

# Probabilité stationnaire d'une file d'attente à 2 seuils

Louis-Marie Le Ny

► **To cite this version:**

Louis-Marie Le Ny. Probabilité stationnaire d'une file d'attente à 2 seuils. [Rapport de recherche] RR-0663, INRIA. 1987. <inria-00075890>

**HAL Id: inria-00075890**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075890>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INRIA**

**UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-RENNES**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tel (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 663

**PROBABILITÉ STATIONNAIRE  
D'UNE FILE D'ATTENTE  
À 2 SEUILS**

Louis-Marie LE NY

Mai 1987

PUBLICATION INTERNE N° 354 - MARS 1987 - 16 PAGES

PROBABILITE STATIONNAIRE D'UNE FILE D'ATTENTE A 2 SEUILS

---

Louis-Marie LE NY

**RESUME:**

Nous étudions dans cet article une file d'attente à capacité limitée  $N$  comprenant 2 seuils  $m$  et  $M$ . Si le nombre de clients dans la file atteint la valeur  $M$ , les taux d'arrivée et de service sont modifiés; de même si le nombre de clients atteint la valeur  $m$ .

Nous obtenons des expressions exactes pour les probabilités d'état en régime stationnaire et traitons quelques exemples où les termes  $p(0)$  et  $p(N)$  sont très petits.

**MOTS-CLES:** File d'attente, seuil, capacité limitée, coupe, probabilité stationnaire, chaînes de Markov.

**STEADY-STATE PROBABILITY FOR A QUEUE WITH TWO THRESHOLDS**

---

**ABSTRACT:**

In this paper a queue with a limited capacity  $N$  and 2 thresholds  $m$  and  $M$  is analyzed. If the number of customers in the station reaches the value  $M$  (resp.  $m$ ), then the arrival and service rates are modified.

Exact formulas are derived for the steady-state probabilities and some examples are presented where  $p(0)$  and  $p(N)$  are insignificant.

**KEYWORDS:** Queue, threshold, limited capacity, cut, steady-state probability, Markov chains.

## A-INTRODUCTION ET NOTATIONS

### A1-DESCRIPTION DU MODELE

L'objet de cet article est de présenter un modèle de file d'attente à capacité limitée dont les probabilités  $p(0)$  et  $p(N)$  peuvent être simultanément très petites .

Ce type de situation apparait dans le domaine des télécommunications ; par exemple en télévision câblée ou les files d'attente sont les tampons nécessaires à la transmission des données . Si certains tampons sont vides il se produit une interruption d'image ; inversement un tampon plein provoque des pertes de données et des blocages.

Pour la modélisation de ces problèmes , nous introduisons 2 seuils  $m$  et  $M$  ; le seuil  $M$  est en général voisin de  $N$  et permet d'éviter la saturation de la file ; le seuil  $m$  , voisin de  $0$  , permet d'éviter que la file ne se vide .

Avoir obtenu des formules exactes pour les probabilités d'état, nous pourrions déterminer les couples  $(m, M)$  pour lesquels les probabilités  $p(0)$  et  $p(N)$  sont inférieures à des valeurs  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  arbitraires .

### A2-HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans un premier temps nous supposerons les lois de service exponentielles de taux constants notés  $\mu$  et  $\mu'$  ainsi que les distributions des interarrivées de taux  $\lambda$  et  $\lambda'$ .

Le choix de ces taux est lié au mécanisme de fonctionnement de la file représenté sur le graphe markovien de la figure 2 ci-dessous: dès que le nombre de clients dans la file atteint la valeur  $M$ , les taux sont  $\lambda'$  et  $\mu'$  et sont remplacés par  $\lambda$  et  $\mu$  lorsque ce nombre est égal à  $m$  .

