Probabilités stationnaires pour des systèmes markoviens discrets

Jean Pellaumail

▶ **To cite this version:**

Jean Pellaumail. Probabilités stationnaires pour des systèmes markoviens discrets. [Rapport de recherche] RR-0633, INRIA. 1987. inria-00075920

HAL Id: inria-00075920
https://inria.hal.science/inria-00075920

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 633

PROBABILITÉS STATIONNAIRES POUR DES SYSTÈMES MARKOVIENS DISCRETS

Jean PELLAUMAIL

Mars 1987

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
35042-RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone : 99 36 20 00
Télex: UNIRISA 950 473 F
Télécopie: 99 38 38 32

PROBABILITES STATIONNAIRES POUR DES SYSTEMES MARKOVIENS DISCRETS

Publication Interne n°349
Février 1987
64 Pages

par le groupe de travail algerennes

Jean **PELLAUMAIL**
et collaborateurs*

RESUME

Ce rapport résume une partie - environ la moitié - des études effectuées dans le cadre du groupe de travail algerennes. Ces études portent toutes sur le calcul des probabilités stationnaires pour des réseaux markoviens dont l'ensemble des états est fini ou dénombrable. Ce rapport comprend trois parties.

STEADY-STATE PROBALITIES FOR MARKOVIAN SYSTEMS

ABSTRACT

This report is an account of some results stated by algerennes seminar about steady-state probabilities for markovian systems. This report has three independent parts.

* M.A. ASTOUATI, R. BELLAMINE, F. CHARLOT, A. KHELLADI, T. LARDJANE, O. LAGHA, M. LEBAH, B. OUMEHDI et J. PELLAUMAIL.

CHANGEMENT DE VARIABLE ET PROBABILITES STATIONNAIRES *

INTRODUCTION

Considérons un processus dont l'ensemble des états E est fini ou dénombrable. Le calcul des probabilités stationnaires d'un tel processus se ramène à la résolution d'un système (fini ou infini) d'équations linéaires qui peut s'écrire $AP = DP$ où les "matrices carrées" (finies ou infinies) A et D sont connues tandis que P est la "matrice uni-colonne" des probabilités stationnaires.

Plusieurs auteurs ([Bog], [BoP], [...], etc...) ont proposé, dans des cadres particuliers, des algorithmes de résolution du système $AP = DP$ qui reviennent, explicitement ou implicitement, à trouver deux "matrices" R et Z, où R est "calculable", telles que $P = RZ$, le nombre d'inconnues apparaissant dans Z étant beaucoup plus faible que dans P . Le système initial devient alors $ARZ = DRZ$.

Nous proposons ici une amorce d'étude systématique de cette méthode. Plus précisément, au paragraphe A, on donne des conditions, assez générales, suffisantes pour avoir la situation expliquée précédemment. Un exemple simple illustratif en est donné au paragraphe C. A notre connaissance, les deux cas où la méthode du changement de variable apporte les simplifications les plus spectaculaires sont, d'une part le cas où il y a une priorité (paragraphe D), d'autre part le cas où les lois de service ne sont pas exponentielles (paragraphe E) : dans ce cas, il faut utiliser la P-modélisation (cf. [Pel]).

Par ailleurs, nous proposons, au paragraphe B, une méthode originale de résolution (exacte ou approchée) du système $ARZ = DRZ$.

---

* par M.A. Astouati, R. Bellamine, F. Charlot, A. Khelladi, T. Lardjane, O. Lagha, M. Lebah, B. Oumehdi et J. Pellaumail

Avant de terminer, nous tenons à remercier chaleureusement l'équipe E V P de Lannion, notamment P. BOYER, pour ses conseils et ses suggestions : à notre connaissance, c'est cette équipe qui a le plus expérimenté la méthode du changement de variable.

PAPIER RECUPÉRÉ ET RECYCLÉ

A. GENERALITES

A.1 Hypothèses de base

On considère un processus $X := (X_t)_{t \in R}$ markovien homogène dont l'ensemble des états E est fini ou dénombrable. On suppose que ce processus X est ergodique et on ne s'intéresse qu'à son régime stationnaire. Pour tout couple (e,e') d'éléments de E avec $e \neq e'$, on pose :

$$a(e,e') := \lim_{h \downarrow o} . \frac{1}{h} \text{Proba}\left[X_{t+h} = e' \mid X_t = e\right] \quad \text{et} \quad a(e,e) := 0$$

Soit $(p(e))_{e \in E}$ la probabilité stationnaire associée au processus X ; cette famille de nombres positifs est caractérisée par les deux conditions suivantes :

(i) $\sum_{e \in E} p(e) = 1$

(ii) quel que soit e élément de E, $p(e) \sum_{e' \in E} a(e,e') = \sum_{e' \in E} p(e')a(e',e)$

Si E est fini, soit $E := \{0,1,\ldots,N\}$, le système (ii) peut s'écrire $AP = DP$ où P est la matrice (uni-colonne) $(N+1) \times 1$ définie par $P_i := p(i)$ et A et D sont des matrices (carrées) $(N+1)\times(N+1)$ définies par $A_{i,j} := a(j,i)$ et $D_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d(i) & \text{si } i = j \end{cases}$

avec $d(i) := \sum_{k=o}^{N} a(i,k)$

A.2 Cas où E est fini

On considère d'abord le cas où $E := \{0,1,\ldots,N\}$.

Soit m et r deux entiers avec $1 \leqslant r \leqslant m$. Pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant (N+1-m)/r$, soit Z_n la matrice uni-colonne à m-lignes (matrice $(m \times 1)$) définie par $(Z_n)_i = p(rn+i-1)$.

On suppose que, pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant (N+1-m)/r$, il existe une matrice H_n carrée $(m \times m)$, immédiatement calculable à partir des coefficients $a(e,e')$ et telle que

$$Z_{n+1} = H_n Z_n \cdot$$

Posons $J_n := H_{n-1} H_{n-2} \cdots H_o$.

La relation précédente donne alors :

$$Z_n = J_n Z_o \cdot$$

On peut donc calculer "linéairement" toutes les matrices Z_n, et donc la matrice P, en fonction de Z_o ; autrement dit, on est ramené à la détermination de la matrice Z_o qui comporte m inconnues.

Du point de vue "abstrait", le paragraphe précédent dit qu'il existe une matrice $((N+1) \times m)$ - appelons-la R - qui s'exprime simplement en fonction des matrices J_n et telle que $P = R Z_o$. Cette relation reportée dans le système initial $(A-D)P = 0$ donne $(A-D)R Z_o = 0$, c'est à dire que l'on s'est ramené <u>à résoudre un système linéaire comportant m inconnues alors que le système initial comportait (N+1) inconnues.</u>

En fait, du point de vue "concret", il n'y a pas lieu, en général, d'expliciter la matrice R pour calculer le produit $(A-D)R$. Par ailleurs, on proposera ultérieurement une méthode de détermination de Z_o qui ne nécessite pas de résoudre le système $(A-D)R Z_o = 0$ (cf. Méthode des convexes au paragraphe B).

A.3 <u>Une situation assez générale</u>

On suppose toujours que $E := \{0,1,\ldots,N\}$ et on va donner des conditions suffisantes assez générales pour lesquelles les hypothèses du paragraphe A.2 qui précède sont satisfaites avec $r = 1$.

On se donne donc un entier m, avec $m \geqslant 1$, et on suppose qu'il existe un entier q, avec $0 \leqslant q < m$, tel que, pour tout entier n avec $0 \leqslant n \leqslant N-m$, on a les deux propriétés suivantes :

(i) $a(j,n+q) = 0$ pour $j < n$ et pour $j > n+m$

(ii) $a(n+m,n+q) > 0$

On suppose, de plus, que pour tout élément n de E, on a $p(n) > 0$: ceci n'est pas une restriction mais signifie que E est l'ensemble des états récurrents.

Soit n un entier avec $0 \leqslant n \leqslant N-m$.

Considérons l'équation d'équilibre à l'état $k := n+q$; elle peut s'écrire :

$$p(k)d(k) = \sum_{j=n}^{n+m} p(j)a(j,k)$$

ce qui implique :

$$p(n+m) = \frac{1}{a(n+m,k)} \{ p(k)d(k) - \sum_{j=n}^{n+m-1} p(j)a(j,k) \}$$

autrement dit, $p(n+m)$ est une fonction linéaire des $p(j)$ pour $n \leqslant j < n+m$.

Appelons Z_n la matrice uni-colonne à m lignes (matrice $(m \times 1)$) définie par $(Z_n)_i = p(n+i-1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

La relation ci-dessus peut s'écrire

$$p(n+m) = K_n Z_n$$

où K_n est la matrice $(1 \times m)$ définie par

$$(K_n)_i = -a(n+i-1,k)/a(n+m,k) \quad \text{pour} \quad k \neq n+i-1$$

et $$(K_n)_{k-n+1} = d(k)/a(n+m,k)$$

Ceci peut encore s'écrire

$$Z_{n+1} = H_n Z_n$$

où H_n est la matrice $(m \times m)$ définie par

$(H_n)_{m,i} = (K_n)_i$; $(H_n)_{i,i+1} = 1$ et

$(H_n)_{i,j} = 0$ dans les autres cas.

A.4 Les équations surabondantes

On garde les hypothèses données au paragraphe A.3 qui précède.

Pour calculer P en fonction de Z_o, suivant l'algorithme qui précède, on a utilisé les équations d'équilibre pour tous les états de la forme n+q avec $0 \leqslant n \leqslant N-m$. Les équations associées aux autres états constituent alors un système de m équations dont la résolution permet de calculer Z_o : en général, ce système a une seule solution positive à une constante multiplicative près.

En général, les équations d'équilibre associées aux états j pour $j < q$ permettent de calculer "linéairement" Z_o en fonction des p(i) pour $i < m-q$: on a donc (m-q) inconnues au lieu de m. Par ailleurs, les autres équations surabondantes sont celles associées aux états j pour $j \geqslant N-m+q$. Il s'agit donc d'équations "faciles" à expliciter, c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire de calculer explicitement (A-D)R : il suffit de calculer J_n pour $n \geqslant N-m+q$.

A.5 Calcul de J_n

Les équations données en A.4 ci-dessus permettent de calculer explicitement J_n. Plus précisément, la $i^{ième}$ colonne de J_n est égale à Z_n quand on prend $(Z_o)_j := \delta_{i,j} := (Z_o^i)_j$ où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de

Kronecker classique. Autrement dit, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ (éventuellement pour $1 \leqslant j \leqslant m-q$), on pose $(Z_o^i)_j = \delta_{i,j}$ et on calcule "formellement" le Z_n associé comme indiqué en A.3, ce qui donne Z_n^i ; on a ensuite $J_n = (Z_n^1, \ldots Z_n^i, \ldots Z_n^m)$.

Bien entendu, Z_n^i ne peut plus être considérée comme une probabilité : certains coefficients de Z_n^i peuvent donc être négatifs.

On note que les "calculs" sont les mêmes quel que soit i : seul (Z_o^i) dépend de i. On peut donc calculer J_n en utilisant la technique du calcul parallèle.

B. LA METHODE DES CONVEXES*

B.1 Cadre général

On revient aux hypothèses générales données au paragraphe A.2 .

Nous avons vu, précédemment, qu'on était ramené à calculer Z_o, c'est à dire à déterminer m - éventuellement (m-q) - inconnues positives à une constante multiplicative près.

Une façon de calculer Z_o est d'utiliser des équations surabondantes, comme expliqué au paragraphe qui précède. Nous allons proposer maintenant une autre méthode qui est utilisable même si $N = \infty$. Cette méthode est intéressante si m est "petit" par rapport à N. Elle a été testée sur quelques exemples.

Posons

$C_n := \{ Z : Z \geqslant 0 \text{ et } \forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ J_k Z \geqslant 0 \}$ et

$\mathcal{C}_n := \{ Z : Z \in C_n \text{ et } \sum_{i=o}^{n} |P(i)| = 1 \text{ avec } P = RZ \}$

où Z est une matrice $(m \times 1)$ et où $J_k Z \geqslant 0$ signifie que chaque terme de $J_k Z$ est positif. La famille $(C_n)_{n>o}$ est une suite décroissante de cônes convexes ; en général, pour n grand, C_n se réduit "presque" à une demi-droite. Dans ce cas, Z_o est "presque" déterminé puisque, évidemment, Z_o appartient à C_n, quel que soit n.

De plus, considérons le cas où l'on arrête les calculs pour $n = s$ avec, évidemment, $s \leqslant (N+1-m)/r$. Soit Z_a un élément de C_s et soit $P_a = R Z_a$ la matrice des "probabilités stationnaires" associée. Si P_e est la matrice des probabilités stationnaires exactes et pour toute distance d donnée sur $\mathbb{R}^{N+1}$, on a :

$$d(P_a, P_e) \leqslant \operatorname*{Sup}_{Z \in \mathcal{C}_s} d(P_a, R Z)$$

ce qui peut donner une majoration a posteriori des erreurs dues à la méthode des convexes.

---

* par M.A. Astouati, F. Charlot et J. Pellaumail

B.2 Cas où E est infini

Introduction

Considérons le cas où les hypothèses données au paragraphe A.2 sont satisfaites sauf que $N = +\infty$ c'est à dire que $E := \mathbb{N}$. Dans ce cas, il n'y a pas d'"équations surabondantes".

Si on ne dispose pas d'un algorithme permettant de calculer explicitement les probabilités stationnaires, la seule méthode "praticable" est alors la méthode des convexes.

B.3 Existence et unicité

Proposition 1 :

On suppose donc $E := N$ et on pose $C := \bigcap_{n>0} C_n$.

Alors C est une demi-droite (dans $\mathbb{R}^m$).

