut résoudre grace aux équations

$$X^i = \lambda_i x_i .$$

La region d'ergodicité est donc l'ensemble des vecteurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  chacun étant la solution du systeme d'equations

$$\lambda_i = \left( \left( 1 - \sum_j \sigma_j \lambda_j x_j \right) \left( \sum_j \sigma_j (p x_j + \lambda_j (1 - x_j)) \right) + \lambda_i x_i \right) e^{-\sum_j \sigma_j (p x_j + \lambda_j (1 - x_j))} ,$$

avec le vecteur de parametres  $(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m$ . Il faut évidemment éliminer les distributions qui dominent des distributions limites absorbantes car elles sont instables.

Aloha-Rivest s'analyse de la même manière avec  $p$  comme inconnue supplémentaire et une nouvelle équation

$$\left( 1 + y \left( 1 - \sum_j \sigma_j \lambda_j x_j \right) \right) e^{-y} = \frac{2}{e} .$$

Dans le cas général, on peut décrire l'état d'un système comme une mesure positive normalisée  $\sigma(x, \lambda)$  définie sur  $[0, 1] \times R^+$ . Normalisée signifie

$$\iint \sigma(x, \lambda) dx d\lambda = 1 .$$

Par exemple, dans ce qui précède on a

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i \delta_{(x_i, \lambda_i)}$$

où  $\delta_{(x_i, \lambda_i)}$  désigne la mesure de Dirac au point  $(x_i, \lambda_i)$ .

Pour le protocole Aloha standard la charge a pour expression

$$y = p \iint x \sigma(x, \lambda) dx d\lambda .$$

La généralisation du cas discret nous dicte qu'une mesure stationnaire a nécessairement son support inclu dans la demi droite

$$\lambda = (p e^{-y}) x .$$

Pour le protocole Aloha à arrivées libres la charge a pour expression

$$y = \iint (p x + (1 - x) \lambda) \sigma(x, \lambda) dx d\lambda .$$

La probabilité stationnaire pour ne pas avoir sur le slot courant la première tentative d'un message ayant eu un prédécesseur en file

$$X_0 = 1 - \iint x \lambda \sigma(x, \lambda) dx d\lambda .$$

Une mesure stationnaire vérifie  $X_0 \geq 0$  et a nécessairement son support inclu dans la branche d'hyperbole

$$\lambda = (p X_0 e^{-y}) x + (e^{-y}) x \lambda .$$

Même chose pour le protocole de Rivest mais avec une inconnue en plus,  $p$ . L'ambiguïté est levée par l'équation supplémentaire

$$(1 + y X_0) e^{-y} = \frac{2}{e} .$$

Si on permet, dans le cadre des protocoles Aloha sans contrôle, que les stations alignent des probabilités de retransmission différentes  $p$ , il suffit de rajouter une nouvelle dimension et considérer  $\sigma(x, \lambda, p)$  comme une mesure définie sur  $[0, 1] \times R^+ \times R^+$ . Pour Aloha standard la charge a pour expression

$$y = \iiint px\sigma(x, \lambda, p)dx d\lambda dp ,$$

et la mesure a nécessairement son support inclu sur la surface qui est le lieu des points  $(x, \lambda, p)$  vérifiant

$$\lambda = (e^{-y})px .$$

Pour Aloha à arrivées libres la charge a toujours pour expression

$$y = \iiint (px + (1-x)\lambda)\sigma(x, \lambda, p)dx d\lambda dp ,$$

$X_0$  est toujours

$$X_0 = 1 - \iiint x\lambda\sigma(x, \lambda, p)dx d\lambda dp ,$$

et le support de  $\sigma$  est sur la surface qui est le lieu des points  $(x, \lambda, p)$  vérifiant