## B-MODELISATION MARKOVIENNE

### B.1-GRAPHE DE TRANSITION

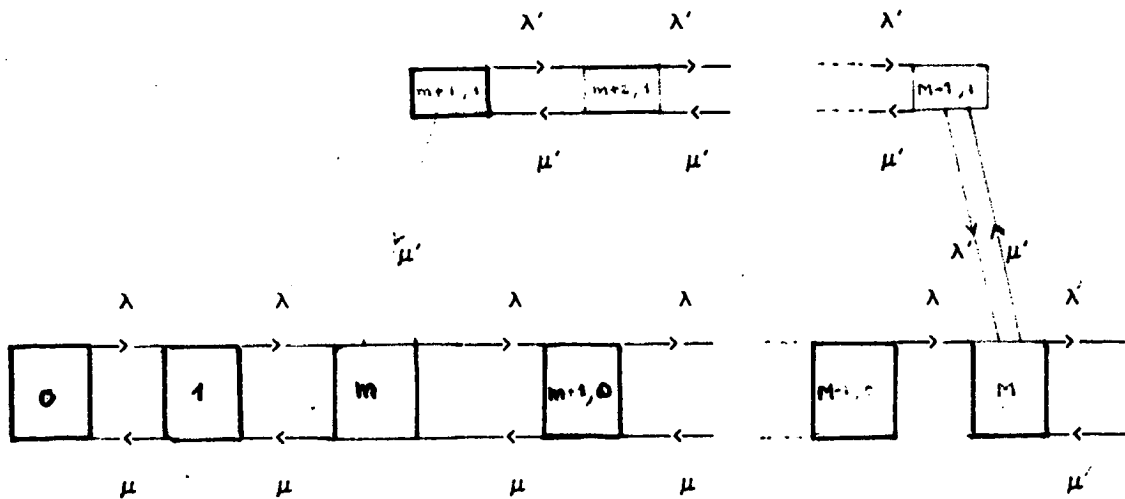
En raison de l'existence des seuils  $m$  et  $M$ , pour obtenir un modèle markovien, nous utilisons 2 indices 0 et 1 pour caractériser certains états (fig 2) :

-Si le nombre de clients  $n$  dans la file est inférieur ou égal à  $m$  ou supérieur ou égal à  $M$ , on pose  $e=n$ .

-Si  $m < n < M$  on pose  $e=(n, 1)$  si tout chemin orienté joignant  $m$  à  $e$  passe par  $M$ .

-On note  $e=(n, 0)$  s'il existe un chemin orienté joignant  $m$  à  $e$  et ne passant pas par  $M$ .

Sous ces hypothèses nous pouvons modéliser l'évolution de l'état de la file par une chaîne de Markov irréductible dont le graphe des transitions est représenté ci-dessous (fig 2) :



- fig 2 -

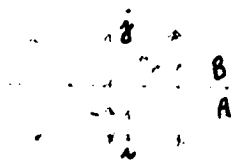
## B.2-EQUATIONS EN REGIME STATIONNAIRE

Les probabilités d'état sont obtenues en utilisant le résultat suivant relatif à la conservation du flux de transition [1] [2] [3] [4] [5] [6]:

Pour tout processus homogène ergodique d'ensemble d'états  $E$ , et pour toute partition  $(A, B)$  de  $E$ , la fréquence des transitions de  $A$  vers  $B$  est égale à la fréquence des transitions de  $B$  vers  $A$ .

Ce résultat, encore appelé méthode des coupes (fig 3), peut s'écrire :

$$\forall A \subseteq E, \forall B \subseteq E \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = E$$



$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} p_i \alpha_{ij} = \sum_{j \in B} \sum_{i \in A} p_j \alpha_{ji}$$

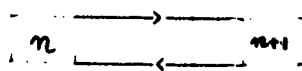
où  $p_i$  est la probabilité que la file soit dans l'état  $i$  et  $\alpha_{ij}$  est le taux de transition de l'état  $i$  vers l'état  $j$ .

- fig 3 -

En choisissant judicieusement 3 types de coupe dans le graphe markovien défini ci-dessus (fig 2), nous obtenons les équations permettant de calculer les probabilités d'état.