Preuve :

1°) Notons d'abord que pour toutes les propriétés de ce type on peut se ramener au cas où l'on a une chaine de Markov : en effet, soit $\bar{p}(e)$ la probabilité stationnaire d'être dans l'état e pour la "chaine incluse" aux instants où il y a un changement d'état. On a

$$\bar{p}(e) = K\, p(e) \sum_{e'} a(e,e')$$

La correspondance entre les propriétés de p et celles de $\bar{p}$ est donc immédiate.

2°) Puisque le système est ergodique, C n'est pas vide. Par ailleurs, considérons deux éléments Z et Z' de C ; soit P et P' les "matrices" (infinies) associées ; P et P' induisent des mesures positives invariantes pour la chaîne incluse donc P et P' sont proportionnelles (cf., par exemple, [Rev] th 3.1-10) donc Z et Z' sont proportionnels.

B.4 Convergence

Proposition 2 :

On suppose toujours $E := \mathbb{N}$. Pour tout entier n, soit Z_n un élément de C_n. On suppose que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $u(\varepsilon)$ tel que, quel que soit $n \geqslant u(\varepsilon)$, on ait

$$\sum_{k=u(\varepsilon)}^{n} \| J_k Z_n \| \leqslant \varepsilon \{ \sum_{k=o}^{u(\varepsilon)} \| J_k Z_n \| \}$$

avec $$\| V \| = \sum_{i=1}^{m} |V(i)|$$

Pour tout entier n, on pose

$$p'_n(rk+i-1) := \{(J_k Z_n)_i\}\, 1_{k \leqslant n}$$

$$w(n) := \sum_{k=o}^{n} p'_n(k) \quad \text{et} \quad p_n(k) := p'_n(k)/w(n)$$

$$P_n := (p_n(j))_{j \geqslant 0}$$

Alors la suite $(P_n)_{n>o}$ converge dans ℓ_1 vers la probabilité stationnaire P qui est associée à Z avec Z élément de $C := \bigcap_{n \geqslant o} C_n$.

Preuve :

1°) Pour tout entier n, P_n est une probabilité par construction. De plus, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $u(\varepsilon)$ tel que, quel que soit n :

$$\sum_{k \geqslant u(\varepsilon)} p_n(k) \leqslant \varepsilon/r$$

et la suite $(P_n)_{n>o}$ admet une valeur d'adhérence P dans ℓ_1.

2°) Pour tout entier n, soit $Y_n := (p_n(k))_{o \leqslant k \leqslant m-1}$.

Y_n est proportionnel à Z_n et appartient à C_n ; puisque (cf. proposi-

tion précédente) C est réduit à une demi-droite, la suite $(Y_n)_{n>o}$ converge dans $\mathbb{R}^n$ vers Y. On en déduit la convergence de $(J_o Y_n, J_1 Y_n, \ldots, J_e Y_n)_{n>o}$ vers $(J_o Y, \ldots J_e Y)$ pour tout entier e ; ceci et le 1°) implique la convergence dans $\mathcal{L}_1$ de $(P_n)_{n>o}$ vers P.

B.5 Cas où H est fixe

Théorème :

On se place dans le cadre introduit en A.2, avec, notamment $Z_{n+1} = H_n Z_n$ et on suppose que $H_n = H$ ne dépend pas de n. De plus on écrit la matrice Z_o sous la forme $Z_o = K U$ où K est une matrice (rectangulaire) $(m \times s)$ et U est une matrice (uni-colonne) $(s \times 1)$: U correspond aux inconnues qui sont déterminées soit par les conditions associées à la capacité limitée, soit par la propriété $(\mathcal{N})$: $\sum_{n=o}^{\infty} \| H^n K U \| < +\infty$ quand la capacité est illimitée. Les relations $Z_o = K U$ correspondent aux équations pour les états avec "peu de clients".

Soit $H = E+F$ la décomposition canonique de la matrice H pour laquelle $EF = FE = 0$ et toutes les valeurs propres non nulles de E (resp. F) ont un module < 1 (resp. $\geqslant 1$) : on peut, par exemple, obtenir cette décomposition en considérant les réduites de Jordan.

Soit d le nombre (strictement positif) tel que, pour toute matrice $(m \times 1)$ X, on ait $\| Z \| \leqslant d \| X \|$ où $X = Y+Z$ est la décomposition (unique) de X telle que $E Z = 0$ et $F Y = 0$.

1°) Soit U' la solution associée au cas à capacité infinie. Alors U' est, à une constante multiplicative près, la solution (unique) du système $F K U' = 0$.

2°) On définit $\mathcal{C}_n$ comme en B.1. Rappelons (cf. A.2) que r est le nombre de fois où chaque probabilité d'état apparait dans la sommation $\sum_{k=o}^{\infty} \sum_{i} (H^k X)^i$. Si X appartient à $\mathcal{C}_n$ on a donc

$$\sum_{k=o}^{n} \sum_{i} (H^k X)^i \leqslant r$$

Soit X et X' deux éléments de $\mathcal{C}_k$ et $X = Y+Z$ et $X' = Y'+Z'$ les décompositions associées; d'une part $Y = \lambda Y'$, d'autre part

$$\| Z-Z' \| \leqslant \frac{2rd}{k} \quad .$$

Preuve :

1°) On a évidemment $H^n = E^n + F^n$; de plus, pour tout vecteur $X = Y+Z$ avec $FY = 0$ et $EZ = 0$, $H^n X = E^n Y + F^n Z$; on a aussi $\sum_{n=0}^{\infty} \| E^n Y \| < +\infty$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \| F^n Z \| = +\infty$ sauf si $Z = 0$; par hypothèse, le système considéré est ergodique, ce qui implique $\sum_{n=0}^{\infty} \| H^n X \| < +\infty$ pour $X = KU'$ donc, dans la décomposition $X = Y+Z$ ci-dessus, $Z = 0$ soit $FX = 0$. On a donc, nécessairement, $FKU' = 0$.

Réciproquement, H, U et K ayant été construites de façon à prendre en compte toutes les équations de C.K., on sait qu'il existe une seule matrice U' (à une constante multiplicative près) telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \| H^n KU' \| < +\infty$ (du fait de l'ergodicité). Or, pour toute matrice U' telle que $FKU' = 0$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \| H^n KU' \| = \sum_{n=0}^{\infty} \| E^n KU' \| < +\infty$ donc le sous-espace vectoriel des matrices U' telles que $FKU' = 0$ est de dimension 1.

2°) Soit X et X' éléments de $\mathcal{C}_n$; soit $X_n = H^n X$ et $X'_n = H^n X'$; soit $X_n = Y_n + Z_n$ et $X'_n = Y'_n + Z'_n$ les décompositions de X_n et X'_n comme indiqué précédemment.

D'une part, pour tout entier n, $\| Z_n \| \leqslant d \| X_n \|$ et $\| Z'_n \| \leqslant d \| X'_n \|$.

D'autre part, $\sum_{n=0}^{k} \| X_n \| = \sum_{n=0}^{k} \sum_i X_n^i \leqslant r$ et, de même, $\sum_{n=0}^{k} \| X'_n \| \leqslant r$.

On en déduit que $\sum_{n=0}^{k} \{ \| Z_n \| + \| Z'_n \| \} \leqslant 2rd$

On a donc, $\sup_{0\leq n\leq k} \| F^n(Z-Z') \| \leq \sup_{0\leq n\leq k} (\| Z_n \| + \| Z'_n \|) \leq \frac{2r\,d}{k}$

Puisque toutes les valeurs propres de F, en restriction aux vecteurs Z tels que $E\,Z = 0$, sont de module supérieur ou égal à 1, on a

$$\| Z-Z' \| \leq \frac{2r\,d}{k}$$

Remarques

1°) Tout ce qui précède s'étend au cas où H dépend de n avec les hypothèses adéquates, mais ceci conduit à un formalisme assez lourd.

2°) Le 2°) du théorème qui précède peut être utilisé dans le cas à capacité infinie (convergence dans la méthode du convexe) ; il permet aussi de voir dans quelle mesure le cas à capacité infinie est une bonne approximation du cas à capacité limitée.

B.6 Une autre approche

Le paragraphe B.5 qui précède montre que la connaissance des valeurs propres de H donne une minoration de la vitesse de convergence quand on utilise la "méthode des convexes". Toutefois, il n'est pas certain (?) que cette minoration soit la meilleure : en effet, le théorème qui suit (cf. [Ast]) donne une vitesse de convergence qu'il ne semble pas possible d'obtenir simplement par l'étude des valeurs propres.

Théorème

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices A de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ et $ad > bc$. Pour tout élément A de $\mathcal{A}$, soit $f(A) = (ad/bc)-1$ et soit C_A l'ensemble des couples (x,y) de réels tels $x \geq 0$, $y \geq 0$, $ax-by \geq 0$, $-cx+dy \geq 0$ et $x+y = 1$.

On a alors les propriétés suivantes :

1°) Le diamètre de C_A est majoré par $f(A)/\sqrt{2}$.

2°) L'ensemble $\mathscr{H}$ est stable pour le produit matriciel.

3°) Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite d'éléments de $\mathscr{H}$ telle que, quel que soit k, $1\leqslant k\leqslant n$, $f(A_k)\leqslant \varepsilon$; on a alors $f(\prod_{k=1}^{n} A_k) \leqslant \varepsilon^n/(2)^{n-1}$.

Preuve :

1°) Le diamètre de C_A vaut $\delta = (\frac{d}{c+d} - \frac{b}{a+b})\sqrt{2}$ soit

$\delta = (\frac{ad}{bc} - 1)\sqrt{2}\,/\{(1+\frac{a}{b})(1+\frac{d}{c}) \leqslant f(A)/\sqrt{2}\}$

2°) Vérification immédiate ; plus précisément, si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ -c' & d' \end{pmatrix}$, un calcul élémentaire donne :

$f(AA') = f(A)f(A')/\left[2 + f(A) + f(A') + u\right]$

avec $u := \frac{aa'}{bc'} + \frac{dd'}{cb'}$

3°) L'égalité précédente implique

$f(AA') \leqslant f(A)f(A')/\left[2 + f(A) + f(A')\right]$

L'inégalité donnée au 3°) se vérifie alors facilement en raisonnant par récurrence croissante sur n .

C. PREMIER EXEMPLE*

C.1 Description du réseau

On considère un réseau ouvert comportant deux stations F et G ou un réseau fermé comportant trois stations F, G et H. On suppose qu'il n'y a qu'une seule classe de clients. Un état e du réseau sera un couple (i,j) d'entiers où i (resp. j) correspond au nombre de clients dans F (resp. G). On suppose que le nombre de clients dans G est limité à J. Si le nombre de clients dans F est limité à I, l'ensemble E des états est $E := \{0,\ldots I\} \times \{0,\ldots J\}$; si la station F est à capacité infinie, $E := \mathbb{N} \times \{0,\ldots J\}$.

On suppose que l'évolution du processus est markovienne relativement à cet ensemble d'états et que chaque transition d'un état e à un état e' correspond au déplacement d'un <u>seul</u> client. Le générateur infinitésimal est alors caractérisé par les six familles de paramètres suivantes :

e(i,j) (resp. e'(i,j)) := taux d'entrée d'un client en F (resp. G) (quand l'état est (i,j)).

d(i,j) (resp. d'(i,j)) := taux de départ d'un client de F (resp. G) (vers l'extérieur si le réseau est ouvert ou vers H si le réseau est fermé).

t(i,j) (resp. t'(i,j)) := taux de transfert d'un client de F vers G (resp. de G vers F).

Autrement dit (cf. A.1) :

$e(i,j) = a\,[(i,j),(i+1,j)]$ ... etc...

C.2 Equations

Soit p(i,j) la probabilité stationnaire d'être dans l'état (i,j). Posons

---

* par M.A. Astouati, T. Lardjane et B. Oumehdi

$h(i,j) := (e+e'+d+d'+t+t')(i,j)$

L'équation de Chapman-Kolmogorov associée à l'état (i,j) peut s'écrire :

$$p(i+1,j) = \{(ph)(i,j)-(pe)(i-1,j)-(pe')(i,j-1) \\ -(pd')(i,j+1)-(pt)(i+1,j-1)-(pt')(i-1,j+1)\} /d(i+1,j)$$

avec les conventions usuelles "aux bords" : $p(-1,j) = 0$ ... $p(i,J+1) = 0$ ... etc...

Par ailleurs, posons $f(i,j) = i(J+1)+j$; f est une bijection de E sur $\mathbb{N}$ (resp. $\{0,1,\ldots N\}$) si G est à capacité infinie (resp. limitée), avec $N := (I+1)(J+1)-1$.

Considérons d'abord le cas où G est à capacité limitée. La bijection f permet d'identifier E et l'ensemble $\{0,1,\ldots N\}$.
On <u>suppose</u> que, pour tout état (i,j) avec $i \geqslant 1$, $d(i,j) > 0$. On vérifie alors immédiatement que les conditions données en A.3 sont satisfaites en prenant $m := 2(J+1)$ et $q := J+1$. Toutefois, nous allons définir Z_n et H_n d'une façon plus "économique"que celle proposée en A.3 .

Pour tout entier n, $0 \leqslant n \leqslant I$, soit X_n la matrice unicolonne définie par $X_n(j) := p(n,j-1)$, pour $1 \leqslant j \leqslant 1+J$.

Pour $n = -1$, posons $X_{-1}(j) := 0$

Les équations de C.K. s'écrivent alors

$$X_{n+1} = U_n X_{n+1} + V_n X_n + W_n X_{n-1}$$

où U_n , V_n et W_n sont des matrices carrées $(J+1) \times (J+1)$ qui s'expriment immédiatement en fonction des paramètres e, e', d, d', t et t' .