$$\lambda = (X_0e^{-y})px + (e^{-y})x\lambda .$$

#### references :

- [1] J Massey, "Collision resolution algorithms and random access algorithms," in *Multi-User Communication Systems*, G. Longo, Ed., CISM Courses and Lecture Notes 265. New York: Springer-Verlag, 1981, pp 73-137.
- [2] N. Abramson, "The ALOHA System —Another alternative for computer communications," in *Proc. 1970 Fall Joint Computer Conf.*, AFIPS Press, vol 37, 1970, pp. 281-285.
- [3] P. Jacquet, S. Sédillot, "Evaluation tools for real-time message scheduling algorithms: Analytic Solver versus event-driven simulator," in *International workshop on modeling techniques and performance evaluation*, AFCET, Paris, 1987, pp. 25-41.
- [4] B.S. Tsybakov, "Survey of USSR contributions to random multiple-access communications," in *Special Issue on Random- Access Communications*, IEEE Trans. on Information Theory, vol. 31, 1985, pp.143-165.
- [5] P. Nain, "Analyse d'un protocole de type ALOHA," in *Application des méthodes analytiques a la modélisation des systèmes informatiques*, Thèse de Doctorat d'Etat es- sciences mathématiques, Université Paris 6, chapitre V, 1987.
- [6] G. Fayolle, E. Gelembe, J. Labetoulle, "Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel," *JACM*, vol 24, pp. 375-386, 1977.
- [7] A. Greenberg, A. Weiss, "An analysis of Aloha systems via large deviations," AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, Res. Rep., 1986.
- [8] R. Rivest, "Network control by Bayesian Broadcast," MIT, Mass., Res. Rep., 1985.

[9] F. Kelly, "Stochastic model of computer communication systems," University of Cambridge, England, 1984.

[10] P. Jacquet, P. Muhlethaler, "Lightnet: un protocole d'accès à haut débit pour bus unidirectionnel," INRIA, Res. Rep. 654, 1987.

## Appendice graphique

La figure ci-dessous donne la courbe des débits maximaux du protocole Aloha standart en fonction de la probabilité de retransmission  $p$ . A cette courbe a été rajoutés quelques éléments visuels qui permettent à la compréhension de la discussion au sujet des deux points d'équilibre du protocole Aloha quand  $\lambda_{\max} < \lambda < e^{-1}$ .

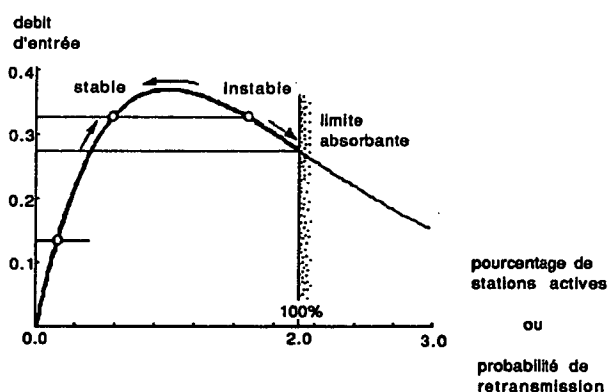


Figure 1.

La seconde figure, comme son intitulé l'indique, compare les performances en termes de débits maximaux des protocole Aloha standart et Aloha à arrivées libres.

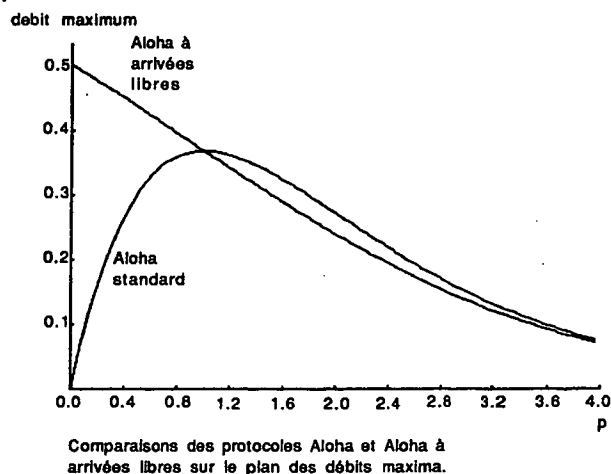


Figure 2.

On remarque que les deux protocoles admettent le même débit maximal  $e^{-1} = 0.367879$  quand  $p = 1$ . Néanmoins leur phénomènes respectifs de file d'attente différent. On constate, comme il est légitime de s'y attendre, que la stratégie de l'accès immédiat à la première tentative désengorge les files d'attente. La courbe ci-dessous, décrivant la proportion de stations actives (ayant au moins un message en attente, service compris) en fonction du taux d'arrivés  $\lambda$ , illustre d'une manière claire cet état de fait.