### TYPES DE COUPES UTILISEES :

TYPE 1 :

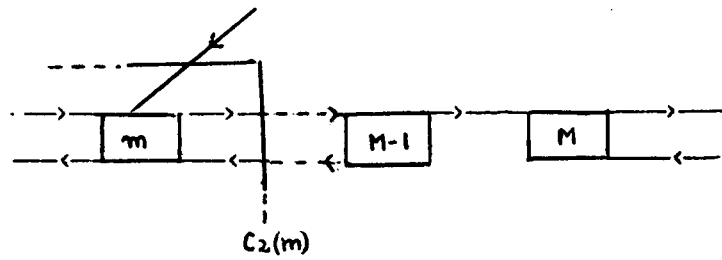


$$0 \leq n \leq m-1$$

$$M \leq n \leq N-1$$

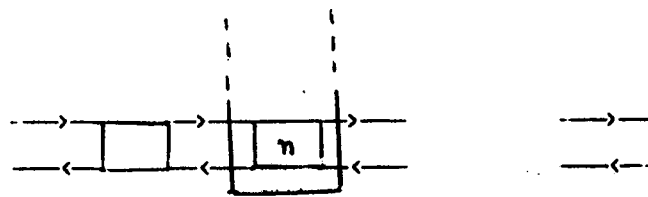
-Coupe C1(n)-

**TYPE 2 :**



Coupe  $C_2(n)$  pour  $m \leq n \leq M-1$

**TYPE 3 :**



Coupe  $C_3(n)$  pour  $m+1 \leq n \leq M-1$ .

Pour alléger les notations nous poserons :

$$u_n = p(n) \quad \text{si } 0 \leq n \leq m$$

$$u_n = p(n, 0) \quad \text{si } m < n < M$$

$$v_n = p(n, 1) \quad \text{si } m < n < M$$

$$v_n = p(n) \quad \text{si } M \leq n \leq N$$

les coupes  $C_1(n)$  nous fournissent les équations :

$$(E1) \quad u_n \lambda = u_{n+1} \mu, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$(E2) \quad v_n \lambda' = v_{n+1} \mu', \quad M \leq n \leq N-1$$

d'où , en posant  $\rho = \lambda/\mu$  et  $\rho' = \lambda'/\mu'$  :

$$(R1) \quad u_n = \rho^n u_0 \quad \text{et}$$

$$(R2) \quad v_n = (\rho')^{n-M} v_M$$

En utilisant les coupes  $C_2(n)$  , on obtient les relations :

$$(E3) \quad u_n \lambda = u_{n+1} \mu + v_{m+1} \mu' \quad \text{pour } m \leq n \leq M-2$$

$$(E4) \quad u_{M-1} \lambda = v_{m+1} \mu'$$

d'où , par récurrence sur  $k$  :

$$u_{m+k} = u_m \rho^k - v_{m+1} (\mu'/\mu) (\sum_{i=0}^{k-1} \rho^i)$$

$$(R3) \quad u_{m+k} = u_m \rho^k - v_{m+1} (\mu'/\mu) ((1-\rho^k)/(1-\rho))$$

$$1 \leq k \leq M-m-1$$

En particulier , pour  $k = M-m-1$  , nous avons :

$$(R4) \quad u_{M-1} = u_0 \rho^{M-1} - v_{m+1} (\mu'/\mu) ((1-\rho^{M-m-1})/(1-\rho))$$

En reportant dans l'équation E4 , nous obtenons :

$$v_{m+1} = \frac{\rho^{M-1} u_0}{\frac{\mu'}{\lambda} + \frac{\mu' (1-\rho^{M-m-1})}{\mu (1-\rho)}}$$

Les expressions de  $v_n$  s'obtiennent à l'aide des coupes  $C_3(n)$ .

$$\text{D'après } C_3(m+1) \text{ , on a } v_{m+2} = \frac{\lambda' + \mu'}{\mu'} v_{m+1} = (\rho'+1) v_{m+1}$$