Par exemple :

$$U_n(j,j-1) = -t(n+1,j-2)/d(n,j-1)$$

et $U_n(j,k) = 0$ pour $k \neq j-1$

En fait, il n'est pas nécessaire d'expliciter les matrices U_n, V_n et W_n : il suffit de noter que la matrice $(I-U_n)$ est triangulaire et immédiatement inversible. La relation peut donc s'écrire :

$$X_{n+1} = E_n X_n + F_n X_{n-1} \quad \text{avec}$$

$$E_n := (I-U_n)^{-1} V_n \quad \text{et} \quad F_n := (I-U_n)^{-1} W_n$$

Posons alors, en utilisant les notations classiques par blocs :

$$Z_n := \begin{pmatrix} X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} \qquad H_n := \begin{pmatrix} 0 & I \\ F_{n+1} & E_{n+1} \end{pmatrix}$$

Les relations ci-dessus deviennent $Z_{n+1} = H_n Z_n$, ce qui ramène à la situation indiquée en A.2 .

Par ailleurs, $X_1 = E_o X_o$ soit $Z_o = \begin{pmatrix} X_o \\ E_o X_o \end{pmatrix}$ c'est à dire qu'il y a (J+1) inconnues auxiliaires (la matrice X_o). Ces inconnues auxiliaires peuvent être déterminées soit en utilisant la méthode des convexes (utilisable même si $I = +\infty$) soit (pour $I < +\infty$) par la relation $E_I X_I + F_I X_{I-1} = 0$

C.3 Quand E_n et F_n sont fixes

Nous avons vu, en C.2, que l'on avait la relation :

$$X_{n+1} = E_n X_n + F_n X_{n-1}$$

Considérons le cas où les matrices $E_n = E$ et $F_n = F$ sont fixes. On a alors :

$$X_{n+1} = P_n(E,F)\, X_1 + P_{n-1}(E,F)\, F\, X_o$$

où $P_n(E,F)$ est la somme de tous les monômes distincts de degré n en E

et F si on considère que E est de degré 1 et que F est de degré 2.

Vérification :

Ceci se vérifie en raisonnant par récurrence sur n ; évidemment, en général, E et F ne commutent pas ; il faut donc distinguer EF et FE.

D. DEUXIEME EXEMPLE : CLASSE PRIORITAIRE *

D.1 Introduction

On étudie un réseau markovien ergodique, composé de deux stations avec deux classes de clients - l'une des deux étant prioritaire dans une station et les lois de service étant exponentielles - pour lequel on va donner un algorithme simple permettant de calculer effectivement, avec un ordinateur, les probabilités en régime stationnaire, moyennant la "méthode de changement de variable", qu'on notera par la suite : M.C.V . En fait, dans cette partie, la M.C.V est utilisée à deux niveaux (M.C.V 2) .

Plus précisément, la M.C.V permet de remplacer le vecteur initial des inconnues, qui dépend de 4 paramètres par un vecteur d'inconnues auxiliaires qui dépend de 2 paramètres.

D.2 Hypothèses et notations

On considère un réseau ouvert ergodique R constitué de deux stations, que l'on appellera E et F , avec 2 classes de clients, les lois de services étant exponentielles.

On suppose que :

- à chaque instant, l'évolution ultérieure du réseau ne dépend que du nombre de clients de chaque classe dans chaque station,
- l'ordre dans lequel les clients sont arrivés dans les deux stations n'intervient donc pas,
- chaque station est à capacité limitée pour chaque classe.

On appellera e état du réseau R un 4-uplet (i_1 , i_2 , j_1 , j_2) où, pour tout k, k = 1 ou 2 , i_k (resp. j_k) désigne le nombre de clients de classe k dans la station E (resp. F). Pour cet ensemble d'état, l'évolution du réseau est markovienne.

Les hypothèses sont les hypothèses habituelles : notamment la

* par M. Lebah et J. Pellaumail

probabilité d'avoir deux clients qui se déplacent entre t et t+dt est un infiniment petit en dt d'ordre deux (et donc négligeable). On se limite au cas où les clients ne peuvent pas changer de classe.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant K$ et e un état de R, on notera par :

- I_k (resp. J_k) la capacité de la classe k dans la station E (resp. F),

- $a_k(e)$ (resp. $a'_k(e)$) le taux d'arrivée de la classe k en E (resp. F) si R est dans l'état e,

- $t_k(e)$ (resp. $t'_k(e)$) le taux de transfert de la classe k de E vers F (resp. de F vers E) si R est dans l'état e,

- $d_k(e)$ (resp. $d'_k(e)$) le taux de sortie de la classe k en E (resp. F) si R est dans l'état e.

Evidemment, on suppose que si la station E (resp. F) pour la classe k est :

- vide alors les taux d_k et t_k (resp. d'_k et t'_k) sont nuls,
- pleine alors les taux a_k et t'_k (resp. a'_k et t_k) sont nuls .

On notera :

- $e+\delta_k-\delta'_k$ (resp. $e+\delta'_k-\delta_k$) l'état e avec un client de classe k en plus en E (resp. F) et un client de classe k en moins en F (resp. E),

- $e+\delta_k$ (resp. $e+\delta'_k$) l'état e avec un client de classe k en plus en E (resp. F),

- $e-\delta_k$ (resp. $e-\delta'_k$) l'état e avec un client de classe k en moins en E (resp. F).

On notera p(e) la probabilité stationnaire, pour le réseau R d'être dans l'état e avec la convention usuelle : p(e) := 0 si e contient une composante négative.

Les équations de C.K. (Chapman-Kolmogorov) pour tout état e, sont :

$$(Bp)(e) = \sum_{k=1}^{2} \big((a_k p)(e-\delta_k)+(a'_k p)(e-\delta'_k)+(t_k p)(e+\delta_k-\delta'_k)+$$
$$(t'_k p)(e-\delta_k+\delta'_k)+(d_k p)(e+\delta_k)+(d'_k p)(e+\delta'_k) \big)$$

où, pour tout état e, $B(e) := \sum_{k=1}^{2} (a_k + a'_k + t_k + t'_k + d_k + d'_k)(e)$.

On suppose que la classe 1 est prioritaire (avec préemption) dans la station E, c'est à dire que le taux de service (t_2+d_2) de la classe 2 dans la station E est nul dès que le nombre i_1 de clients de classe 1 en E est non nul.

On suppose aussi que, pour tout état $e := (i_1, i_2, j_1, j_2)$ avec $j_2 > 0$, on a $d'_2(e) > 0$.

D.3 Inconnues auxiliaires et première étape

Les inconnues auxiliaires que l'on choisit sont les probabilités p(e) pour les états de la forme $e := (i_1, 0, j_1, 0)$ et ceux de la forme $e := (0,0,j_1,j_2)$.

Le problème est donc de montrer que l'on peut calculer (linéairement) toutes les probabilités p(e) en fonction des seules inconnues auxiliaires indiquées précédemment.

La première étape consiste à calculer les probabilités p(e) pour les états de la forme $e = (i_1,0,j_1,j_2)$. Pour cela, on raisonne par récurrence croissante sur j_2 en commençant par $j_2 = 0$. Supposons donc que l'on ait su calculer (en fonction des seules inconnues auxiliaires) les probabilités p(e) pour les états $e = (i_1,0,j_1,j_2)$ tels que $j_2 \leq j_2^*$: pour $j_2^* = 0$, ces probabilités font partie des inconnues auxiliaires, ce qui donne l'initialisation du raisonnement par récurrence.

L'équation de C.K. relative à l'état $(i_1,0,j_1,j_2^*)$, avec $i_1 \geqslant 1$, permet de calculer $p(i_1,0,j_1,1+j_2^*)$ puisqu'on a supposé $d_2'(e+\delta_2') > 0$ ce qui achève le raisonnement par récurrence : rappelons que les $p(0,0,j_1,1+j_2^*)$ font partie des inconnues auxiliaires.

D.4 Deuxième étape

Dans la première étape, on a calculé, en fonction des seules inconnues auxiliaires, les p(e) pour $e = (i_1,0,j_1,j_2)$. Le calcul des autres probabilités p(e) est alors standard : il se fait par récurrence croissante sur i_2. La première étape donne l'initialisation (cas $i_2 = 0$). Ensuite, supposons connues les p(e) pour les états de la forme $(.,i_2,.,.)$ avec $i_2 \leqslant i_2^*$; les équations de C.K. pour les états e de la forme $e = (0,i_2^*,.,.)$ ou $e = (i_1,1+i_2^*,.,.)$ avec $i_1 > 0$ ne font intervenir que les probabilités des états de la forme $e = (.,1+i_2^*,.,.)$. On a donc un système linéaire avec autant d'inconnues que d'équations. Ce système $S(i_2^*)$ a une seule solution (réseau ergodique), ce qui achève le raisonnement par récurrence.

D.5 M.C.V.2

On a donc, pour chaque valeur de i_2^*, à résoudre le système $S(i_2^*)$: on peut, pour ce faire, utiliser les algorithmes classiques de résolution de systèmes linéaires. Toutefois, il est en général préférable d'utiliser un algorithme spécifique qui revient à adopter la méthode du changement de variable à un deuxième niveau (M.C.V.2) en procédant comme suit.

Rappelons que les p(e) pour e de la forme $e = (.,i_2,.,.)$ avec $i_2 \leqslant i_2^*$ sont déjà "calculées". Introduisons comme nouvelles inconnues auxiliaires (intermédiaires) les p(e) pour e de la forme $e = (.,1+i_2^*,.,0)$ - soit $(1+I_1)$ $(1+J_1)$ nouvelles inconnues. En raisonnant par récurrence croissante sur j_2, on peut alors calculer - en fonction de ces nouvelles inconnues auxiliaires et des p(e) antérieurement "calculées"-

les $p(e)$ pour les états de la forme $e = (.,1+i_2^*,.,.)$ (donc j_2 quelconque). Plus précisément, l'équation de C.K. pour l'état e si $i_1 > 0$ ou $(e-\delta_2)$ si $i_1 = 0$ permet de calculer $p(e+\delta_2')$ puisque $d_2'(e+\delta_2') > 0$.

Enfin, il reste, comme équations "supplémentaires", les équations liées aux états e de la forme $(.,1+i_2^*,.,J_2)$ qui permettent de calculer les nouvelles inconnues auxiliaires. On a donc remplacé la résolution d'un système à $(1+I_1)(1+J_1)(1+J_2)$ équations par la résolution d'un système à $(1+I_1)(1+J_1)$ équations.

D.6 Conclusion

Pour le réseau considéré, le système des équations de C.K. comporte $(1+I_1)(1+I_2)(1+J_1)(1+J_2)$ inconnues (et autant d'équations). L'étude qui précède montre qu'on peut se ramener à la résolution de I_2 systèmes à $(1+I_1)(1+J_1)$ inconnues (cf. D.5) puis à la résolution d'un système à $\left[(1+I_1)(1+J_1)+(1+J_1)(1+J_2)\right]$ inconnues (cf. D.3).

E. TROISIEME EXEMPLE : FILE GI/GI/1*

E.1 Introduction

L'objet de ce paragraphe est d'expliquer un algorithme qui permet de calculer, rapidement et avec une faible taille mémoire, les probabilités stationnaires d'un réseau fermé comportant deux stations dont les lois de service ne sont pas exponentielles. Ce même algorithme permet aussi de calculer, avec l'approximation souhaitée, les probabilités stationnaires d'une file unique généralisant la file GI/GI/1. La généralisation réside en ce que tous les taux peuvent dépendre de tous les paramètres d'état.

Globalement, la méthode proposée est analogue à celle de la chaine incluse : les gains en taille mémoire et temps de calcul reposent sur l'utilisation de la P-modélisation introduite dans [Pel].

Pour plus de détails, voir [Oum].

E.2 Description du modèle

Soit J, K et M trois entiers strictement positifs. Soit J' (resp. K', M') l'ensemble des entiers j tels que $1 \leqslant j \leqslant J$ (resp. $1 \leqslant k \leqslant K$, $0 \leqslant m \leqslant M$). On pose soit $E := (J' \times K' \times M')$ (cas d'un réseau fermé), soit $E := (J' \times K' \times N)$ - où N est l'ensemble des entiers - (cas d'un réseau ouvert).

Le modèle considéré est un processus markovien homogène $(X_t)_{t \in T}$ qui admet E comme ensemble des états et qui évolue en temps continu : en fait, on ne s'intéresse qu'à la loi stationnaire de ce processus qui sera supposé ergodique. La loi d'évolution de ce processus est caractérisée par son générateur infinitésimal ; autrement dit, elle est caractérisée par la fonction positive g définie sur $(E \times E)$ par :

$$g(e,e') := \lim_{h \downarrow o} \{ \frac{1}{h} \text{ Proba } [X_{t+h} = e' \mid X_t = e] \}$$

---

* par B. Oumehdi et J. Pellaumail

On supposera que, pour tout état e, $g(e,e) = 0$ ce qui ne restreint en rien la généralité du processus étudié.

Nous allons maintenant définir cette fonction g. Pour cela, nous supposons données deux fonctions positives, a définie sur $(E \times J')$ et d définie sur $(E \times K')$. On pose alors :

(i) quel que soit (j,k,n,j') élément de $(E \times J')$ avec $j' \neq 1$:

$$g\,[(j,k,n),(j',k,n)] = a(j,k,n,j')$$

(ii) quel que soit (j,k,n) élément de E :

$$g\,[(j,k,n),(1,k,n+1)] = a(j,k,n,1)$$

(iii) quel que soit (j,k,n,k') élément de $(E \times K')$ avec $k' \neq 1$ et $n \geq 1$:

$$g\,[(j,k,n),(j,k',n)] = d(j,k,n,k')$$

(iv) quel que soit (j,k,n) élément de E avec $n \geq 1$:

$$g\,[(j,k,n),(j,1,n-1)] = d(j,k,n,1)$$

(v) $g(e,e') = 0$ dans tous les autres cas.