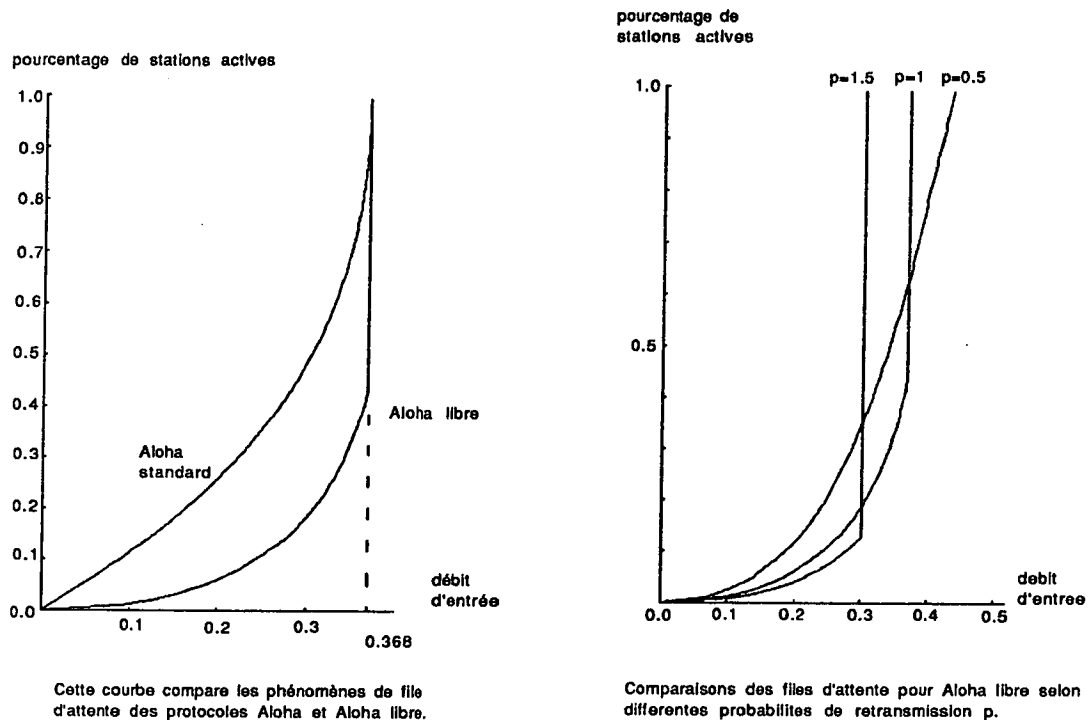


Figure 3 & 4.

Malheureusement cette propriété se dégrade quand on diminue  $p$  afin d'augmenter  $\lambda_{\max}$ . La figure 4 illustre le comportement des files d'attente en fonction de  $\lambda$  sur trois valeurs de  $p$ : 0.5, 1 et 1.5. On constate que plus le débit atteignable  $\lambda_{\max}$  est élevé plus les files d'attente s'engorgent à charge égale. Si  $p > 1$  alors le comportement en file s'améliore, à faible  $\lambda$ . En contrepartie, évidemment, la saturation arrive plus tôt.

La courbe suivante (figure 5) donne le comportement des files d'attente pour le protocole Aloha-Rivest pour  $e^{-1} < \lambda < 0.420692$ . Paradoxalement cette courbe est plus facile à calculer que la précédente qui a été déduite par résolution numérique d'équation non linéaire à une inconnue. Pour tracer cette nouvelle courbe, on remarque que la troisième équation

$$(1 + X_0)e^{-y} = \frac{2}{e}$$

permet de déduire  $X_1$  en fonction de  $y$ . La seconde équation

$$\lambda = (X_1 + yX_0)e^{-y}$$

donne  $\lambda$  et la première

$$X_1 = \lambda x$$

termine en offrant  $x$ , toujours en fonction de la charge offerte  $y$ . Le démarrage "sec" de  $x$  en fonction de  $\lambda$  est un trait commun des protocoles de résolution dont les paramètres (en l'occurrence les constantes de réajustement) ont été optimisés pour les meilleurs débits (en l'occurrence  $e^{-1}$ ). Si on pose  $dy = 1 - y$  on a les évaluations