Pour  $m+2 \leq n \leq M-1$ , on a :

$$v_{n+2}\mu' - v_{n+1}(\lambda' + \mu') + v_n\lambda' = 0$$

ou encore, en posant  $n=m+k$

$$v_{m+k+2}\mu' - v_{m+k+1}(\lambda' + \mu') + v_{m+k}\lambda' = 0$$

Il s'agit donc de déterminer la suite  $w_k = v_{m+k}$ ,  $2 \leq k \leq M-m-2$ , vérifiant l'équation de récurrence double :

$$(E5) \quad w_{k+2}\mu' - w_{k+1}(\lambda' + \mu') + w_k\lambda' = 0 \quad \text{et} \quad w_1 = v_{m+1}, \quad w_2 = v_{m+2}$$

Cette équation admet pour équation caractéristique :

$$r^2 \mu' - r(\lambda' + \mu') + \lambda' = 0$$

dont les racines sont  $r_1 = 1$  et  $r_2 = \frac{\lambda'}{\mu'} = \rho'$

La solution est donc  $w_k = c_1 + c_2(\rho')^k$  ;  
ces constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont telles que :

$$c_1 + c_2 \rho' = v_{m+1}$$

$$c_1 + c_2(\rho')^2 = v_{m+2}$$

$$\text{d'où } c_1 = \frac{v_{m+1}}{1 - \rho'} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{v_{m+1}}{1 - \rho'}$$

$$\text{et } w_k = \frac{v_{m+1}}{1 - \rho'} + \frac{v_{m+1}}{\rho' - 1} (\rho')^k = \frac{1 - (\rho')^k}{1 - \rho'} v_{m+1}$$

pour  $1 \leq k \leq M-m$

d'où le résultat

$$(R5) \quad v_{m+k} = \frac{1 - (\rho')^k}{1 - \rho'} v_{m+1}, \quad 1 \leq k \leq M-m-1$$

### 3- RESUME DES RESULTATS

$$p(n) = \rho^n p(0) \quad , \quad 0 \leq n \leq m$$

$$p(n, 0) = (\rho^{n-m} \cdot \frac{\rho^{M-1} \lambda (1 - \rho^{n-m})}{\mu (1 - \rho^{M-m})}) p(0) \quad , \quad m < n < M$$

$$p(n, 1) = (\frac{(1 - \rho' \rho^{n-m}) \rho^{M-1} \lambda (1 - \rho)}{(1 - \rho') \mu' (1 - \rho^{M-m})}) p(0) \quad , \quad m < n < M$$

$$p(n) = \frac{(\rho')^{n-M} (1 - (\rho')^{M-m}) \rho^{M-1} \lambda (1 - \rho)}{(1 - \rho') (\mu' (1 - \rho^{M-m}))} p(0) \quad , \quad M \leq n \leq N$$

$p(0)$  est obtenue à l'aide de la relation de normalisation:

$$\sum_{n=0}^m p(n) + \sum_{n=m-1}^{M-1} p(n, 0) + \sum_{n=m-1}^{M-1} p(n, 1) + \sum_{n=M}^N p(n) = 1$$

### C- GENERALISATION . TAUX DEPENDANT DE L'ETAT .

Dans ce paragraphe , nous conservons les hypothèses précédentes mais nous supposons que les taux de service et d'arrivée dépendent du nombre de clients dans la file .

Comme dans B nous pouvons construire un modèle markovien ( fig 2 ) où les taux de transition dépendent de l'état .

Seuls les termes  $p(n, 1)$ ,  $m+2 \leq n \leq M$  ne seront pas donnés sous forme explicite ; les relations de récurrence suivantes permettent de les calculer par programme.