E.3 Exemple

Ce qui précède permet notamment d'approcher (autant qu'on le veut) une file GI/GI/1, ou de modéliser un réseau fermé composé de deux stations S_1 et S_2 avec un seul serveur et dont les lois de service peuvent être associées à un ensemble fini d'états fictifs. Dans le cas d'une file PH/PH/1 (resp. un réseau (S_1,S_2)), n correspond aux nombres de clients dans la file (resp. dans S_2), j correspond à l'état fictif pour la loi des inter-arrivées (resp. pour la loi de service dans la station S_1) et k correspond à l'état fictif pour la loi des départs (resp. pour la loi de service dans S_2).

Pour toutes les lois considérées, on suppose qu'il s'agit d'une modélisation avec pivot, c'est à dire que, un départ ou une arrivée se produit à chaque fois que l'état fictif associé reprend la valeur 1 (cf. [Pe1]).

En fait, le modèle proposé est beaucoup plus général que les deux exemples donnés ci-dessus puisque tous les taux (non nuls) peuvent dépendre de tous les paramètres qui interviennent dans les états considérés.

E.4 Hypothèses sur les fonctions a et d

Si le réseau est fermé ($n \leqslant M$) on doit évidemment avoir $a(j,k,M,1) = 0$. De plus, on suppose que ces fonctions sont telles que le processus $(X_t)_{t \in T}$ associé est ergodique.

Par ailleurs, les algorithmes proposés ultérieurement nécessitent quelques restrictions complémentaires sur l'évolution des états fictifs. On suppose donc que :

(i) $a(j,k,n,j') = 0$ si on a à la fois $j' < j$ et $j' \neq 1$

(ii) $d(j,k,n,k') = 0$ si on a à la fois $k' < k$ et $k' \neq 1$

On note que ces hypothèses portant sur les fonctions a et d sont un peu moins restrictives (avec des notations différentes) que les hypothèses données dans [Pel].

E.5 Principe de l'algorithme

Soit p(e) la probabilité stationnaire, pour le processus $(X_t)_{t \in T}$ d'être dans l'état e. On définit la matrice (uni-colonne) $((J+K) \times 1)$ de la façon suivante :

pour $1 \leqslant j \leqslant J$, $(Z_n)_j := p(j,1,n)$

pour $1 \leqslant k \leqslant K-1$, $(Z_n)_{J+k} := \sum_{j=1}^{J} p(j,k+1,n)\, a(j,k+1,n,1)$

enfin $(Z_n)_{J+K} := \sum_{j=1}^{J} p(j,1,n-1) a(j,1,n-1,1)$

La base de cette étude consiste à noter que, d'une part on peut (facilement et directement) calculer toutes les probabilités $\{p(e)\}_{e\in E}$ en fonction des matrices $(Z_n)_{n\geq 0}$, d'autre part, Z_{n+1} se calcule linéairement en fonction de Z_n. Ceci est vrai pour $n \geq 0$. En raisonnant par récurrence sur n, on peut donc calculer toutes les probabilités stationnaires en fonction de la seule matrice Z_0. Pour $k > o$, $(Z_o)_{J+k} = 0$ (cf. E.2.(iv)).

Enfin, les "inconnues auxiliaires" $\{(Z_o)_j\}_{1\leq j\leq J}$ sont déterminées, soit par les équations de C.K. liées aux états $e = (j,k,M)$ (si la capacité est limitée à M), soit par la méthode des convexes.

Le fait qu'on puisse calculer Z_{n+1} en fonction de Z_n correspond à la méthode bien connue de la "chaine incluse" : ici on considère la chaine incluse aux instants où il y a soit un départ, soit une arrivée. Toutefois, la modélisation avec pivot (ici pour les arrivées et pour les départs respectivement) évite l'utilisation du théorème de renouvellement ainsi que tous les calculs, souvent complexes, qui s'y rattachent.

Plus précisément, considérons les équations de C.K. pour les états e de la forme $e = (j,k,n)$ avec $j \neq 1$, $k \neq 1$ et de la forme $e = (j,1,n-1)$ avec $j \neq 1$ (pour n fixé) ; il y a JK telles équations ; ces équations font intervenir exclusivement les probabilités $p(e)$ pour $e = (j,k,n)$ avec $j \neq 1$ et $k \neq 1$ et les matrices Z_n et Z_{n-1} : en les résolvant, on obtient donc Z_n en fonction de Z_{n-1}.

Jusques ici, on n'a pas utilisé les conditions E.4.(i) et (ii) : si ces conditions ne sont pas satisfaites, ce qui précède montre que, en général, pour chaque valeur de n, on a à inverser une matrice à JK lignes et colonnes. En fait, le paragraphe qui suit montre que les conditions E.4.(i) et (ii) permettent de calculer directement et rapidement Z_{n+1} en fonction de Z_n sans inversion de matrice.

E.6 Passage de n à n+1 : initialisation

Dans ce paragraphe n est fixé ; le problème est de montrer comment calculer Z_n en supposant Z_{n-1} connu. Pour alléger les notations, appelons U_j la famille des p(e) pour les états de la forme $e = (j,k,n)$, $1 \leqslant k \leqslant K$.

Considérons d'abord les équations de C.K. pour les états $e = (1,k,n)$ avec $k \geqslant 2$ et pour l'état $e = (1,1,n-1)$; ces équations font intervenir exclusivement les probabilités p(e) pour les états $e = (1,k,n)$ avec $k \geqslant 1$ et la matrice Z_{n-1} ; en les résolvant on peut donc calculer les p(e) pour e de la forme $e = (1,k,n)$, $k \geqslant 1$ en fonction de Z_{n-1} (cet aspect de l'algorithme repose essentiellement sur la condition E.4 (ii)).

En fait - et ceci utilise la condition E.4.(i) - la résolution se fait directement en utilisant une M.C.V.2 (cf. D.4) mais avec une seule inconnue auxiliaire, à savoir $x := p(1,1,n)$.

Supposons donc, provisoirement, x connu. On raisonne alors par récurrence croissante sur k ; l'équation de C.K. liée à l'état $e = (1,k,n)$ pour $k \geqslant 2$ permet de calculer (linéairement) la probabilité de cet état en fonction de x, de Z_{n-1} et des probabilités des états e pour $e = (1,h,n)$ $2 \leqslant h < k$. Enfin, l'équation de C.K. associée à l'état $e = (1,1,n-1)$ permet de calculer x en fonction Z_{n-1} exclusivement. Une fois que l'on connait x, le raisonnement ci-dessus donne la famille U_1 .

Au niveau de la programmation, on procède en trois étapes, avec, à chaque étape, les mêmes calculs formels (calcul des probabilités $p(1,k,n)$ en raisonnant par récurrence croissante sur k). A la première (resp. deuxième) étape, on fait "comme si" on avait $x = 0$ (resp. $x = 1$) ; à la fin de la 2ième étape, on calcule x ; enfin, à la troisième étape on calcule les probabilités $p(1,k,n)$.

E.7 Calcul des U_j

L'entier n est toujours fixé. On vient de voir, en E.6, que

l'on pouvait calculer la famille U_1 en fonction de Z_{n-1}. On raisonne alors par récurrence croissante sur j. Supposons que l'on ait su calculer en fonction de Z_{n-1}, les familles U_h pour $1 \leqslant h < j$. On calcule alors U_j suivant le même principe que celui utilisé pour U_1. Provisoirement, on introduit l'inconnue auxiliaire $x = p(j,1,n)$; on calcule $p(j,k,n)$ pour $k \geqslant 2$ en raisonnant par récurrence croissante sur k et en utilisant l'équation de C.K. associée à l'état (j,k,n). Enfin, on détermine x à l'aide de l'équation de C.K. associée à l'état $(j,1,n-1)$.

Enfin, compte tenu de la définition de Z_n, il est évident que l'on connait Z_n dès que l'on connait toutes les familles U_j, $1 \leqslant j \leqslant J$. Ceci achève le raisonnement par récurrence sur n.

E.8 P-modélisation

Dans [Pel], la modélisation avec pivot considérée est un peu plus restrictive que celle proposée précédemment. Plus précisément, elle revient à remplacer les conditions E.4.(i) et (ii) par les deux conditions suivantes :

(i) $a(j,k,n,j') = 0$ pour $(j-1)(j'-1)(j'-j-1) \neq 0$

(ii) $d(j,k,n,k') = 0$ pour $(k-1)(k'-1)(k'-k-1) \neq 0$

Si cela n'augmente pas trop le nombre d'états fictifs, il y a intérêt à ce que ces conditions E.8.(i) et (ii) soient satisfaites. En effet, elles permettent de diminuer sensiblement les tailles mémoires nécessaires et le nombre de calculs à effectuer.

Notamment, le nombre de calculs à effectuer peut être estimé de la façon suivante quand on limite n à M :

1°) Si on utilise la méthode "classique" de la chaine incluse, et sans compter les calculs liés au théorème de renouvellement ni le calcul final de Z_o, on a, pour chacun des J "vecteurs de base" liés à Z_o M systèmes linéaires à résoudre, chacun d'eux comportant JK inconnues

(et étant, en général, mal conditionné).

Par contre, si on procède comme indiqué précédemment, avec les conditions E.8.(i) et (ii), le nombre d'opérations peut facilement être estimé à $15\,KMI^2$ multiplications et autant d'additions si on néglige les initialisations et les calculs finaux (cas où K est grand).

De plus, dans ce cas, la taille mémoire nécessaire est de l'ordre de 6KJ, si on ne compte pas la mémoire utilisée par les paramètres a et d.

Enfin, si on procède directement (sans utiliser la méthode de la chaine incluse), on a à inverser une matrice creuse qui a MJK lignes et colonnes.

La faible taille mémoire nécessaire et le nombre relativement peu élevé de calculs à effectuer ont permis d'implanter, sur un micro-ordinateur, l'algorithme expliqué précédemment avec les conditions E.4.(i) et E.8.(i).

Notamment, on a testé dans quelle mesure une combinaison de lois constantes, pour la loi de service, pouvait être approchée par une combinaison de loi d'Erlang : on s'est limité à $J = 2$ et $M = 20$; par contre on a fait varier K de 2 à 100.

Le programme a été vérifié en considérant des réseaux de Cox pour lesquels la loi associée est, en fait, la loi exponentielle : pour plus de détails, voir [Oum].

F. UN CAS PARTICULIER SIMPLE *

F.1 Introduction

On va maintenant donner un exemple pour lequel la "méthode des convexes" est particulièrement facile à étudier et à mettre en oeuvre. Cet exemple contient notamment le cas d'une file GI/M/r "généralisée" : la méthode proposée a été implémentée sur ordinateur et se révèle être extrêmement efficace. Cependant, malgré l'abondance de la littérature sur l'étude de la file GI/M/1, il semble que cette méthode n'a pas été exploitée précédemment.

L'une des "généralisations" par rapport à la file GI/M/r réside dans le fait que tous les taux g(e,e') peuvent dépendre des états e et e'.

F.2 Notations et hypothèses

Soit m et n deux entiers, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. Soit J l'ensemble des entiers j tels que $1 \leqslant j \leqslant m$.

L'ensemble E des états est l'ensemble des couples (j,k) avec j élément de J et $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle E_k l'ensemble des couples (j,h) avec j élément de J et $0 \leqslant h \leqslant k$: on a donc $E = E_n$.

La fonction positive g définie sur $(E \times E)$ est supposée satisfaire aux propriétés suivantes :

1°) $g[(i,h),(j,k)] = 0$ pour $|h-k| > 1$.

2°) Il existe deux fonctions positives u et v définies sur E telles que $g[(i,k-1),(j,k)] = u(i,k)v(j,k)$.

3°) Quel que soit k, $0 < k \leqslant n$, et pour tout couple (e,e') d'éléments de E_k, il existe une séquence $(w_j)_{1 \leqslant j \leqslant h}$ telle que $w_1 = e$, $w_h = e'$ et, quel que soit j, $1 \leqslant j < h$, w_j appartient à E_k et $g(w_j, w_{j+1}) \neq 0$.

---

* par R. Bellamine et J. Pellaumail

La propriété 3°), pour $k = n$, implique que le système est ergodique. On appelle q la probabilité stationnaire c'est à dire l'unique fonction (positive) définie sur E et qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

(i) quel que soit e, $q(e) \sum_{e'} g(e,e') = \sum_{e'} q(e')g(e',e)$

(ii) $\sum_{e} q(e) = 1$

F.3 Théorème

Soit X_k la matrice $(m \times 1)$ - matrice uni-colonne - dont le terme de la j-ième ligne est défini par $(X_k)_j = q(j,k)$. Alors, quel que soit k, $0 \leqslant k < n$, il existe une matrice (carrée) $(m \times m)$ A_k qui ne dépend que de $g(e,e')$ avec soit $e = (i,k)$, soit $(e,e') = ((j,k+\varepsilon),(i,k))$ - avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ - et qui est telle que $X_k = A_k X_{k+1}$. Cette matrice est à termes positifs.

Preuve :

1°) Pour $e = (j,k)$, la condition (i) s'écrit :

(1) $q(e) \sum_{e'} g(e,e') = u_{-1} + u_0 + u_1$ avec

$$u_i = \sum_{h=1}^{m} q(h,k+i)g\left[(h,k+i),(j,k)\right]$$

Par ailleurs, la condition (i) implique

(2) $$\sum_{x=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} q(h,k-1)g\left[(h,k-1),(x,k)\right] = v'$$

avec $$v' = \sum_{x=1}^{m} \sum_{y=1}^{m} q(y,k)g\left[(y,k),(x,k-1)\right]$$

Compte tenu de la propriété 2°) de la fonction g, cette relation (2) peut aussi s'écrire :

$$\sum_{x=1}^{m} v(x,k) \sum_{h=1}^{m} q(h,k-1)u(h,k) = v'$$

Ce qui implique :

$$u_{-1} = v(j,k)\, v' / \sum_{x=1}^{m} v(x,k)$$

La relation (1) peut alors s'écrire $B_k X_k = C_k X_{k+1}$ où B_k et C_k sont deux matrices (carrée)$(m \times m)$ qui ne dépendent que des coefficients $g(e,e')$ avec soit $e = (i,k)$ soit $(e,e') = ((j,k+\varepsilon),(j,k))$, j fixe, $1 \leqslant i \leqslant m$ et $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

2°) On va maintenant prouver que les matrices B_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont inversibles. Pour cela, on va raisonner par récurrence croissante sur k.