$$x = O(dy)$$

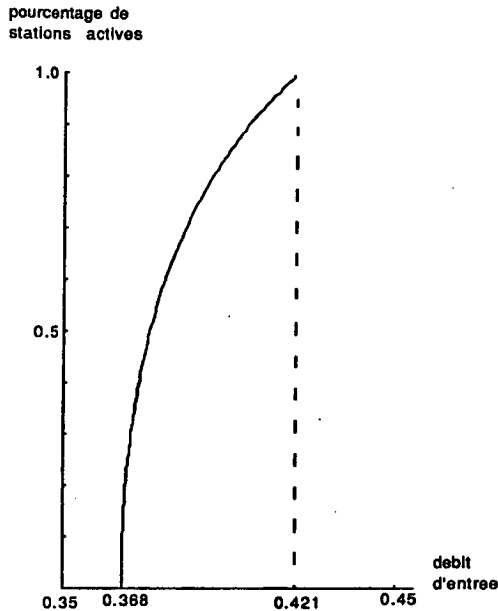
et

$$\lambda = e^{-1} + O(dy^2).$$

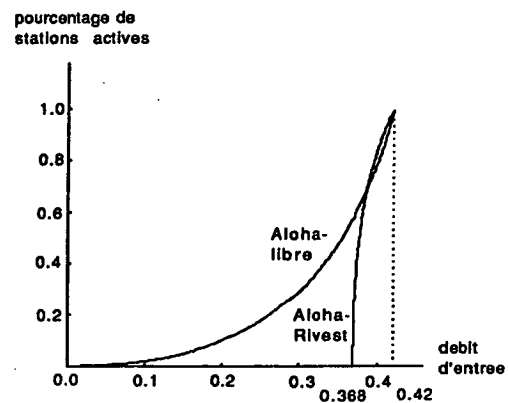
Les protocoles à fenêtre souffrent aussi de ce genre de désagrément (c'est la taille de la fenêtre qui est le paramètre optimisé).



Sur la figure 6 nous représentons les performances comparées d'Aloha-Rivest et de la version Aloha à arrivées libres qui admet le même  $\lambda_{\max}$ , c'est à dire avec  $p = 0.609049$ . On constate que le fait de démarrer sec n'est pas dommageable à Aloha-Rivest par rapport à Aloha libre puisqu'ils ne se rejoignent qu'à la dernière extrémité (avec un léger avantage pour Aloha libre, toutefois),



Courbe donnant une évaluation des files d'attente pour Aloha Rivest.



Comparaison entre les files d'attente d'Aloha Rivest et Aloha à arrivées libres avec probabilité de retransmission  $p=0.609$ .

Figure 5 & 6.

A titre informel, Nous présentons une comparaison entre une version "optimisée" d'Aloha Rivest et le protocole en arbre déterministe de Capetanakis et Tsybakov-Mikhailov. Nous avons optimisé Aloha Rivest par le réajustement suivant:

En cas de blanc

$$\frac{1}{P} \leftarrow \max\left\{\frac{1}{P} - A, \frac{1}{P_{\max}}\right\}.$$

En cas de succès

$$\frac{1}{P} \leftarrow \frac{1}{P} + A(1 - \epsilon).$$

En cas de collision

$$\frac{1}{P} \leftarrow \frac{1}{P} + A\epsilon.$$

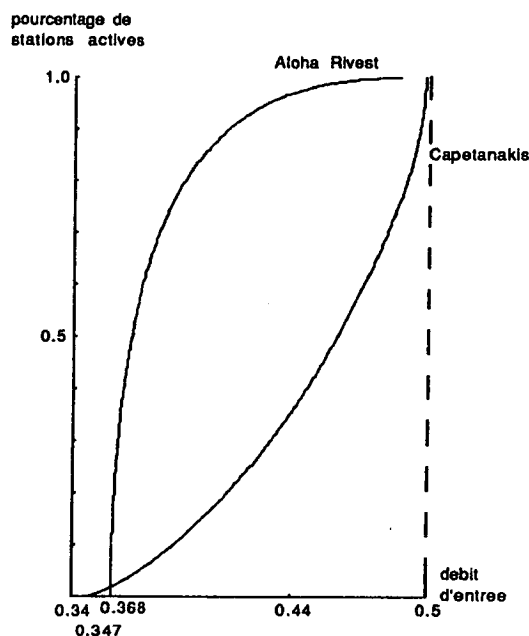
A étant suffisamment grand ( $O(1/\epsilon)$ ) pour assurer l'ergodicité du protocole sur  $0 < \lambda < e^{-1}$  (transparence canal). Plus  $\epsilon$  est petit, plus  $\lambda_{\max}$  (avec des files d'attente) se rapproche de  $1/2$ . Le protocole "asymptotique" est celui pour qui l'étude des files d'attente remplacerait la troisième équation d'Aloha-Rivest

$$(1 + X_0)e^{-y} = \frac{2}{e}$$

par la nouvelle équation

$$X_0e^{-y} = (X_1 + X_0y)e^{-y},$$

(égalité des proportions de blancs et de succès). L'intérêt de cette nouvelle version serait nulle si on ne remarquait pas que son  $\lambda_{\max}$  est le même que celui du protocole en arbre binaire déterministe de Capétanakis, à savoir  $1/2$  (autant de collision que de succès pour le protocole en arbre). La figure ci-dessous (figure 7) prouve qu'en terme de files d'attente, le protocole en arbre déterministe est bien meilleur que le protocole Aloha.



Comparaison entre une version "optimisée" d'Aloha Rivest et du protocole en arbre de Capetanakis.

Figure 7.

L'étude détaillée du protocole en arbre déterministe fait l'objet de la part du présent auteur d'un rapport en cours de publication.

Nous terminons par la représentation des zones d'ergodicité quand la population totale est divisée en deux sous populations identiques soumises à des taux d'arrivées différents.

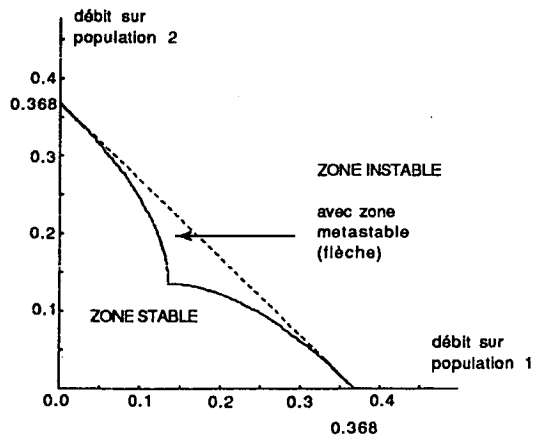
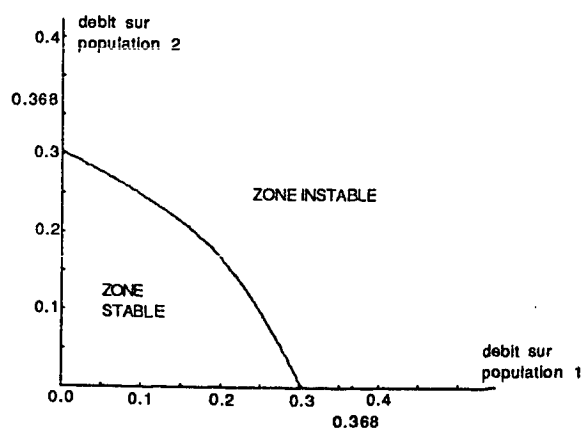


Figure 8 & 9

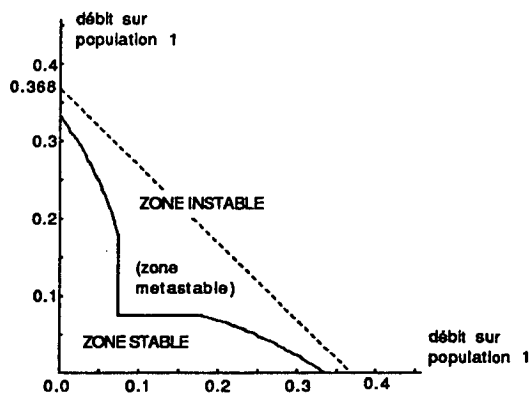


Figure 10.

Les figures 8, 9 et 10 donnent les zones d'ergodicité du protocole Aloha standard quand respectivement  $p = 1$ ,  $p = 2$  et  $p = 3$ . On note dans ce dernier cas le coin formé par les distributions métastables (qui dominent des distributions absorbantes).

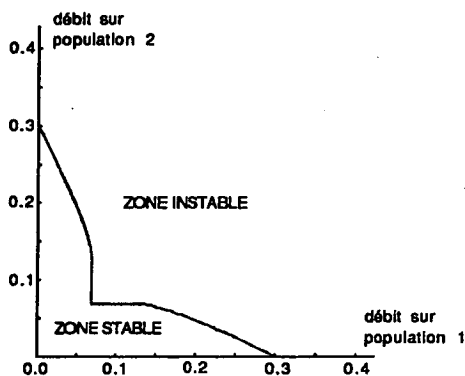
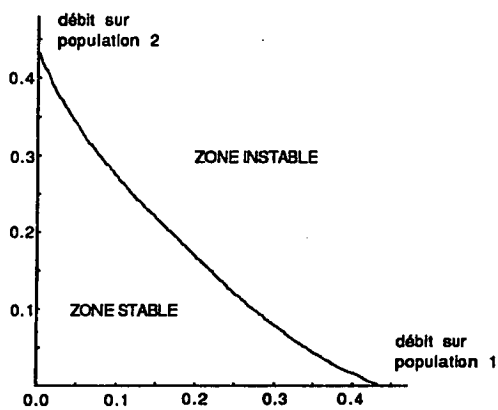


Figure 11 & 12

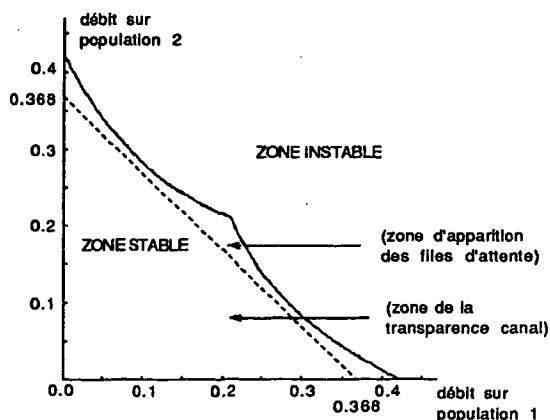
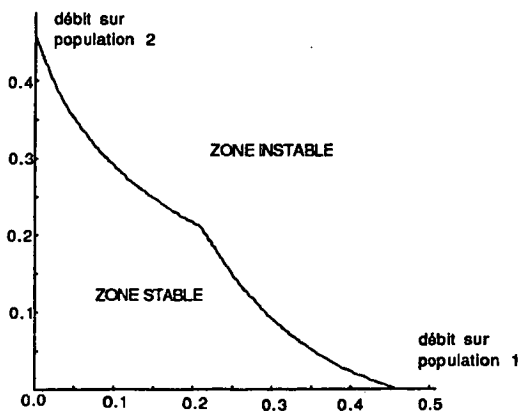


Figure 13 & 14.

Les figures 11 et 12 donnent les zones d'ergodicité du protocole Aloha à arrivées libres quand respectivement  $p = 1$  et  $p = 2$ . La figure 13 donne le cas  $p = 0.609049$  qui donne le même  $\lambda_{max}$  pour Aloha à arrivées libres et Aloha Rivest en trafic symétrique. La figure 14 reproduit la zone d'ergodicité d'Aloha Rivest. On note le triangle de la transparence canal quand les débits cumulés restent inférieurs à  $e^{-1} = 0.367879$ .

Les deux dernières figure (15 et 16) tentent de donner une illustration de la méthode de resolution quand les débits d'entrée suivent une distribution arbitraire (donnée par des petites "stalactites" sur l'axe des abscisses). La correspondance entre les distributions de débit et les distribution des pourcentages de stations actives (sur l'axe des ordonnées) est donnée grace à une demi droite dans le cas d'Aloha standard (figure 15) et grace à une branche d'hyperbole dans le cas d'Aloha à arrivées libres (figure 16).

distribution des proportions  
de stations actives

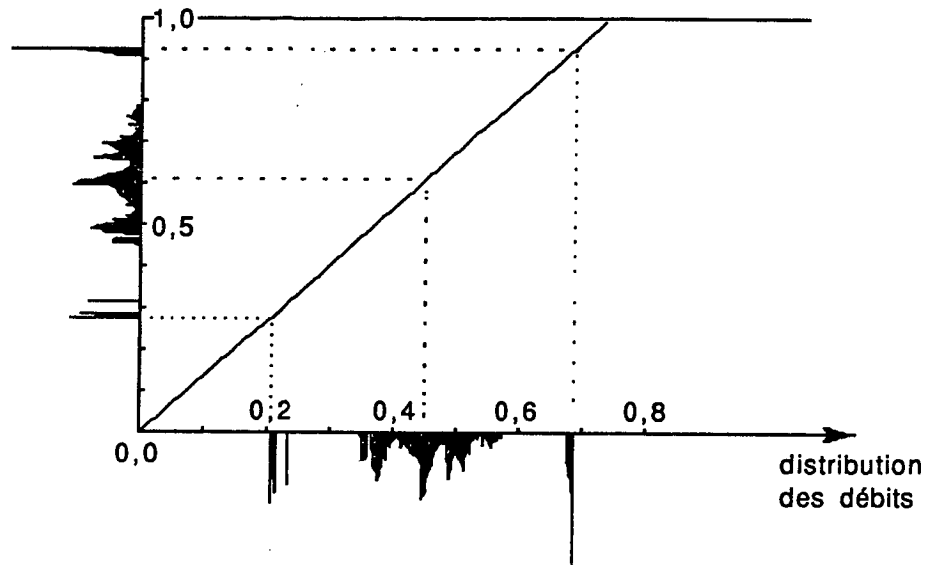


Figure 15.

distribution des proportions  
de stations actives

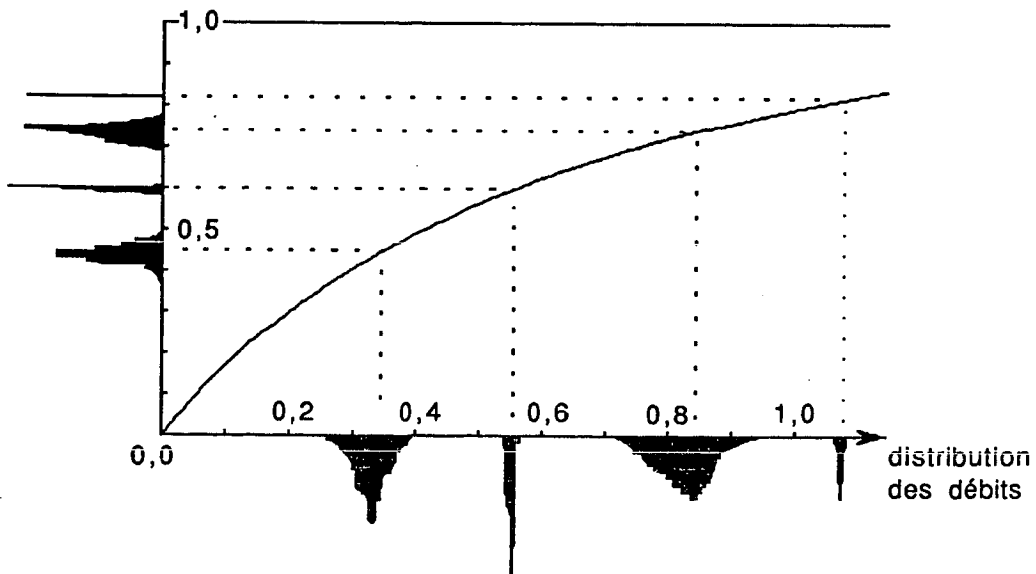


Figure 16.

2)

3)

4)

5)

6)

7)