$$p(m+2, 1) \mu'(m+2) = p(m+1, 1) (\lambda'(m+1) + \mu'(m+1))$$

$$p(n+1, 1) \mu'(n+1) = p(n+1, 1) (\lambda'(n) + \mu'(n)) - p(n-1) \lambda'(n-1)$$

$$\text{pour } m+2 \leq n \leq M - 1$$

### RESULTATS

$$p(n) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)} p(0) , \quad 0 \leq n \leq m$$

$$p(m+1, 1) = \frac{\prod_{i=1}^{M-1} \lambda(i-1)}{\prod_{i=1}^{M-m-1} \mu(i)} p(0) + \frac{\mu'(m+1)}{\lambda(M-1)} + \sum_{j=1}^{M-m-1} \mu'(m+1) \frac{\prod_{i=j+1}^{M-m-1} \lambda(m+i-1)}{\prod_{i=j}^{M-m-1} \mu(m+i)}$$

$$p(m+k, 0) = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)} p(m) - \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda(m+i-1)}{\mu(m+i)} p(m+1, 1)$$

(pour  $1 \leq k \leq M-m-1$ )

$$p(m+2, 1) = \frac{\lambda'(m+1) + \mu'(m+1)}{\mu'(m+2)} p(m+1, 1)$$

Les autres termes  $p(n, 1)$  pour  $m+2 \leq n \leq M-1$  sont obtenus à l'aide de la relation de récurrence :

$$p(n+1, 1) \mu'(n+1) = p(n, 1) (\lambda'(n) + \mu'(n)) - p(n-1, 1) \lambda'(n-1)$$

#### D- EXEMPLES DE CALCULS DE P(N)

**NOTATION:** L désigne l'espérance du nombre de clients.

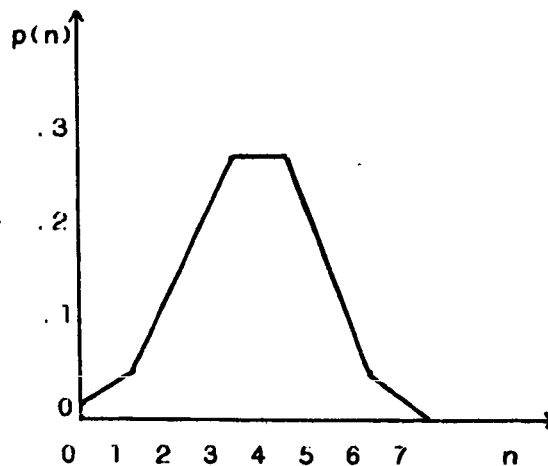
#### D-1 - TAUX CONSTANTS -

$$m=2 \quad M=5 \quad N=7$$

$$\lambda=4 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4$$

- $p(0) = 1.02E-02$
- $p(1) = 4.13E-02$
- $p(2) = 0.16$
- $p(3) = 0.28$
- $p(4) = 0.28$
- $p(5) = 0.16$
- $p(6) = 4.13E-02$
- $p(7) = 1.03E-02$

$$L = 3.5$$

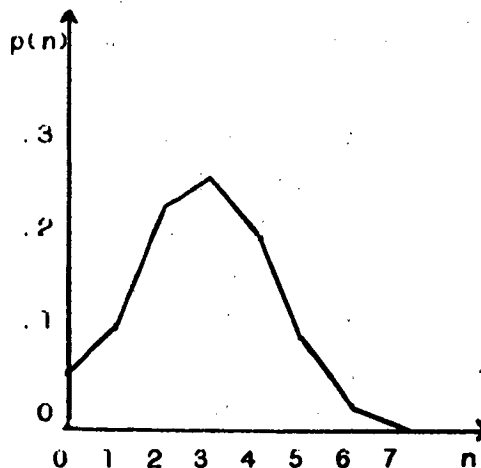


$m=3 \quad M=5 \quad N=7$

$\lambda=2 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4$

$p(0)=0.03$	$p(4)=0.29$
$p(1)=0.07$	$p(5)=0.12$
$p(2)=0.14$	$p(6)=0.03$
$p(3)=0.29$	$p(7)=0.07$

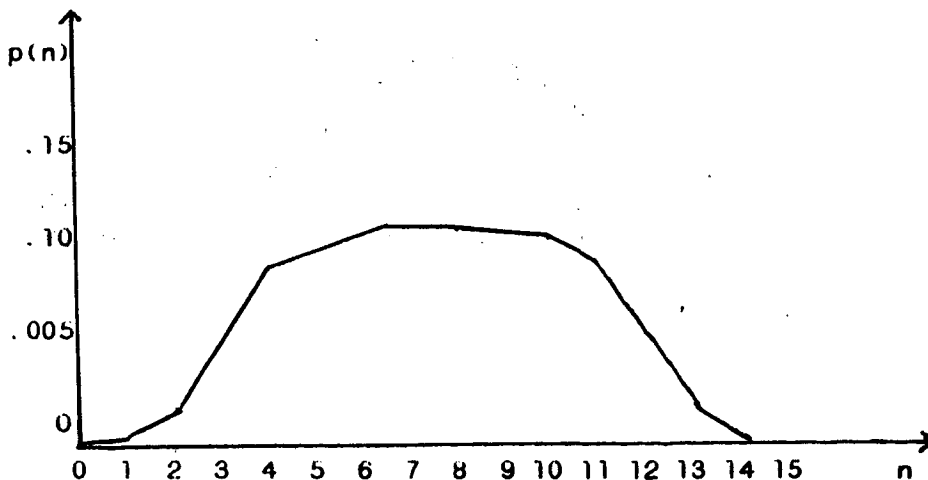
$L = 3.25$



$m=3 \quad M=12 \quad N=15$

$\lambda=4 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4$

$p(0)=8.68E-04$	$p(6)=0.11$	$p(12)=5.55E-02$
$p(1)=3.47E-03$	$p(7)=0.11$	$p(13)=1.38E-02$
$p(2)=1.38E-02$	$p(8)=0.11$	$p(14)=3.47E-03$
$p(3)=5.55E-02$	$p(9)=0.11$	$p(15)=8.68E-04$
$p(4)=0.09$	$p(10)=0.10$	
$p(5)=0.107$	$p(11)=0.09$	$L = 7.5$



D-2 -TAUX VARIABLES

m=3 M=12 N=15

$$\lambda(k) = (M-k) / 3 \quad , 0 \leq k \leq M-1$$

$$\mu(k) = 2 \quad , 1 \leq k \leq M-1$$

$$\lambda'(k) = 1 \quad , m \leq k \leq N-1$$

$$\mu'(k) = 2(k-m) + 1 \quad , m+1 \leq k \leq N.$$

$$p(0) = 1.18E-02$$

$$p(8) = 0.13$$

$$p(1) = 2.37E-02$$

$$p(9) = 0.85E-02$$

$$p(2) = 4.34E-02$$

$$p(10) = 4.11E-02$$

$$p(3) = 7.24E-02$$

$$p(11) = 1.19E-02$$

$$p(4) = 0.11$$

$$p(12) = 2.45E-04$$

$$p(5) = 0.14$$

$$p(13) = 1.29E-05$$

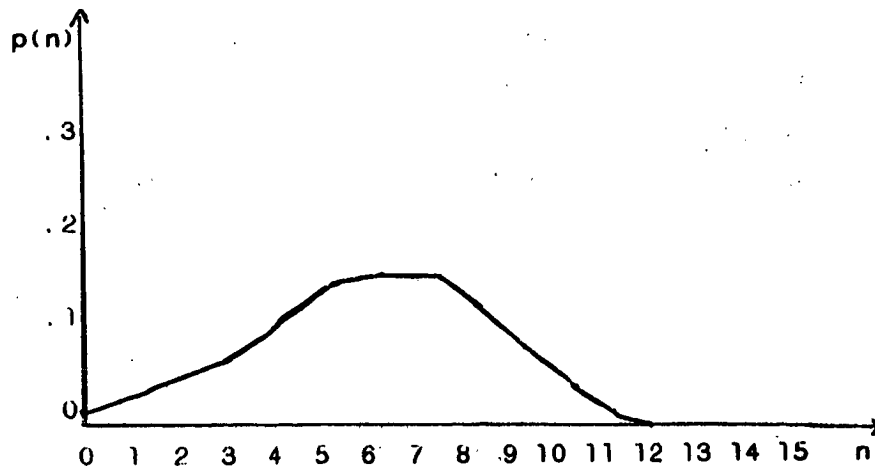
$$p(6) = 0.16$$

$$p(14) = 6.14E-07$$

$$p(7) = 0.16$$

$$p(15) = 2.67E-08$$

$$L = 5.96$$



**E. DETERMINATION DES COUPLES (m, M) TELS QUE  $p(0) < \epsilon$  ET  $p(N) < \epsilon'$ .**

---

Les résultats suivants ont été obtenus par application des formules de la page pour différentes valeurs de  $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$  et pour  $N = 16$ .

Les couples appartenant aux parties hachurées sont tels que  $p(0) < \epsilon$  et  $p(N) < \epsilon'$ .

Nous avons toujours supposé que  $M > m$ .

**E1. EXEMPLE 1**

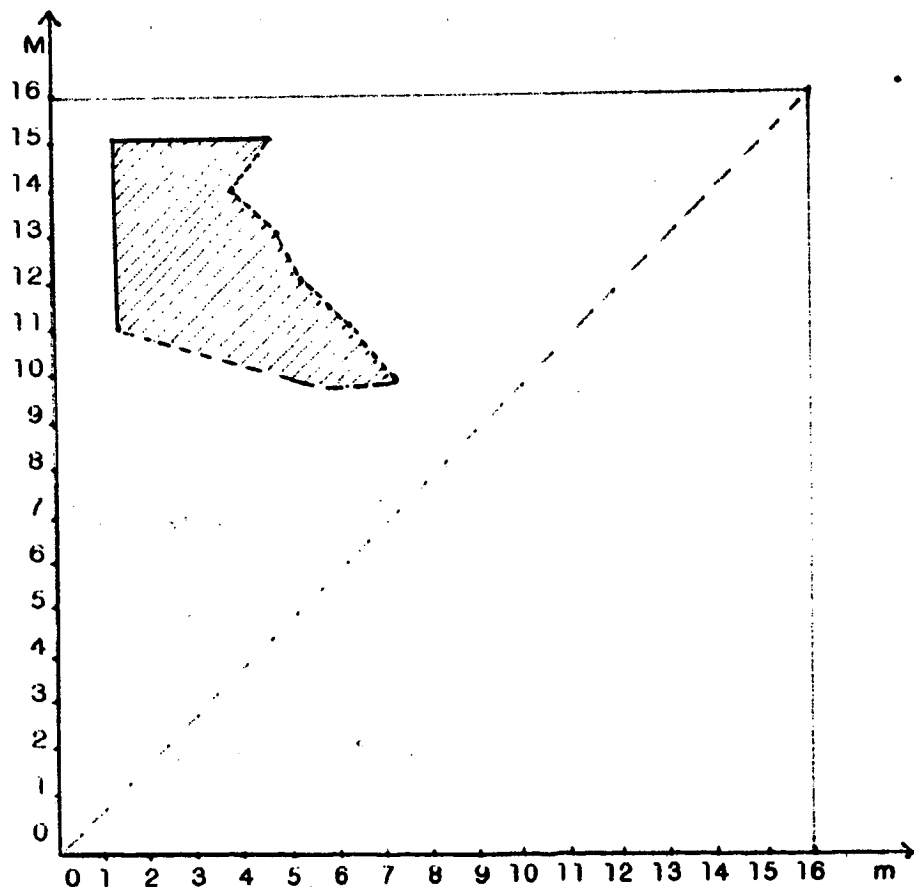
$$\lambda=2, \mu=1, \lambda'=1, \mu'=3$$

$$\epsilon=1.E-1 \quad \epsilon'=1.E-5$$

Valeurs de M : 10 11 12 13 14 15

---

Valeurs max de m : 7 6 5 5 4 5



**E2. EXEMPLE 2**

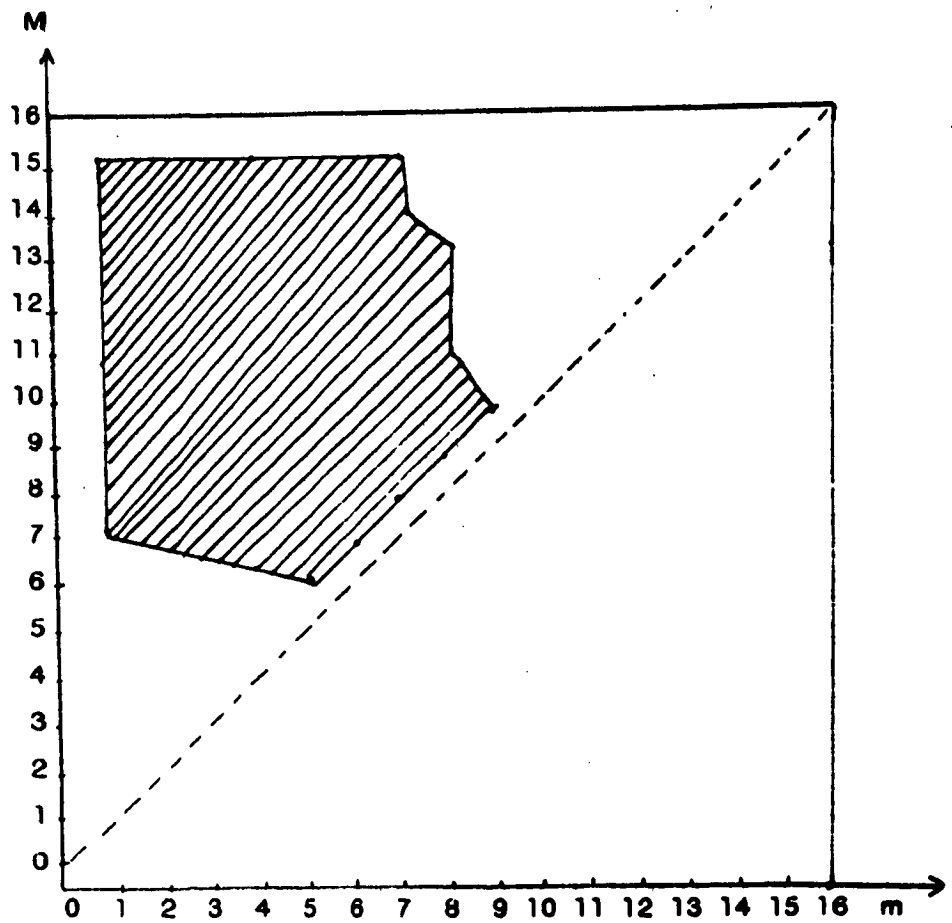
$$\lambda=5 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4 \quad \epsilon=1.E-2 \quad \epsilon'=1.E-5$$

Valeurs de M : 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

---

Valeurs max de m: 5 6 7 8 9 8 8 8 7 7

Valeurs min de m: 5 1 1 1 1 1 1 1 1 1





## REFERENCES

[1] R. MARIE:

Approximations et applications de réseaux de files  
d'attente.

Séminaires de Probabilités de Rennes & Rapport  
I. R. I. S. A n° 65 - 1976 -

[2] R. MARIE:

Méthodes itératives de résolutions de modèles mathéma-  
tiques.

R. A. I. R. O -Informatique . Vol 12 n°2 pp 107-122 . 1978.

[3] B. LEMAIRE:

Théorème de conservation des clients dans les files d'at-  
tente -

R. A. I. R. O-Recherche Opérationnelle-pp 395-399 . 1978 .

[4] B. LEMAIRE:

Méthodes de conservation et blocage dans les files d'at-  
tente-

R. A. I. R. O-Recherche Opérationnelle-pp 363-377. 1977.

[5] M. KRAKOWSKI:

Conservation Methods in queueing theory.

R. A. I. R. O - Operations Research . pp 63-83. 1973.

[6] F. P. KELLY:

Reversibility and Stochastic Networks.

Wiley -New York - 1980 .

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