Considérons d'abord le cas $k = 0$. Le système global est ergodique, donc il existe deux matrices uni-colonnes X_0 et X_1 telles que $B_0 X_0 = C_0 X_1$; si la matrice B_0 n'est pas inversible, son noyau n'est pas réduit à l'élément 0 et il existe $X_0' \neq X_0$ tel que $B_0 X_0' = C_0 X_1$; la famille q' associée à $(X_0', X_1, \ldots X_n)$ est alors une solution de (i) distincte de q ce qui contredit l'unicité liée à l'ergodicité.

Supposons alors que les matrices B_k soient inversibles pour $k < j$. Pour $k < j$, on pose $A_k = B_k^{-1} C_k$. On sait qu'il existe deux matrices uni-colonnes X_j et X_{j+1} telles que $B_j X_j = C_j X_{j+1}$. Si la matrice B_j n'est pas inversible, il existe $X_j' \neq X_j$ telle que $B_j X_j' = C_j X_{j+1}$. La famille q' associée à $(.,\ldots, A_{j-2} A_{j-1} X_j', A_{j-1} X_j', X_j', X_{j+1}, X_{j+2}, \ldots)$ est une solution de (i) distincte de q ce qui contredit l'ergodicité.

3°) Il reste à prouver que la matrice $A_{k-1} = B_{k-1}^{-1} C_{k-1}$ est à termes positifs. On fixe donc k. Soit i un élément de J. Soit g' la fonction définie sur $(E_k \times E_k)$ de la façon suivante :

a) $g'(e,e') := g(e,e')$ si e ou e' n'est pas de la forme (j,k) avec j éléments de j

b) $g'[(i,k),(j,k)] = 0$

c) $g'[(j,k),(i,k)] = r$ si $j \neq i$

La propriété 3°) de la fonction g implique que le système (E_k,g') est ergodique. Soit X'_{k-1} et X'_k les matrices associées à g' ; tous les termes de ces matrices sont positifs et on a $X'_{k-1} = A_{k-1} X'_k$: rappelons en effet que les matrices B_{k-1} et C_{k-1} (et donc la matrice A_{k-1}) ne dépendent pas de $g(e,e')$ pour $e = (j,k)$ et $e' = (j',k)$.

Quand r tend vers l'infini, la matrice X'_k tend vers une matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i-ième ligne : ce qui précède montre que la matrice uni-colonne $A_{k-1} X'_k$ est à termes positifs, c'est à dire que (en passant à la limite) $A_{k-1} U_i$ est une matrice à termes positifs où U_i est la matrice uni-colonne dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1. Ceci étant vrai quel que soit i , la matrice A_{k-1} est elle-même à termes positifs, ce qui achève la démonstration.

F.4 Méthode des convexes si A_k est inversible

Nous allons montrer maintenant que, dans le cas étudié dans ce paragraphe, la méthode des convexes est très simple à mettre en oeuvre. Définissons d'abord les matrices J_k par récurrence sur k en posant J_o = matrice unité et $J_k = A_k^{-1} J_{k-1}$.

Comme en B.1, posons :

$C_k := \{Z : Z \geqslant 0 \text{ et } \forall u,\ 0 \leqslant u \leqslant k,\ J_u Z \geqslant 0\}$

Rappelons que la notation $Z \geqslant 0$ signifie que tous les termes de la matrice Z sont positifs.

Puisque la matrice A_k est à termes positifs (quel que soit k) on a $C_k := \{ Z : J_k Z \geqslant 0 \}$.

Comme en F.3, appelons U_i la matrice uni-colonne $(m \times 1)$ dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1.

Une matrice V $(m \times 1)$ est positive si et seulement si $V = \sum_{i=1}^{m} v_i U_i$ où $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille de nombres positifs. Puisque Z appartient à C_k si et seulement si $V := J_k Z \geq 0$, on obtient que C_k est l'ensemble des matrices Z de la forme $\sum_{i=1}^{n} v_i J_k^{-1} U_i$.

Autrement dit, C_k est le cone convexe issu de 0 dont les bords sont les demi-droites associées aux vecteurs $(J_k^{-1} U_i)_{1 \leq i \leq m}$.

F.5 Exemples

L'exemple essentiel pour lequel toutes les hypothèses données en F.2 sont satisfaites est celui de la file GI/M/r sous réserve que la loi du délai entre deux arrivées soit modélisable par l'intermédiaire d'états fictifs. Dans ce qui précède, on a supposé que l'ensemble des états est fini, c'est à dire que la file est à capacité limitée n : si la file n'est pas à capacité limitée, on peut utiliser tout ce qui précède et faire tendre n vers l'infini.

La "méthode des convexes" est particulièrement intéressante si la probabilité d'atteindre la capacité limite est faible, c'est à dire si les contraintes quand cette capacité limite est atteinte n'interviennent pratiquement pas : en effet, dans ce cas, utiliser ces contraintes conduit à des erreurs de calcul considérables.

La méthode proposée précédemment est également la "bonne méthode" pour calculer les probabilités stationnaires si on considère une file M/GI/1/c, à capacité limitée n, dont la loi de service est modélisable par des états fictifs et quand la probabilité d'avoir une file vide est faible (situation de saturation) : dans ce cas utiliser les équations associées aux états pour lesquels la file est presque vide conduit à des erreurs de calcul considérables. On se ramène à la situation antérieure en intervertissant les rôles de k et $(n-k)$.

F.6 Cas infini et A matrice fixe

Considérons le cas où n est très grand (éventuellement infini), où la probabilité stationnaire "charge" essentiellement les états (j,k) pour lesquels k est "petit" et où la matrice A_k est fixe pour $k \gg r$: ces conditions sont satisfaites si on considère la file GI/M/r. Dans ce cas, le convexe C_n (resp. C_∞) est "presque" (resp. exactement) réduit à une demi-droite. Donc, pour connaître ce convexe, il "suffit presque" d'en connaître une demi-droite.

Soit Y la limite, en direction, des matrices $A^n U_i$ quand n tend vers l'infini (cf. F.4 et B.3). La matrice Y est définie à une constante multiplicative près, elle est à termes positifs et est telle que $AY = aY$ avec $a > 0$: si on suppose que le système est ergodique quand n tend vers l'infini on a même $a > 1$.

SUR LA RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

par Jean PELLAUMAIL
(deuxième partie)

RESUME

On donne la solution exacte d'un système particulier d'équations linéaires. Des applications seront données dans la troisième partie.

ABSTRACT

The exact solution for a specific system of linear equations is stated. Some applications will be given in next part.

NOTATIONS

Pour tout entier k, $k \geqslant 2$, on pose :

$T(k) := T_k := \{1,\ldots,k\}$:= ensemble des entiers j avec $1 \leqslant j \leqslant k$.

U_k := ensemble des (k-1)-uplets d'éléments de $(T_k \times T_k)$. Un élément v de U_k peut donc s'écrire :
$v := ((v_1,v'_1) ,\ldots,(v_i,v'_i) ,\ldots,(v_{k-1},v'_{k-1}))$

V_k := ensemble des éléments $v := (\ldots(v_i,v'_i)\ldots)$ de U_k qui sont tels que, pour $1 \leqslant j < k-1$, $v_j < v'_{j+1}$ et, pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$, $v_j \neq v'_j$.

W_k est le sous-ensemble de V_k constitué des éléments $v := (\ldots(v_i,v'_i)\ldots)$ qui satisfont à la propriété suivante : il n'existe pas d'application h définie sur T_j, avec $1 < j < k$, à valeurs dans T_{k-1} et telle que $v_{h(1)} = v'_{h(j)}$ et, pour $1 < i < j$, $v_{h(i+1)} = v'_{h(i)}$.

Dans ce qui suit, $\delta_{u,v}$ est le symbole classique de Kronecker, c'est à dire que $\delta_{u,u} := 1$ et, si $u \neq v$, $\delta_{u,v} := 0$.

Etant donné $n \geqslant 2$, i et j avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, et une matrice A $(n \times n)$, on introduit les matrices $(n \times n)$ suivantes qui sont définies par l'intermédiaire de leur terme général :

$(M_i)_{h,k} := \delta_{i,h}$

$(L_i(A))_{h,k} := a_{h,k}\ \delta_{i,h}$

$(L_{i,j}(A))_{h,k} := a_{i,k}\ \delta_{j,h}$

$(C_j(A))_{h,k} = a_{h,k}\ \delta_{j,k}$

Pour tout élément $v := (\ldots,(v_i,v'_i),\ldots)$ de V_n , soit M_v la matrice $(n \times n)$ dont le terme général est définie par :

$(M_v)_{h,k} := -1$ si il existe j tel que $(h,k) = (v_j,v'_j)$

$(M_v)_{h,h} := +1$ si il existe j tel que $h = v'_j$

$(M_v)_{h,k} := 0$ dans tous les autres cas.

LEMME 1 et NOTATION r

Soit A *une matrice* $(n \times n)$ *dont la somme des lignes est nulle. On a alors, quels que soient* i *et* j :

$$\det(A + M_i - L_i(A)) = \det(A + M_j - L_j(A))$$

Cette quantité sera notée r(A).

Preuve :

$\det(A + M_i - L_i(A)) = \det(A + M_i - L_i(A) - L_{i,j}(A) + M_j - L_j(A))$
(on a remplacé la $j^{\text{ième}}$ ligne de A par la $j^{\text{ième}}$ ligne plus la somme des autres)

$= \det(A - L_{i,j}(A) + M_j - L_j(A))$
(on a retranché la "nouvelle" $j^{\text{ième}}$ ligne de la $i^{\text{ième}}$ ligne)

$= \det(A + M_j - L_j(A))$
(on a ajouté la "nouvelle" $i^{\text{ième}}$ ligne à la $j^{\text{ième}}$ ligne).

LEMME 2

Pour tout élément v *de* V_m *avec* $m \geqslant 2$, *on a* $r(M_v) = 1$ *si* v *appartient à* W_m *et* $r(M_v) = 0$ *dans le cas contraire.*

Preuve :

On raisonne par récurrence croissante sur m. Pour $m = 2$, on a soit $M_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $M_v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; dans ces deux cas v appartient à $W_2 = W_m$ et $g(M_v) = 1$, ce qui prouve l'initialisation du raisonnement par récurrence.

On suppose alors que la propriété est satisfaite pour tout entier k, $k \leqslant m-1$. Soit v un élément de V_m et M_v la matrice associée.

1er cas : il existe i, $1 \leqslant i \leqslant m$, tel que tous les termes de la $i^{\text{ième}}$ ligne de M_v sont nuls sauf $(M_v)_{i,i}$ qui est égal à +1. Dans ce cas, on développe par rapport à la $i^{\text{ième}}$ ligne le déterminant

$r(M_v) = \det [M_v + M_j - L_j(M_v)]$, avec $j \neq i$, ce qui revient à supprimer la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $i^{\text{ième}}$ colonne de M_v .

Dans cette transformation, la matrice M_v devient une matrice M_u avec u élément de V_{m-1} . De plus, u appartient à W_{m-1} si et seulement si v appartient à W_m (ce qui achève le raisonnement par récurrence dans ce cas) : en effet, si h est la fonction qui intervient dans la définition de W_m , pour tout indice i, la ligne $v_{h(i)}$ de la matrice M_v contient au moins un terme égal à -1 et elle ne peut pas être supprimée dans la transformation précédente.

2ème cas : cas contraire du 1er cas.
Dans ce cas on va prouver, d'une part que $r(M_v) = 0$, d'autre part que v n'appartient pas à W_m ce qui achèvera le raisonnement par récurrence dans ce cas.

Dans la matrice M_v , mis à part la colonne nulle, dans chaque colonne il y a un terme égal à +1 (sur la "diagonale") et un terme égal à -1 : or ($2^{\text{ème}}$ cas), il ne peut pas y avoir de terme +1 seul sur sa ligne donc, sur chaque ligne où il y a un terme égal à +1, il y a aussi un terme égal à -1 et celui-ci est unique (sinon il y aurait davantage de termes égaux à -1 que de termes égaux à +1). Ceci implique d'abord qu'il y a une ligne nulle et donc $r(M_v) = 0$.

De plus, construisons la fonction f par récurrence de la façon suivante : soit z l'indice d'une colonne non nulle ; posons $f(1) := z$. Supposons que f(j) est défini avec $(M_v)_{f(j),f(j)} = +1$. Soit f(j+1) l'indice (qui existe et qui est unique) tel que $(M_v)_{f(j),f(j+1)} = -1$, ce qui implique $(M_v)_{f(j+1),f(j+1)} = +1$.
Il existe alors $j < m$ tel que $f(j+1) = z$ et ceci implique que v n'appartient pas à W_m : il suffit, en effet, de définir h(i) par $f(i) = v_{h(i)}$.

THEOREME 1

Soit $n > 1$. *Soit* $d := (d_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ *une famille de nombres (réels ou complexes). On suppose que, quel que soit* i, $d_{i,i} = 0$. *Soit* A *la matrice* $(n \times n)$ *dont le terme* $a_{i,j} := (A)_{i,j}$ *de la* $i^{\text{ième}}$ *ligne et de la* $j^{\text{ième}}$ *colonne est défini par :*

$a_{i,j} := -d_{j,i}$ *si* $i \neq j$

$$a_{i,i} := \sum_{j=1}^{n} d_{i,j}$$

Pour tout élément $v := (\ldots(v_i,v_i')\ldots)$ *de* V_n *on pose :*

$r(d) := r(A)$ *et*

$$c(A,v) := \prod_{i=1}^{n-1} (-a_{v_i,v_i'}) = \prod_{i=1}^{n-1} d_{v_i',v_i}$$

On a alors :

$$r(d) = r(A) = \sum_{v \in W(n)} c(A,v)$$

Preuve :

r(A) est un polynôme P homogène de degré (n-1) par rapport à l'ensemble des variables $a_{i,j}$. De plus, si on développe le déterminant associé à r(A) suivant les colonnes, on constate que, dans chaque monome du polynôme P, il n'y a pas de produit de la forme $a_{i,j}\, a_{h,j}$. Autrement dit, P est une combinaison linéaire de monomes, chacun de ces monomes étant de la forme c(A,v) avec v élément de V_n. On peut donc écrire

$$r(A) = P = \sum_{v \in V(n)} y_v\, c(A,v)$$

On va maintenant prouver que $y_v = 1$ si v appartient à W_n et que $y_v = 0$ dans le cas contraire.

Soit $v := (\ldots(v_i,v_i')\ldots) = (\ldots(v(i),v'(i))\ldots)$; pour calculer y_v, il suffit de calculer r(A) quand, dans A, on prend, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $d_{v'(i),v(i)} := 1$ et, dans tous les autres cas, $d_{h,k} := 0$. La matrice A est alors exactement la matrice M_v et le lemme 2 achève la démonstration.

THEOREME 2

Soit $n > 1$. *Soit* $d := (d_{i,j})_{i \in T(n), j \in T(n)}$ *une famille de nombres positifs avec, quel que soit* i, $d_{i,i} = 0$. *Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) $r(d) \neq 0$

(ii) *il existe* k *élément de* T_n *tel que, pour tout élément* i *de* T_n *on peut trouver une application* f *définie sur* $T_{h'}$, *avec* $h' < n$, *telle que* $f(1) = i$, $f(h') = k$ *et, pour* $1 \leqslant j < h'$, $d_{f(j),f(j+1)} > 0$.

Preuve :

On va démontrer que chacune de ces deux conditions équivaut à la propriété suivante :

(iii) il existe k élément de T_n et une application h définie sur T_n telle que $h(k) = k$ et qui satisfait aux deux conditions suivantes :

a) quel que soit i élément de T_n, $i \neq k$, on a $d_{i,h(i)} > 0$

b) quels que soient i et j avec $i \neq k$, élément de T_n et $j > 0$ on a $h^j(i) \neq i$.

Notons que cette propriété permet de mieux comprendre la structure des éléments de W_n .

1°) (i) implique (iii).

Puisque $c(A,v)$ est positif quel que soit v, on a $r(d) \neq 0$ si et seulement si il existe un élément v de W_n tel que $c(A,v) > 0$. Considérons un tel élément v. Soit k l'élément (unique) de T_n tel que, quel que soit i, $v'_i \neq k$ (c'est à dire l'indice de la colonne nulle de M_v). On définit alors la fonction h de la façon suivante : soit i élément de T_n, $i \neq k$.

Il existe un entier j (unique) tel que $i = v'_j$; on pose alors $h(i) = v_j$. Autrement dit, h(i) est l'unique entier tel que $(M_v)_{h(i),i} = -1$. D'une part, $c(A,v) > 0$ implique (iii)-a) ; d'autre part, v élément de W_m implique (iii)-b).

2°) (iii) implique (i).

On reprend "à l'envers" le raisonnement qui précède. Autrement dit, on construit d'abord la matrice M_v en posant $(M_v)_{h(i),i} = -1$ pour tout $i \neq k$ (la $k^{\text{ième}}$ colonne de M_v étant nulle) et $(M_v)_{i,i} = 1$. La matrice M_v caractérise alors v. La propriété (iii)-b) implique

que v appartient à W_n . La propriété (iii)-a) implique $c(A,v) > 0$. On a donc $r(d) > 0$.

3°) (iii) implique (ii)

On prend le même entier k dans les conditions (ii) et (iii). Soit i élément de T_n ; il existe m tel que $h^m(i) = k$; on construit donc f en posant $f(j+1) = h[f(j)]$.

4°) (ii) implique (iii)

Ce 4°) est un lemme élémentaire de théorie des graphes. Plus précisément, la fonction h peut être considérée comme une famille d'arcs orientés (i,h(i)) sans boucle (condition (iii)-b)) mais avec un point "terminal" k. On construit alors h de la façon suivante : on pose évidemment $h(k) = k$. Supposons que l'on ait défini h sur $T' \subset T_n$ (avec $k \in T'$) en sorte que, si on suit les arcs associés à h et T', on aboutit toujours à k (système connexe), mais sans avoir de boucle. Si T' est différent de T_n , on va montrer qu'on peut prolonger h sur T" avec $T' \subset T''$, $T' \neq T''$. En effet, soit i élément de $T_n \setminus T'$; soit f la fonction donnée à la condition (ii). Soit j le plus petit entier tel que f(j) appartienne à T' (on a $j > 1$). Pour $1 \leqslant i \leqslant j$, on pose $h[f(i)] = f(i+1)$. On vérifie immédiatement que h est le prolongement cherché. En itérant le procédé, et puisque T_n est fini, on obtient la propriété (iii).

NOTATIONS

Soit $n > 1$. Soit $d := (d_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de nombres avec $d_{i,i} = 0$ quel que soit i. Soit i, $1 \leqslant i \leqslant n$; on peut écrire :

$$r(d) = s_i(d) + \sum_{j=1}^{n} d_{i,j}\ t_{j,i}(d)$$

où $s_i(d)$ est un polynôme homogène de degré (n-1) de l'ensemble des variables $(d_{h,k})$ avec $h \neq i$ et $t_{j,i}(d)$ est un polynôme homogène de degré (n-2) de l'ensemble de ces mêmes variables. Evidemment, on pose $t_{i,i}(d) := 0$. Cette écriture est unique (théorie classique des polynômes) c'est à dire qu'elle constitue une définition de $s_i(d)$ et

et de $t_{j,i}(d)$.

THEOREME 3

Soit $n > 1$. *Soit* $d := (d_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$ *une famille de nombres telle que* $r(d) \neq 0$. *Soit* $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille de nombres telle que* $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$. *Soit* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *la solution du système suivant d'équations :*

(i) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

(ii) *quel que soit* i, $x_i \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, d_{j,i}$

Soit $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *la solution du système suivant d'équations :*

(iii) $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

(iv) *quel que soit* i, $y_i \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} = -u_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\, d_{j,i}$

On a alors (quel que soit i, $1 \leqslant i \leqslant n$*) :*

(v) $x_i = s_i(d)/r(d)$

(vi) $y_i = x_i + \sum_{j=1}^{n} u_j\, t_{j,i}(d)/r(d)$

De plus, quand tous les nombres $(d_{i,j})$ *sont positifs, on a :*

(vii) $|y_i - x_i| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |u_j|\, t_{j,i}/r \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |u_j| / d_{i,j}$

Preuve :

1°) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on introduit les matrices $(n \times 1)$ suivantes, définies par leur terme général :

$(O_i)_h := \delta_{i,h}$; $(X)_h := x_h$; $(Y)_h := y_h$

$(U_i)_h := -u_h(1 - \delta_{i,h}) + \delta_{i,h}$

De même, on introduit les matrices $(n \times n)$ suivantes :

$(O'_i)_{h,k} := \delta_{i,h}\,\delta_{i,k}$

et $(U'_i)_{h,k} := \delta_{i,k}\,[-u_h(1-\delta_{i,h}) + \delta_{i,h}]$

et $(U''_i)_{h,k} := -\delta_{i,k}\,u_h$

Les équations (i) et (ii) sont équivalentes au système suivant :

$B_i X = O_i$ avec $B_i := A - L_i(A) + M_i$

La solution de ce système d'équations est donc, suivant un résultat classique d'algèbre linéaire élémentaire :

$x_i = \text{dét}\,[B_i - C_i(B_i) + O'_i] \,/\, \text{dét}(B_i)$

Or $\text{dét}(B_i) = r(A)$; de plus, $s_i(d)$ est la valeur de $r(d)$ quand on remplace $d_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, par 0 ; on a donc :

$$\begin{aligned} s_i(d) &= r(A - C_i(A)) \\ &= \text{dét.}\,[A - C_i(A) + M_i - L_i[A - C_i(A)]] \\ &= \text{dét.}\,[A - L_i(A) + M_i - [C_i(A) - L_i(C_i(A))]] \\ &= \text{dét.}\,[B_i - C_i(B_i) + O'_i] \end{aligned}$$

ce qui prouve (v).

2°) Les équations (iii) et (iv) sont équivalentes au système suivant :

$B_i Y = U_i$ avec $B_i := A - L_i(A) + M_i$

ce qui implique, comme au 1°) :

$$\begin{aligned} y_i &= \text{dét.}\,[B_i - C_i(B_i) + U'_i] \,/\, \text{dét}(B_i) \\ &= r\,[A - C_i(A) + U''_i] \,/\, r(d) \end{aligned}$$

Notons que le système (iv) implique $\sum_{j=1}^{n} u_j = 0$; la somme des lignes de la matrice $G_i := (A - C_i(A) + U''_i)$ est nulle, ce qui permet de définir $r(G_i)$. Si on développe $r(G_i)$ sous la forme $\text{dét}(G_i - L_i(G_i) + M_i)$, cette quantité revient exactement à développer $r(A)$ sauf que, dans la matrice A, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$, on remplace $d_{i,j}$ par u_j. On a donc, compte tenu de la définition de s et t et de l'unicité de l'écriture d'un polynôme :

$$r(G_i) = s_i(d) + \sum_{j=1}^{n} u_j\, t_{j,i}(d)$$

ce qui donne la relation (vi).

Quand les nombres $d_{i,j}$ sont positifs, la définition de $t_{j,i}(d)$ implique, pour $i \neq j$:

$$t_{j,i}(d) / r(d) \leq 1 / d_{i,j}$$

d'où l'inégalité (vii).

THEOREME 4

Soit E *un ensemble comprenant* n *éléments,* $n > 1$. *Pour tout élément* e *de* E, *on appelle* F(e) *l'ensemble* E *privé de l'élément* e. *Soit* g *une fonction, réelle ou complexe, définie sur* $(E \times E)$. *Soit* H *l'ensemble des couples* (e,h) *où* e *est un élément de* E *et* h *est une application définie sur* F(e) *satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) $h(e) = e$

(ii) *pour tout élément* e' *de* F(e), $g\,[e', h(e')] \neq 0$

(iii) *pour tout élément* e' *de* F(e) *et pour tout entier* $k \geq 1$ *on a* $h^k(e') \neq e'$

Pour tout élément e *de* E *on suppose* $g(e,e) = 0$. *On pose alors :*

$$r(g) := \sum_{(e,h) \in H} \prod_{e' \in F(e)} g[e', h(e')]$$

puis, pour tout élément e *de* E :

$$r(g) = s_e(g) + \sum_{e' \in F(e)} g(e,e')\, t_{e',e}(g)$$

où s_e *est un polynôme homogène de degré* (n-1) *de l'ensemble des variables* g(e',e"), $e' \neq e$ *et* $t_{e',e}$ *est un polynôme homogène de degré* (n-2) *relativement à l'ensemble de ces mêmes variables.*

L'écriture qui précède définit s_e *et* $t_{e',e}$ *pour* $e' \neq e$.

On considère le système suivant d'équations (où la famille $(x_e)_{e \in E}$ *est la famille des inconnues) :*

(iv) $\sum_{e\in E} x_e = 1$

et, quel que soit e *élément de* E :

(v) $x_e \sum_{e'\in E} g(e,e') = \sum_{e'\in E} x_{e'}\, g(e',e)$

Si on suppose $r(g) \neq 0$ *, ce système a une et une seule solution définie par, quel que soit* e *élément de* E :

(vi) $x_e = s_e(g)/r(g)$

Preuve :

Ce théorème 4 est un corollaire immédiat de la première partie du théorème 3. Les modifications se situent au niveau de la présentation :

- d'une part, la condition (ii) permet d'éliminer dans l'écriture de r les produits nuls,
- d'autre part, la formulation du théorème 4 ne privilégie aucune relation d'ordre sur E ; c'est uniquement au niveau de la démonstration du théorème 3 qu'il était nécessaire d'identifier l'ensemble E et l'ensemble des n premiers entiers pour pouvoir utiliser les notations matricielles et la théorie des déterminants.

Nous allons maintenant donner un exemple non trivial pour lequel on peut calculer explicitement r(g).

UN EXEMPLE

Dans cet exemple, E est l'ensemble des couples (i,j) avec $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $0 \leqslant j \leqslant m$; g(e,e') est différent de 0 dans les cas suivants et ceux-là seulement :

(i) $e = (i,j)$ et $e' = (i',j)$ avec $i' > i$ et $i+i' \neq 5$

(ii) $e = (3,j)$ et $e' = (1,j+1)$

(iii) $e = (4,j)$ et $e' = (2,j+1)$

(iv) $e = (2,j)$ et $e' = (1,j-1)$, $j \geqslant 1$

(v) $e = (4,j)$ et $e' = (3,j-1)$, $j \geqslant 1$

Considérons une file unique, à capacité limitée m, dont la loi d'arrivée et la loi de service sont le produit de convolution de deux lois exponentielles et donc peuvent être modélisées comme suit : pour chacune de ces deux lois, la modélisation se fait par l'introduction de deux états fictifs que l'on notera a_1 et a_2 (resp. d_1 et d_2) pour la loi d'inter-arrivées (resp. d'inter-départs). On pose $f(a_1,d_1) := 1$, $f(a_2,d_2) := 4$, $f(a_1,d_2) := 2$, $f(a_2,d_1) := 3$.

En ce qui concerne la loi d'arrivée, l'état fictif passe de l'état a_1 à l'état a_2 sans provoquer d'arrivée. Par contre, quand l'état fictif passe de l'état a_2 à l'état a_1 ceci provoque une arrivée. La modélisation est parfaitement analogue au niveau des départs.

En vérifie alors immédiatement que, pour ce modèle, les conditions (i) à (v) sont satisfaites en prenant comme ensemble E les couples (i,j) où j est la taille de la file et i est la valeur de f pour le couple d'états fictifs considéré.

Pour alléger les notations, quel que soit j, $j \geqslant 0$, on pose :

$u_{x,y}(j) := g\,[(x,j),(y,j)]$; $v'(j) := u_{2,4}(j)$;

$v''(j) := u_{3,4}(j)$; $w'(j) := u_{1,2}(j)$; $w''(j) := u_{1,3}(j)$;

$q_3(j) := g\,[(3,j),(1,j+1)]$; $q_4(j) := g\,[(4,j),(2,j+1)]$;

$q_2'(j) := g[(2,j),(1,j-1)]$; $q_4'(j) := g\,[(4,j),(3,j-1)]$;

$w(j) := (w'+w'')(j)$;

Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, on considère les fonctions $a_i(.)$ définies par récurrence (croissante) sur j de la façon suivante :

$a_1(o) := (w''\, q_3\, v'\, q_4)(o)$; $a_2(o) := (q_3\, q_4\, v'\, w')(o)$;

$a_3(o) := (w\, v'\, v''\, q_4)(o)$;

et, pour $j \geqslant 1$:

$$a_1(j) := (q_3\, w'')(j)\ \{(v'\, q_4)(j) \sum_{i=1}^{3} a_i(j-1)$$
$$+ (v'\, q_4')(j)(a_1+a_2)(j-1) + [q_2'(q_4+q_4')]\,(j)\, a_1(j-1)\}$$

$$a_2(j) := (q_3\, q_4\, v'\, w')(j) \sum_{i=1}^{3} a_i(j-1)$$

$$a_3(j) := (v'' q_4)(j) \{(v' w)(j) \sum_{i=1}^{3} a_i(j-1) + (q_2' w'')(j)\, a_1(j-1)\}$$

On définit de façon analogue les fonctions $b_k(j)$ sauf que, dans chaque couple $e = (i,j)$, on intervertit les rôles de 2 et 3 pour i d'une part, de j et (m-j) d'autre part : attention, il n'y a pas d'interversion en ce qui concerne l'indice k dans $b_k(j)$.

On pose $a_5(j) := \sum_{i=1}^{3} a_i(j)$ et $b_5(j) := \sum_{i=1}^{3} b_i(j)$.

Si e est de la forme (i,m) on a :

$$s_{1,m}(g) = (q_4' v'' v')(m)\,(a_1+a_2)(m-1) + (q_4' v'' q_2')(m)\, a_1(m-1)$$

$$s_{2,m}(g) = (q_4' v'' w')(m)\, a_5(m-1) + (q_4' v'' w'')(m)\, a_3(m-1)$$

$$s_{3,m}(g) = (q_4' w'' v')(m)\,(a_1+a_2)(m-1) + q_4' q_2' w''(m)\, a_1(m-1)$$

$$s_{4,m-1}(g) = (v' v'' w)(m)\, a_5(m-1) + (v'' w'' q_2')(m)\, a_1(m-1)$$

Si e est de la forme (i,o) on a des relations analogues qui donnent $s_{i,o}$ en fonction des fonctions $b_i(m-1)$.

Quand $e = (i,j)$ est tel que $1 \leqslant j \leqslant m-1$, on a les relations suivantes dans lesquelles les symboles j et j-1 ont été omis ($v', \ldots q_3, \ldots$ sont pris au point j ; a_i et b_i sont pris au point (j-1)) :

$$\begin{aligned} s_{1,j} &= q_4' v' v''(a_1+a_2)b_5 + q_4 v' v'' a_5(b_1+b_2) \\ &\quad + q_2' q_4' a_1 b_5 v'' + q_3 q_4 a_5 b_1 v' \\ &\quad + q_3 q_4'(a_1+a_2) b_1 v' + q_2' q_4 a_1(b_1+b_2) v'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2,j} &= w' v'' \left[q_4(b_1+b_2) + q_4' b_5\right] a_5 + w' q_3 b_1(q_4+q_4') a_5 \\ &\quad + w'' q_4' a_3 v'' b_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{3,j} &= w'' v'\left[q_4'(a_1+a_2) + q_4 a_5\right] b_5 + w'' q_2' a_1(q_4+q_4') a_5 \\ &\quad + w' q_4 b_3 v' a_5 \end{aligned}$$

$$s_{4,j} = v' v'' w a_5 b_5 + v' q_3 w' a_5 b_1 + v'' q_2' w'' a_1 b_5$$

Preuve :

1°) H est l'ensemble des applications h' définies sur E, à valeurs dans E et qui satisfont aux propriétés suivantes (cf. théorème 4) :

(i) il existe un élément h'_o et un seul de E tel que $h'(h'_o) = h'_o$.

(ii) quel que soit e élément de E, $e \neq h'_o$, $g[e,h'(e)] \neq 0$.

(iii) quel que soit e élément de E, $e \neq h'_o$, et quel que soit l'entier $k \geqslant 1$ on a $h'^k(e) \neq e$.

2°) On introduit les notations suivantes, pour $j \leqslant m$:
$E(j) := E_j$ est le sous-ensemble de E constitué des couples (i,k) avec $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $o \leqslant k \leqslant j$; H(j) est l'ensemble des applications h définies sur l'ensemble E_j pour lesquelles les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) il n'existe pas de couple $(i,k) = e$ appartenant à E_j tel que $h(e) = e$.

(ii) il existe un élément h' de H tel que h soit la restriction de h' à E_j .

3°) F(1,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(3,j) = (1,j+1)$ et $h(1,j) = (3,j)$;

F(2,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(3,j) = (1,j+1)$ et $h(1,j) = (2,j)$;

F(3,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(3,j) = (4,j)$.

La famille $\{F(i,j)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ constitue une partition de H(j).

4°) Si h appartient à F(3,j), on a $h(4,j) = (2,j+1)$: en effet, raisonnons par l'absurde et supposons $h(4,j) = (3,j-1)$; il existe un entier k tel que $h^k(3,j-1) = (i',j+1)$; si on considère le plus petit de ces tels entiers k, on a $h^{k-1}(3,j-1) = (i',j)$ avec $i' = 3$ ou 4 ce qui contredit la condition 1°)(iii). Ceci explique que, dans les relations de récurrence sur les fonction a_i il n'y a jamais de produit de la forme $v'' q'_4$. On prouve alors que $h(2,j+1) = (4,j+1)$ ou $(2,j+1)$.

De façon analogue, si h appartient à H(j) et si $h(1,j) = (2,j)$ (ce qui est le cas si h appartient à F(2,j)) on a $h(2,j) = (4,j)$ (on n'a donc pas de produit de la forme $w' q_2'$) ; là encore, raisonnons par l'absurde et supposons $h(2,j) = (1,j-1)$; il existe un entier k tel que $h^k(1,j-1) = (i',j)$; pour le plus petit de ces tels entiers k, on a $h^{k+1}(2,j) = (i',j)$ avec $i' = 1$ ou 2 ce qui contredit la condition 1°)(iii).

Enfin, si h appartient à F(2,j), le même type de raisonnement montre que $h(4,j) = (2,j+1)$ et alors $h(2,j+1) = (4,j+1)$ ou $(2,j+1)$.

5°) Pour chaque couple (i,j), $1 \leqslant i \leqslant 3$, $j \geqslant 1$ et pour chaque élément h' de F(i,j-1), on détermine quels sont les éléments h de H(j) qui prolongent h' et à quel ensemble F(i',j) ce prolongement h appartient. Compte tenu du 4°) qui précède, cette étude est très simple si $i = 2$ ou $i = 3$. Etudions le cas $i = 1$. On considère donc un élément h' de F(1,j-1).

1er cas : le prolongement h de h' appartient à F(1,j) ; on a quatre possibilités distinctes, $h(2,j) = (4,j)$ ou $(1,j-1)$ et $h(4,j) = (3,j-1)$ ou $(2,j+1)$.

2ème cas : le prolongement h de h' appartient à F(2,j) et il n'y a qu'une seule possibilité.

3ème cas : le prolongement h de h' appartient à F(3,j) et il y a trois possibilités : on ne peut pas avoir à la fois $h(1,j) = (2,j)$ et $h(2,j) = (1,j-1)$.

6°) Pour tout couple (i,j), $1 \leqslant i \leqslant 3$, $j \geqslant 0$, on pose :

$$a_i(j) := \sum_{h \in F(i,j)} \prod_{e \in E(j)} g\,[e,h(e)]$$

L'étude effectuée ci-dessus montre que ces fonctions satisfont aux relations de récurrence données précédemment.

La file considérée étant parfaitement symétrique quand on intervertit les départs et les arrivées, on a les propriétés analogues pour la famille $b_i(j)$.

7°) Plus précisément, on définit les ensembles E_j', $H'(j)$ puis $(G(i,j))_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ de façon analogue à E_j, $H(j)$ et $(F(i,j))_{1 \leqslant i \leqslant 3}$;

notamment $E'(j) = E'_j$ est l'ensemble des couples (i,k) avec $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $k \geqslant m-j$ (rappelons que m est la taille maximale de la file) et $H'(j)$ est l'ensemble des applications h définies sur E'_j satisfaisant aux conditions (i) et (ii) données au 2°) de cette preuve.

Par exemple, pour $i = 1$, $G(1,j)$ est l'ensemble des éléments h de $H'(j)$ tels que $h(2,m-j) = (1,m-j-1)$ et $h(1,m-j) = (2,m-j)$; de même $G(2,j)$ est l'ensemble des éléments h de $H'(j)$ tels que $h(2,m-j) = (1,m-j-1)$ et $h(1,m-j) = (3,m-j)$; enfin $G(3,j)$ est l'ensemble des éléments h de $H'(j)$ tels que $h(2,m-j) = (4,m-j)$.

Enfin, on pose :

$$b_i(j) := \sum_{h \in G(i,j)} \prod_{e \in E'(j)} g[e,h(e)]$$

8°) Les relations données pour la famille $s_e(g)$ s'établissent en considérant tous les cas possibles comme pour les relations de récurrence portant sur la famille $a_i(.)$.

PROBABILITES STATIONNAIRES
DE QUELQUES PETITS SYSTEMES MARKOVIENS

par A. KHELLADI,
O. LAGHA,
J. PELLAUMAIL.

(troisième partie)

RESUME

On calcule la probabilité stationnaire de quatre "petits" systèmes markoviens en utilisant le théorème fondamental de la deuxième partie.

ABSTRACT

Steady-states probabilities are explicitely computed via method introduced in the previous part.

INTRODUCTION

Dans cette partie, nous allons donner quatre exemples de "petits" systèmes markoviens dont la probabilité stationnaire peut être calculée à l'aide du théorème 4 de la partie précédente.

Rappelons que, les éléments de H - dont la détermination joue un rôle crucial pour appliquer le théorème 4 - s'interprètent en termes de théorie des graphes. Plus précisément, les éléments de E étant des points, les éléments de $(E \times E)$ sont des arcs orientés. Soit G l'ensemble de ces arcs orientés (e,e') pour lesquels $g(e,e') \neq 0$. Un élément (e,h) de H est alors la donnée d'un "point terminal" e et d'une famille d'arcs $(e',h(e'))$ appartenant tous à G, telle que de chaque point $e' \neq e$ part un arc et un seul, soit $(e',h(e'))$, et telle que si un "observateur" parcourt ces arcs, en respectant leur orientation, il ne revient jamais en un point qu'il a déjà visité et, par conséquent, il finit par arriver en e.

Un élément de H pourrait donc être appelé un "réseau fluvial connexe". Cette interprétation facilite considérablement la compréhension de ce qui suit.

Notons aussi que, pour tout élément e de E, on a :

$$s_e(g) = \sum_{(e',h)\in H, e'\neq e} \prod_{e'\in F(e)} g[e',h(e')]$$

autrement dit, pour calculer $s_e(g)$, on considère toutes les familles d'arcs orientés évoquées précédemment - les réseaux fluviaux - pour lesquelles e est le "point terminal".

PREMIER EXEMPLE : FILE UNIQUE

Dans cet exemple, E est l'ensemble des entiers k, $1 \leqslant k \leqslant n$. La fonction g est telle que $g(i,j) \neq 0$ si et seulement si $|i-j| = 1$. On voit immédiatement que, à chaque élément i de E correspond une fonction h et une seule : si $1 < i < n$, elle correspond aux deux chemins, issus respectivement de 1 et n, qui aboutissent en i. On a donc :

$$r(g) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\prod_{j=1}^{i-1} g(j,j+1) \Big] \Big[\prod_{j=i+1}^{n} g(j,j-1) \Big]$$

Evidemment, ceci est compatible avec le résultat classique $x_i/x_{i+1} = g(i+1,i)/g(i,i+1)$.

Plus précisément :

$$s_i(g) = \prod_{j=1}^{i-1} g(j,j+1) \prod_{j=i+1}^{n} g(j,j-1)$$

DEUXIEME EXEMPLE

Dans cet exemple, E est l'ensemble des entiers k, $1 \leqslant k \leqslant n$ et n est "petit". On va traiter les cas n = 3, 4 et 5 mais, évidemment, la méthode proposée s'étend facilement à des valeurs plus grandes de n à condition toutefois que n ne soit "pas trop grand". On fera "comme si" l'on avait $g(i,j) \neq 0$ pour $i \neq j$ ce qui, pour le problème étudié, n'est pas une restriction. On note X l'ensemble des permutations x de E, c'est à dire l'ensemble des bijections de E sur E. Pour alléger les notations, on pose $x_i := x(i)$.

On a alors :

1°) Pour n = 3 :

$$r(g) = \sum_{x \in X} g(x_2,x_1)\Big[g(x_3,x_2) + \frac{1}{2}\, g(x_3,x_1)\Big]$$

2°) Pour n = 4 :

$$r(g) = \sum_{x \in X} g(x_2,x_1)\Big[g(x_3,x_2)\, g(x_4,x_3) + g(x_3,x_1)\, g(x_4,x_3) + \frac{1}{6}\, g(x_3,x_1)\, g(x_4,x_1)\Big]$$

3°) Pour n = 5 :

$$r(g) = \sum_{x \in X} g(x_2,x_1)\Big\{\frac{1}{24} \sum_{i=3}^{5} g(x_i,x_1) + \prod_{i=3}^{5} g(x_i,x_{i-1}) + h\, g(x_3,x_1)\, g(x_4,x_3)\Big\}$$

avec :

$$h := \frac{1}{2}\, g(x_5,x_2) + g(x_5,x_4) + \frac{1}{2}\, g(x_5,x_1)$$

De plus, dans ces trois cas, x_1 est le "point terminal" : pour calculer $s_i(g)$ il suffit donc, dans les expressions qui précèdent, de remplacer $\sum_{x \in X}$ par $\sum_{x \in X, x_1 = i}$.

TROISIEME EXEMPLE : FILE REGULEE

Soit u, v, w trois nombres entiers avec $0 < u < v < w$. Dans cet exemple, E est l'ensemble des couples d'entiers (i,j) avec $0 \leqslant j \leqslant w$ et $i = 1$ si $j < u$, $i = 2$ si $j > v$, et $i = 1$ ou $i = 2$ si $u \leqslant j \leqslant v$; g(e,e') est différent de zéro dans les cas suivants et ceux-là seulement :

$e = (1,j)$, $e' = (1,j')$, $j \leqslant v$, $j' \leqslant v$, $j \neq j'$, $|j-j'| = 1$,

$e = (2,j)$, $e' = (2,j')$, $u \leqslant j$, $u \leqslant j'$, $j \neq j'$, $|j-j'| = 1$

$e = (2,u)$ et $e' = (1,u-1)$

$e = (1,v)$ et $e' = (2,v+1)$

Si g est positif il définit le générateur infinitésimal d'une file unique régulée par un indicateur qui peut prendre les valeurs 1 ou 2. L'évolution de la file est markovienne si on connait la taille de la file et l'état de l'indicateur.

Si la taille de la file dépasse (strictement) la valeur v, l'indicateur prend la valeur 2 et il garde cette valeur 2 jusqu'à ce que la file ait une taille qui devienne (strictement) inférieure à u : l'indicateur reprend alors la valeur 1 jusqu'à ce que la taille de la file dépasse (strictement) la valeur v.

Par ailleurs, la file est à capacité limitée w.

On suppose évidemment que les taux d'arrivée et/ou de service dépendent de l'état de l'indicateur. Par exemple, quand l'indicateur prend la valeur 2, on peut supposer que l'on augmente le nombre de serveurs ou que l'on limite le taux d'entrée. Cet exemple a été étudié par LE NY sans utiliser le théorème de l'introduction.

L'ensemble des couples (arcs orientés) (e,e') tels que $g(e,e') \neq 0$

a une forme très simple. Il est donc facile de déterminer les divers systèmes d'arcs associés au théorème donné dans l'introduction, et on obtient ce qui suit.

Pour alléger les notations, on pose :

$c := g\,[(1,v),(2,v+1)]$ et $d := g\,[(2,u),(1,u-1)]$

On introduit les fonctions suivantes, pour $j \leqslant k$:

$$a_x(j,k) := \prod_{i=j}^{k-1} g\,[(x,i),(x,i+1)]$$

$$b_x(j,k) := \prod_{i=j+1}^{k} g\,[(x,i),(x,i-1)]$$

Evidemment, suivant les conventions usuelles,

$a_x(j,j) := 1$ et $b_x(j,j) := 1$.

On a alors :

- pour $0 \leqslant i \leqslant v$:

$$s_{(1,i)}(g) = b_2(u,w)\, d \left\{ \sum_{j=e(i)}^{v-1} a_1(o,i)\, b_1(i,j)\, a_1(j+1,v)\, c + a_1(o,i)\, b_1(i,v) \right\}$$

où $e(i) := \sup.\ \{u-1,i\}$

- et pour $u \leqslant i \leqslant w$:

$$s_{(2,i)}(g) = a_1(o,v)\, c \left\{ \sum_{j=u}^{e'(i)} b_2(i,w)\, a_2(j+1,i)\, b_2(u,j)\, d + b_2(i,w)\, a_2(u,i) \right\}$$

où $e'(i) := \inf.\ \{i-1,1+v\}$

QUATRIEME EXEMPLE : FILE UNIQUE AVEC DEPARTS GROUPES

Dans cet exemple, E est l'ensemble des entiers j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$; $g(j,k)$ est différent de 0 dans les cas suivants et ceux-là seulement :

1°) $0 \leqslant j \leqslant n-2$ et $k = j+1$

2°) $0 \leqslant k < j \leqslant n-1$ et $j-k \leqslant 2$

Autrement dit, si g est positif, il définit le générateur infinitésimal d'une file dont l'évolution est markovienne relativement à la taille de la file, les arrivées se font une à une mais les départs peuvent être groupés, la taille du groupe étant inférieure ou égale à deux.

On pose :

$$b(j) := \prod_{i=o}^{j} g[i,i+1]$$

$a(0,1) := g(1,0)$; $a(1,1) := a(2,1) := 0$;

$a'(0,1) := g(1,2)$; $a'(1,1) := a'(2,1) := 0$;

ensuite, les fonctions a et a' sont définies par récurrence croissante sur i et j pour $j > 1$ et $0 \leqslant i < j \leqslant n-2$ de la façon suivante :

- pour $i < j$:

$$a(i,j+1) := a(i,j)\,[g(j+1,j-1) + g(j+1,j)] + a'(i,j)\,g(j+1,j-1)$$

$$a'(i,j+1) := a(i,j)\,g(j+1,j+2)$$

- pour $i = j$:

$$a(j,j+1) := b(j-1)\,[g(j+1,j-1) + g(j+1,j)]$$

$$a'(j,j+1) := b(j-1)\,g(j+1,j+2)$$

On a alors, en posant $g(n-1,n) := 0$:

- pour $i < n-1$:

$$s_i(g) = a(i,n-1)$$

et $s_{n-1}(g) = b(n-2)$

Preuve :

1°) On introduit les notations suivantes :

H est l'ensemble des applications h définies sur E, à valeurs dans

E et qui satisfont aux propriétés suivantes (cf. introduction) :

(i) il existe un élément h'_o et un seul de E tel que $h'(h'_o) = h'_o$

(ii) quel que soit i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $i \neq h'_o$, $g[i,h'(i)] \neq 0$

(iii) quel que soit i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $i \neq h'_o$, et quel que soit l'entier k, $k \geqslant 1$, on a $h'^k(i) \neq i$.

$E_j := \{0,\ldots,j\}$ est l'ensemble des entiers i, $0 \leqslant i \leqslant j$.

H(j) est l'ensemble des applications h définies sur l'ensemble E_j pour lesquelles il existe un élément h' de H tel que h soit la restriction de h' à E_j ; si $h'_o \leqslant j$, on pose $h_o := h'_o$ (ce qui est possible puisque h'_o ne dépend que de h) ; si $h'_o > j$, on pose $h_o := j+1$.

F(1,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(j) < j$.

F(2,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(j-1) \leqslant j-1$ et $h(j) = j+1$.

F(3,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(j-1) = j$ et $h(j) = j+1$;

F(4,j) est l'ensemble des éléments h de H(j) tels que $h(j) = j$ (et donc $h_o = j$) .

La propriété (ii) de H implique que la famille $(F(k,j))_{1 \leqslant k \leqslant 4}$ est une partition de H(j).

Evidemment, toutes ces notations s'interprètent simplement en termes de théorie des graphes et cette interprétation facilite la compréhension de la preuve qui suit : notamment h_o est le "point terminal".

2°) Soit h un élément de H ; supposons qu'il existe $i < n$ tel que $h(i) \leqslant i$; nous allons prouver que $h_o \leqslant i$. Ceci est évident si $h(i) = i$. Supposons $h(i) < i$ et raisonnons par l'absurde. Puisque l'ensemble E_i est fini, la propriété (iii) de H implique qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $h^k(i) \geqslant i$; soit k le plus petit de ces tels

entiers ; la propriété (ii) de H implique $h^k(i) = i$ ce qui contredit (iii).

On en déduit que, si h appartient à H(j) et s'il existe $i \leqslant j$ tel que $h(i) \leqslant i$, on a $h_o \leqslant i$. Notamment, si h appartient à F(1,j) ou F(2,j) on a $h_o \leqslant j-1$.

3°) Soit h un élément de H ; supposons qu'il existe $i \leqslant j$ tel que l'on ait à la fois $h(i-2) = i-1$ et $h(i-1) = i$; en considérant l'ensemble $\{i,\ldots,n-1\}$ et en raisonnant comme au 2°) ci-dessus, on montre que $h_o \geqslant i$.

On en déduit que, si h appartient à H(j) et s'il existe $i \leqslant j$ tel que $h(i-2) = i-1$ et $h(i-1) = i$, on a $h_o \geqslant i$. Dans ce cas, le 2°) implique $h(u) > u$ pour $u < i$. Notamment, si h appartient à F(3,j), $h_o \geqslant j+1$ et si h appartient à F(4,j), $h(j-1) = j$.

4°) Pour chaque valeur de k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, on va étudier quels sont les éléments de H(j+1) qui prolongent les éléments de F(k,j) et auquel des ensembles F(k',j+1) chaque tel prolongement appartient.

On considère d'abord le cas $j \geqslant 2$. Si h appartient à F(1,j), on peut le prolonger en posant $h(j+1) := j-1$ ou $h(j+1) := j$, ce qui donne un élément de F(1,j+1); on peut aussi poser $h(j+1) := j+2$ ce qui donne un élément de F(2,j+1). Par contre on ne peut pas poser $h(j+1) := j+1$ puisque $h_o \leqslant j-1$ (cf. 2°)).
Si h appartient à F(2,j) le seul prolongement possible consiste à poser $h(j+1) := j-1$ (cf. 2°) et 3°)) et on obtient un élément de F(1,j+1).

Si h appartient à F(3,j), il y a deux prolongements possibles en posant, soit $h(j+1) := j+1$ et on obtient un élément de F(4,j+1), soit $h(j+1) := j+2$ et on obtient un élément de F(3,j+1).

Enfin, si h appartient à F(4,j), il y a trois prolongements possibles (rappelons que, dans ce cas, $h(j-1) = j$) : seul le prolongement $h(j+1) := j+1$ est impossible.

On pose $g(j,j) := 1$, quel que soit j.

Des considérations qui précèdent on déduit facilement que :

$$b(j) = \sum_{h \in F(3,j)} \prod_{i=o}^{j} g[i,h(i)]$$

$$b(j-1) = \sum_{h \in F(4,j)} \prod_{i=o}^{j} g[i,h(i)]$$

en effet, F(3,j) et F(4,j) n'ont qu'un seul élément.

Soit G(i,j) (resp. G'(i,j)) l'ensemble des éléments h de F(1,j) (resp. F(2,j)) tels que $h(i) = i$: ces ensembles sont vides pour $i \geqslant j$.

De plus, on vérifie que les formules de récurrence données sur a(i,j) et a'(i,j) sont satisfaites si on pose

$$a(i,j) := \sum_{h \in G(i,j)} \prod_{k=o}^{j} g[k,h(k)]$$

$$a'(i,j) := \sum_{h \in G'(i,j)} \prod_{k=o}^{j} g[k,h(k)]$$

Le calcul de s_i est alors immédiat.

REFERENCES

[Ast] M.A. ASTOUATI, "Méthode des convexes pour le calcul de la probabilité stationnaire d'un réseau à deux stations à lois de service exponentielles", thèse de magister, Alger 1985.

[BoD] P. BOYER, A. DUPUIS, L. ROOMOEUF, Y. ADB EL FATTAM, "Un automate à apprentissage pour réguler l'activité d'un serveur", note interne, CNET - LANNION 1985.

[Boy] P. BOYER, "Deux files en tandem à capacité limitée", thèse de 3ème cycle, 2ème partie, RENNES 1982.

[Cia] P.G. CIARLET, "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation", Masson, 1982.

[Coh] J.W. COHEN, "The single server queue", North-Holland, 1969.

[Cox] D.R. COX, "A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes", Proc. Cambridge Philosophical Society 51, 313-319, 1955.

[Fel] W. FELLER, "An introduction to probability theory and its applications", Wiley, 1950, 1957, 1968.

[Lar] T. LARDJANE, "Conditions suffisantes de réversibilité et de composition de réseaux de files d'attente", thèse de magister, Alger 1985.

[Leb] M. LEBAH, "Probabilités stationnaires pour des réseaux à deux stations et à plusieurs classes de clients", thèse de magister, Alger 1985.

[MaP] R. MARIE et J. PELLAUMAIL, "Steady-state probabilities for a queue with a general service distribution on state-dependent arrivals", IEEE - TSE, vol. SE.9, N° 1, janvier 1983.

[Oum] B. OUMEHDI, "Modélisation avec pivot d'un réseau de files d'attente à lois d'arrivée et de départ non exponentielles", thèse de magister, Alger 1985.

[Pel] J. PELLAUMAIL, "Modélisation avec pivot pour une loi générale", R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle, 19, n° 3, 1985.

[PuP] G. PUJOLLE et D. POTIER, "Réseaux de files d'attente à capacité limitée avec des applications aux systèmes informatiques", R.A.I.R.O., Informatique, 13, n° 2, 1979.

[Rev] D. REVUZ, "Markov chains", North-Holland, 1975.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique