Distribution du temps total de séjour dans un sous-ensemble d'états transitoires d'un processus markovien homogène à espace d'état fini

Raymond Marie, Bruno Sericola

INRIA

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 585

DISTRIBUTION DU TEMPS TOTAL DE SÉJOUR DANS UN SOUS-ENSEMBLE D'ÉTATS TRANSITOIRES D'UN PROCESSUS MARKOVIEN HOMOGÈNE À ESPACE D'ÉTAT FINI

Raymond MARIE
Bruno SERICOLA

Novembre 1986

IRISA INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
Avenue du Général Leclerc
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Tél. : (99) 36.20.00
Télex : UNIRISA 95 0473 F

Publication Interne n° 320 - Novembre 86 - 29 pages

DISTRIBUTION DU TEMPS TOTAL DE SEJOUR DANS UN SOUS-ENSEMBLE D'ETATS TRANSITOIRES D'UN PROCESSUS MARKOVIEN HOMOGENE A ESPACE D'ETAT FINI.

DISTRIBUTION OF TOTAL TIME SPENT
IN A SUBSET OF TRANSIENT STATES
OF A HOMOGENEOUS MARKOV PROCESS WITH FINITE STATE SPACE.

Raymond **MARIE**
Bruno **SERICOLA**

RESUME

On considère des systèmes dont le comportement peut être modélisé par un processus Markovien homogène . On calcule la distribution du temps total de séjour (sur $[0,+\infty[$) dans un sous-ensemble d'états transitoires de l'espace des états du processus . On montre alors que le calcul de cette distribution peut se ramener au calcul de la distribution du temps d'absorption d'un autre processus Markovien homogène que l'on construit à partir du premier.

ABSTRACT

Consider systems that can be modeled as homogeneous Markov processes . The distribution of total time spent in a subset of transient states of the state space is calculated . Therefore , we show that calculating this distribution is equivalent to calculating absorption time distribution of another homogeneous Markov process which is constructed from the first.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L.A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

1. INTRODUCTION

Les chaînes de Markov à temps continu sont souvent utilisées pour modéliser des systèmes informatiques (et autres) lorsqu'on souhaite étudier globalement les aspects de fiabilité et performance. Cette vision globale est d'ailleurs à l'origine du néologisme "performabilité".

Si l'on considère des systèmes tolérants aux pannes sous ces deux aspects, alors on est en général conduit à modéliser ces systèmes sous forme de chaînes de Markov à temps continu où un ou plusieurs états absorbants représentent le ou les états de panne fatale. On a donc à faire à des systèmes où les phénomènes intéressants sont liés aux états transitoires de la chaîne.

Si on suppose par exemple que, parmi l' ensemble des états transitoires, seul un sous-ensemble B représente un mode de fonctionnement particulier (e.g. le système peut effectuer les tâches pour lesquelles il a été conçu), alors on conçoit l'intérêt de connaître la distribution du temps total pendant lequel le système se trouve dans ce sous-ensemble B.

A notre connaissance, on trouve dans la littérature soit la distribution de la variable temps total de séjour si le sous-ensemble B se réduit à un seul état [CINL 75] ou pour des sous-ensembles B bien particuliers, soit la distribution du temps du premier séjour dans le sous-ensemble B [NEUT 81].

Dans ce rapport, on met en évidence l'expression de la distribution du temps total de séjour dans un sous-ensemble d'états transitoires B quelconque. Ce résultat est obtenu au chapitre 4 après avoir préalablement (chapitre 3) mis en évidence la distribution du nombre total de visites effectuées dans le sous-ensemble B. Les généralités et l'introduction des principales notations sont regroupées au chapitre 2. Dans le chapitre 5, on met en évidence une autre propriété importante du temps total de séjour dans le sous-ensemble B qui peut s'énoncer ainsi :

"Il existe toujours une chaîne de Markov à temps continu sur un espace d'état de cardinal : $|B|+1$, donc plus petite que la chaîne initiale, comprenant un état absorbant et telle que la distribution du temps d'absorption sur cette dernière chaîne soit égale à la distribution du temps total de séjour dans le sous-ensemble B de la chaîne initiale." Le générateur infinitésimal de cette nouvelle chaîne est également mis en évidence au chapitre 5.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux exemples et aux conclusions.

2. GENERALITES ET NOTATIONS.

Soit $X=\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien sur un ensemble d'états E fini ;
on pose $E=\{1, 2, \ldots, m, m+1\}$ où $1, 2, \ldots, m$ sont des états transitoires et $m+1$ est absorbant. (Le cas où E contient plusieurs états absorbants ou des classes d'états récurrents n'ajoute pas de difficulté théorique ; il est évoqué dans la remarque de la section 4).

Soit A le générateur infinitésimal du processus X, on pose:

$$A = (\lambda_{ij}) \qquad \text{et} \qquad \lambda(i) \triangleq -\lambda_{ii} \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq m+1.$$

$\lambda(i)$ est donc le taux de départ instantané de l'état i . Afin de simplifier l'écriture des expressions conditionnelles à l'état initial , on pose:

$$P_i(.) \triangleq P(.\ /X_0=i)\ . \qquad \text{(probabilité)}$$
$$E_i(.) \triangleq E(.\ /X_0=i)\ . \qquad \text{(espérance)}$$

Dans toute la suite , on écrira V.A. pour variable aléatoire . Sans nuire à la généralité , on numérote les états de E de la façon suivante :

$E = B \cup B^c \cup \{m+1\}$.

où $B = \{1 ,\dots, l\}$, $1 \le l \le m$

et $B^c = \{l+1,\dots,m\}$ lorsque B^c n'est pas vide , i.e lorsque $l < m$.

Soit W la V.A. "temps de séjour cumulé dans B sur $[0,+\infty[$". Rappelons que l'objet de ce rapport est d'obtenir la distribution de W . W peut s'écrire comme une somme de temps de séjour :

$$W = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{N_j} \tau_j^k .$$

où τ_j^k est la V.A. "temps du k-ième séjour dans l'état j" et N_j la V.A. "nombre total de visites à l'état j sur $[0,+\infty[$". On a : $\forall\, k \ge 0, \tau_j^k \sim \text{EXP}(\lambda(j))$ i.e τ_j^k suit une loi exponentielle non négative de taux $\lambda(j)$.

Compte tenu des propriétés markoviennes du processus,on a :

$\forall\, j \in \{1 ,\dots ,m\}$, les V.A. $(\tau_j^k)_{k\ge1}$ et N_j forment un ensemble de V.A.mutuellement indépendantes. Notons $\underline{n}$ les éléments de $\mathbb{N}^l$ et $\underline{N}$ la V.A. vectorielle $(N_1,\dots, N_l)$.

Sachant $\underline{N} = \underline{n}$, W est une somme de V.A. indépendantes et donc la transformée de Laplace de la densité conditionnelle de W sachant $\underline{N}$ (et l'état initial i) s'écrit :

$$E_i(e^{-sW}/\ \underline{N} = \underline{n}) = \prod_{j=1}^{l} [E_i(e^{-s\tau_j^k})]^{nj} = \prod_{j=1}^{l} [\lambda(j)\ /\ \lambda(j)+s]^{nj}$$

on en déduit:

$$1 \le i \le m \ , \quad E_i(e^{-sW}) = \sum_{\underline{n}} P_i(\underline{N} = \underline{n})\ E_i(e^{-sW}/\ \underline{N} = \underline{n})$$

$$= \sum_{\underline{n}} P_i(\underline{N} = \underline{n}) \prod_{j=1}^{l} [\lambda(j)\ /\ \lambda(j)+s]^{nj}$$

Notons $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ le vecteur ligne des probabilités initiales pour X et introduisons $P = (p_{ij})$ $1 \le i,j \le m+1$ la matrice des probabilités de transitions de la chaîne de Markov à temps discret $Z = \{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$, incluse aux instants de changement d'état du processus X;

on a :

$$p_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} / \lambda(i) & \text{si } i \neq j \text{ et } i \neq m+1 \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } i = m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et : $Z_0 = X_0$.

Introduisons aussi les notations suivantes :

.$\Lambda_l \triangleq \mathrm{diag}(\lambda(1), \dots, \lambda(l))$ (matrice diagonale)

.$\Lambda_{m-l} \triangleq \mathrm{diag}(\lambda(l+1), \dots, \lambda(m))$ (matrice diagonale)

.$\Lambda \triangleq \mathrm{diag}(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$ (matrice diagonale)

.$\underline{1}_l$ le vecteur colonne de dimension l dont toutes les composantes sont égales à 1

.$\underline{1}_{m-l}$ le vecteur colonne de dimension m-l dont toutes les composantes sont égales à 1

.$\underline{\alpha}_B \triangleq (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$

.$\underline{\alpha}_{B^c} \triangleq (\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_m)$

.Q la matrice déduite de P en supprimant la (m+1)ième ligne et la (m+1)ième colonne de P.

.Les matrices Q_l, D, C, Q_{m-l} de tailles respectives (l,l), $(l,m-l)$, $(m-l,l)$, $(m-l,m-l)$ telles que Q s'écrive sous la forme suivante:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_l & D \\ C & Q_{m-l} \end{pmatrix}$$

. Les matrices identité I_l et I_{m-l} de tailles respectives (l,l) et $(m-l,m-l)$

. La matrice identité I de taille (m,m)

Notons encore N_B la V.A. "Nombre total de visites aux états de $B=\{1, \dots, l\}$" i.e:

. $N_B \triangleq N_1 + \dots + N_l$

La section suivante est consacrée à la mise en évidence de la distribution de la V.A. N_B.

Enfin, nous aurons aussi besoin des notations suivantes :

. $\underline{\beta} \triangleq \underline{\alpha}_B + \underline{\alpha}_{B^c}(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C$ (vecteur ligne de dimension l)

. $H \triangleq Q_l + D\,(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C$ (matrice carrée (l,l))

3 . DISTRIBUTION DE LA VARIABLE ALEATOIRE N_B

3.1 THEOREME.

Cette distribution est mise en évidence par le théorème suivant:

THEOREME 1:

(a) $P(N_B = 0) = 1 - \underline{\beta}\, \underline{1}_l$

(b) $P(N_B = k) = \underline{\beta}\, H^{k-1}(I_l - H)\underline{1}_l \qquad k \geq 1$

DEMONSTRATION :

Introduisons les notations suivantes pour des vecteurs colonnes :

. $\underline{V}_l(k) \triangleq (P_i(N_B = k))$, $1 \leq i \leq l$, $k \geq 0$

. $\underline{V}_{m-l}(k) \triangleq (P_i(N_B = k))$, $l+1 \leq i \leq m$, $k \geq 0$

. $\underline{p}_{m-l} \triangleq (p_{i\ m+1})$, $l+1 \leq i \leq m$ le vecteur des probabilités de transitions de B^c vers $\{m+1\}$

. $\underline{p}_l \triangleq (p_{i\ m+1})$, $1 \leq i \leq l$ le vecteur des probabilités de transitions de B vers $\{m+1\}$

. $\underline{0}_l$ le vecteur ligne de dimension l dont toutes les composantes sont nulles

. $\underline{0}_{m-l}$ le vecteur ligne de dimension $m-l$ dont toutes les composantes sont nulles

Notons qu'avec ces quatre dernières notations , la matrice P peut s'écrire :

$$P = \begin{pmatrix} Q_l & D & \underline{p}_l \\ C & Q_{m-l} & \underline{p}_{m-l} \\ \underline{0}_l & \underline{0}_{m-l} & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

On a , d'après le théorème des probabilités totales :

$$\text{si } k \in B^c \quad P_k(N_B = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(N_B = 0, Z_n = m+1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_k(N_B = 0, Z_n = m+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_k(N_B = 0, Z_{n+1} = m+1) \tag{2}$$

or , pour n>0:

$$P_k(N_B = 0, Z_{n+1} = m+1) = P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_n \in B^c, Z_{n+1} = m+1)$$

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h \, , Z_{n+1} = m+1)$$

cette dernière expression peut encore s'écrire en conditionnant :

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P_k(Z_{n+1} = m+1 / Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h) \, P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)$$

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P(Z_{n+1} = m+1 / Z_n = h) \, P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)$$

car Z est une chaîne de Markov

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h) \, p_{h\ m+1}$$

d'où en remplaçant dans (2) pour $k \in B^c$ et $n>0$, on obtient :

$$P_k(N_B = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=l+1}^{m} P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h) \, p_{h\ m+1}$$

De plus , si $n=0$, il est facile de vérifier que ce résultat reste valable si l'expression $P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)$ désigne par convention $I_{m-l}(k,h)$.

Pour continuer la démonstration du théorème 1, introduisons le lemme suivant qui donne la probabilité $P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)$ i.e , la probabilité que , partant de l'état $k \in B^c$,le processus soit dans l'état $h \in B^c$ au bout de n transitions dans B^c.

lemme : Soit $l+1 \leq h,k \leq m$ (i.e. les états h et $k \in B^c$)
alors pour $n \geq 0$, $P_k(Z_1 \in B^c , \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h) = Q_{m-l}{}^n(k,h)$

démonstration du lemme.

Ce lemme se démontre par récurrence.
Pour n = 0 , le résultat est trivial compte tenu de la convention ci-dessus.
Pour n = 1 et pour n = 2 , bien que cela ne soit pas nécéssaire à la démonstration , notons que :

pour n =1 $\qquad P_k(Z_1 = h) = p_{kh} = Q_{m-l}(k,h)$

pour n = 2 $$P_k(Z_1 \in B^c, Z_2 = h) = \sum_{i=l+1}^{m} P_k(Z_1 = i\ , Z_2 = h)$$

$$= \sum_{i=l+1}^{m} p_{ki}\, p_{ih} = Q_{m-l}^{\,2}(k,h)$$

supposons le lemme vrai au rang n-1 c'est à dire :

$$P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-2} \in B^c, Z_{n-1} = h) = Q_{m-l}^{\,n-1}(k,h)$$

$$P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h) = \sum_{i=l+1}^{m} P_k(\, Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-2} \in B^c, Z_{n-1} = i, Z_n = h)$$

$$= \sum_{i=l+1}^{m} P_k(Z_n = h \ / \ Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-2} \in B^c, Z_{n-1} = i\,)\ P_k(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-2} \in B^c, Z_{n-1} = i)$$

$$= \sum_{i=l+1}^{m} P(Z_n = h \ / \ Z_{n-1} = i\,)\ Q_{m-l}^{\,n-1}(k,i)$$ car Z est une chaîne de Markov

$$= \sum_{i=l+1}^{m} Q_{m-l}^{\,n-1}(k,i)\ p_{ih} = Q_{m-l}^{\,n}(k,h)$$

fin de démonstration du lemme.

Ainsi, pour $k \in B^c$, $P_k(\, N_B = 0)$ peut encore s'écrire :

$$P_k(\, N_B = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=l+1}^{m} Q_{m-l}^{\,n}(k,h)\ p_{h\ m+1}$$

on en déduit matriciellement :

$$\underline{V}_{m-l}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{m-l}^{\,n}\ \underline{p}_{m-l}$$

Cette série géométrique converge car, pour tout k et tout h $\in B^c$ on a :

. pour tout $n \geq 0$, $Q_{m-l}^n(k,h) \leq P^n(k,h)$ par le lemme .

. $P^n(k,h) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ car B^c est un ensemble d'états transitoires .

On obtient donc :

$$\underline{V}_{m-l}(0) = (I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}\, \underline{p}_{m-l} \tag{3}$$

Par ailleurs , P étant une matrice stochastique , on obtient à partir de son écriture (1) :

$$Q_l\underline{1}_l + D\underline{1}_{m-l} + \underline{p}_l = \underline{1}_l$$

$$C\underline{1}_l + Q_{m-l}\underline{1}_{m-l} + \underline{p}_{m-l} = \underline{1}_{m-l}$$

d'où l'on tire facilement :

$$\underline{p}_l = (I_l - Q_l)\underline{1}_l - D\underline{1}_{m-l} \tag{4}$$

$$\underline{p}_{m-l} = (I_{m-l} - Q_{m-l})\,\underline{1}_{m-l} - C\underline{1}_l \tag{5}$$

l'expression (3) peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$\underline{V}_{m-l}(0) = \underline{1}_{m-l} - (I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}\, C\underline{1}_l \tag{6}$$

par ailleurs, en utilisant la connaissance du vecteur des conditions initiales , on a :

$$P(N_B = 0) = \underline{\alpha}_B\, \underline{V}_l(0) + \underline{\alpha}_{B^c}\, \underline{V}_{m-l}(0) + \alpha_{m+1}$$

ce qui donne d'après (6) , puisque trivialement $\underline{V}_l(0) = 0$,

$$P(N_B = 0) = \underline{\alpha}_{B^c}\underline{1}_{m-l} - \underline{\alpha}_{B^c}\,(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}\, C\underline{1}_l + \alpha_{m+1}$$

de plus les conditions intiales vérifient :

$$\underline{\alpha}_B\underline{1}_l + \underline{\alpha}_{B^c}\underline{1}_{m-l} + \alpha_{m+1} = 1$$

donc

$$P(N_B = 0) = 1 - (\underline{\alpha}_B + \underline{\alpha}_{B^c}\,(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}\, C)\underline{1}_l$$

$$= 1 - \underline{\beta}\,\underline{1}_l \qquad \text{compte tenu de la définition de } \underline{\beta} \text{ à la section 2}$$

ce qui achève la preuve de l'assertion (a) du THEOREME 1.

Pour prouver l'assertion (b) du THEOREME 1 on procède comme suit :

pour $k \geq 1$ et $i \neq m+1$ $\quad P_i(N_B = k) = P(N_B = k / Z_0 = i)$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(N_B = k / Z_0 = i,\, Z_1 = j)\, P(Z_1 = j / Z_0 = i)$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij} P(N_B = k / Z_0 = i, Z_1 = j)$$

Mais, compte tenu des propriétés de la chaîne de Markov et compte tenu de ce que N_B est un nombre de visites sur $[0,+\infty[$, on a :

si $i \in B$ $\qquad P(N_B = k / Z_0 = i, Z_1 = j) = P(N_B = k\text{-}1 / Z_0 = j)$

si $i \in B^c$ $\qquad P(N_B = k / Z_0 = i, Z_1 = j) = P(N_B = k / Z_0 = j)$

on a donc :

$$\text{si } 1 \le i \le l \qquad P_i(N_B = k) = \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij} P_j(N_B = k\text{-}1) \qquad k \ge 1 \qquad (7)$$

$$\text{si } l+1 \le i \le m \qquad P_i(N_B = k) = \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij} P_j(N_B = k) \qquad k \ge 1$$

ce qui donne matriciellement :

$$\underline{V}_l(k) = Q_l \underline{V}_l(k\text{-}1) + D \underline{V}_{m\text{-}l}(k\text{-}1) \qquad k > 1 \qquad (8)$$
$$\underline{V}_l(1) = Q_l \underline{V}_l(0) + D \underline{V}_{m\text{-}l}(0) + \underline{p}_l \qquad (9)$$
$$\underline{V}_{m\text{-}l}(k) = C \underline{V}_l(k) + Q_{m\text{-}l} \underline{V}_{m\text{-}l}(k) \qquad k \ge 1 \qquad (10)$$

car pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $P_{m+1}(N_B = r) = 0$ et $P_{m+1}(N_B = 0) = 1$
la relation (10) nous permet d'écrire $\underline{V}_{m\text{-}l}(k)$ en fonction de $\underline{V}_l(k)$:

$$\underline{V}_{m\text{-}l}(k) = (I_{m\text{-}l} - Q_{m\text{-}l})^{-1} C \underline{V}_l(k) \qquad k \ge 1 \qquad (11)$$

en reportant dans (8), on obtient :

$$\underline{V}_l(k) = (Q_l + D (I_{m\text{-}l} - Q_{m\text{-}l})^{-1} C) \underline{V}_l(k\text{-}1) \qquad k > 1$$

soit d'après les notations de la section 2:

$$\underline{V}_l(k) = H \underline{V}_l(k\text{-}1) \qquad k > 1$$

on obtient ainsi :

$$\underline{V}_l(k) = H^{k\text{-}1} \underline{V}_l(1) \qquad k \ge 1 \qquad (12)$$

Reprenons l'expression de $\underline{V}_l(1)$ donnée par (9). Comme $\underline{V}_l(0)$ est nul, si l'on remplace

$\underline{p}_l$ et $\underline{V}_{m-l}(0)$ par leurs expressions respectives (4) et (6), on obtient :

$$\underline{V}_l(1) = D\,(\underline{1}_{m-l} - (I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}\,C\underline{1}_l) + (I_l - Q_l)\underline{1}_l - D\underline{1}_{m-l}$$

soit en simplifiant

$$\underline{V}_l(1) = (I_l - Q_l - D(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}\,C)\underline{1}_l$$

ce qui donne en utilisant les notations :

$$\underline{V}_l(1) = (I_l - H)\underline{1}_l$$

l'expression (12) peut donc se réécrire :

$$\underline{V}_l(k) = H^{k-1}\,(I_l - H)\underline{1}_l \qquad k \geq 1 \qquad (13)$$

la connaissance du vecteur des conditions initiales nous permet d'écrire:

$$P(\,N_B = k) = \underline{\alpha}_B\,\underline{V}_l(k) + \underline{\alpha}_{B^c}\,\underline{V}_{m-l}(k) \qquad k \geq 1$$

($P_{m+1}(\,N_B = k)$ étant nul pour $k \geq 1$)

donc en remplaçant $\underline{V}_l(k)$ et $\underline{V}_{m-l}(k)$ par leurs expressions respectives (11) et (13), on obtient:

$$P(\,N_B = k) = \underline{\alpha}_B\,H^{k-1}\,(I_l - H)\underline{1}_l + \underline{\alpha}_{B^c}\,(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C\,H^{k-1}\,(I_l - H)\underline{1}_l \qquad k \geq 1$$

soit en utilisant les notations introduites:

$$P(\,N_B = k) = \underline{\beta}\,H^{k-1}(I_l - H)\underline{1}_l \qquad k \geq 1$$

ce qui prouve l'assertion (b) du THEOREME 1.

Remarquons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(\,N_B = k) = 1$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(\,N_B = k) = \underline{\beta}\,\underline{1}_l$

<u>3.2 Interprétation du théorème 1</u>

Désignons par K_n, $n \geq 1$, la V.A. " n-ième état de B visité ". Soit ω une réalisation du processus , alors on écrira :

$$K_n(\omega) = \begin{cases} j & \text{si } j \text{ est le n-ième état de B visité pour la réalisation } \omega \\ 0 & \text{si } N_B(\omega) < n \end{cases}$$

* *<u>Interprétation du vecteur</u>* $\underline{\beta}$

Exprimons la distribution de la V.A. K_1. En conditionnant par rapport à l'état initial , on peut écrire pour tout $j \in B$:

$$\text{si } i \in B\,,\ P_i(\,K_1 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{si } i \in B^c,\ P_i(K_1 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(K_1 = j, Z_n = j)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(K_1 = j, Z_n = j)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(K_1 = j, Z_{n+1} = j) \qquad (14)$$

or , pour $n > 0$ $\quad P_i(K_1 = j, Z_{n+1} = j) = P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_n \in B^c, Z_{n+1} = j)$

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h, Z_{n+1} = j)$$

cette dernière expression peut encore s'écrire en conditionnant :

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P_i(Z_{n+1} = j / Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)\, P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)$$

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P(Z_{n+1} = j / Z_n = h)\, P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h) \text{ car Z est une chaîne de Markov}$$

$$= \sum_{h=l+1}^{m} P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)\, p_{hj}$$

d'où en remplaçant dans (14) pour $i \in B^c$ et $n>0$:

$$P_i(K_1 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=l+1}^{m} P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)\, p_{hj}$$

pour $n=0$, il est facile de vérifier que ce résultat reste valable si l'expression

$P_i(Z_1 \in B^c, \ldots, Z_{n-1} \in B^c, Z_n = h)$ désigne par convention $I_{m-l}(i,h)$. Si l'on applique maintenant le lemme , on obtient :

$$P_i(K_1 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=l+1}^{m} Q_{m-l}^{\,n}(i,h)\, p_{hj}$$

que l'on peut encore écrire matriciellement

$$P_i(K_1 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} [Q_{m-l}^{\,n} C](i,j)$$

$[Q_{m-l}^{\,n} C](i,j)$ est donc la probabilité que , partant d'un état i de B^c , le processus entre pour la première fois dans B à la (n+1)-ième transition et par visite à l'état j .
On a vu précédemment que cette série converge , donc on peut écrire :

$$P_i(K_1 = j) = [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C](i,j) \tag{15}$$

en déconditionnant par rapport à l'état initial i , on obtient :

$$P(K_1 = j) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i P_i(K_1 = j)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_i(K_1 = j) + \sum_{i=l+1}^{m} \alpha_i P_i(K_1 = j) \qquad \text{car } P_{m+1}(K_1 = j) = 0$$

$$= \alpha_j + \sum_{i=l+1}^{m} \alpha_i [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C](i,j)$$

si l'on note β_j la j-ième composante du vecteur ligne $\underline{\beta}$, on voit facilement que:

$$\beta_j = P(K_1 = j)$$

β_j est donc la probabilité que le premier état de B visité soit l'état j .

* *Interprétation de la matrice* $H = (H(i,j)) \quad 1 \le i,j \le l \qquad$ (i.e $i, j \in B$)

Le cas n=1 correspond à l'interprétation de β vue précédemment .Pour n=2 et $j \in B$, on peut écrire :

si $i \in B$:

$$P_i(K_2 = j) = \sum_{h=1}^{m+1} P_i(K_2 = j , Z_1 = h)$$

cette expression peut encore s'écrire :

$$P_i(K_2 = j) = \sum_{h=1}^{l} P_i(K_2 = j , Z_1 = h) + \sum_{h=l+1}^{m} P_i(K_2 = j , Z_1 = h)$$

car $P_i(K_2 = j , Z_1 = m+1) = 0$

Il est simple de voir que la première somme de cette dernière expression est égale à p_{ij} ; quant à la deuxième somme , on a :

pour $l+1 \le h \le m$

$$\begin{aligned} P_i(K_2 = j , Z_1 = h) &= P_i(K_2 = j / Z_1 = h)\, P_i(Z_1 = h) \\ &= p_{ih}\, P_i(K_2 = j / Z_1 = h) \end{aligned}$$

or

$$P_i(K_2 = j / Z_1 = h) = P_h(K_1 = j)$$

donc :

$$P_i(K_2 = j) = p_{ij} + \sum_{h=l+1}^{m} p_{ih}\, P_h(K_1 = j)$$

en utilisant la relation (15) , on obtient :

$$P_i(K_2 = j) = p_{ij} + \sum_{h=l+1}^{m} p_{ih}\, [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C](h,j)$$

cette dernière relation s'écrit matriciellement : $(i, j \in B)$

$$P_i(K_2 = j) = p_{ij} + [D(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C](i,j)$$

on remarque alors , par définition de H , que pour i , j$\in$B:

$$P_i(K_1 = j) = I_l(i,j)$$
$$P_i(K_2 = j) = H(i,j)$$

Montrons par récurrence que : pour tout $n \geq 1$, $P_i(K_n = j) = H^{n-1}(i,j)$ $\quad i , j\in B$
pour i , j$\in$B supposons que $P_i(K_n = j) = H^{n-1}(i,j)$ $\quad n\neq 0$
Soit i , j$\in$B et n$\neq$0 , on a par le théorème des probabilités totales :

$$P_i(K_{n+1} = j) = \sum_{h=1}^{m+1} P_i(K_{n+1} = j , Z_1 = h)$$

$$= \sum_{h=1}^{m} P_i(K_{n+1} = j , Z_1 = h) \qquad \text{car } P_i(K_{n+1} = j , Z_1 = m+1) = 0$$

$$= \sum_{h=1}^{m} P_i(Z_1 = h)\, P_i(K_{n+1} = j / Z_1 = h)$$

$$= \sum_{h=1}^{m} p_{ih}\, P_i(K_{n+1} = j / Z_1 = h)$$

$$= \sum_{h=1}^{m} p_{ih}\, P_h(K_n = j)$$

$$= \sum_{h=1}^{l} p_{ih}\, P_h(K_n = j) \quad + \quad \sum_{h=l+1}^{m} p_{ih}\, P_h(K_n = j) \qquad (16)$$

$P_h(K_n = j)$ est connu par hypothèse de récurrence mais seulement pour h$\in$ B = {1 ,..., l}.Il nous faut donc calculer $P_h(K_n = j)$ pour h$\in$B^c , j$\in$B. Soit donc h$\in$B^c et j$\in$B , on a :

$$P_h(K_n = j) = \sum_{k=1}^{m+1} P_h(K_n = j , Z_1 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P_h(K_n = j\,,\, Z_1 = k) \qquad \text{car} \quad P_h(K_n = j\,,\, Z_1 = m+1) = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P_h(Z_1 = k)\, P_h(K_n = j \,/\, Z_1 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_{hk}\, P_k(K_n = j) \qquad (17)$$

Pour simplifier l'écriture , introduisons les vecteurs colonnes :

$.\underline{V}_l(n,j) \triangleq (\, P_r(K_n = j)\,) \qquad r \in B = \{1\,, \ldots, l\}$

$.\underline{V}_{m-l}(n,j) \triangleq (\, P_r(K_n = j)\,) \qquad r \in B^c = \{l+1\,, \ldots, m\}$

la relation (17) devient alors matriciellement :

$$\underline{V}_{m-l}(n,j) = C\, \underline{V}_l(n,j) + Q_{m-l}\, \underline{V}_{m-l}(n,j)$$

soit :

$$\underline{V}_{m-l}(n,j) = (\, I_{m-l} - Q_{m-l}\,)^{-1} C\, \underline{V}_l(n,j)$$

ce qui donne pour $h \in B^c = \{l+1\,, \ldots, m\}$,

$$P_h(K_n = j) = \sum_{k=1}^{l} [(\, I_{m-l} - Q_{m-l}\,)^{-1}C](h,k)\, P_k(K_n = j)$$

grâce à cette dernière relation , la relation (16) devient :

$$P_i(K_{n+1} = j) = \sum_{h=1}^{l} p_{ih}\, P_h(K_n = j) + \sum_{h=l+1}^{m} p_{ih} \sum_{k=1}^{l} [(\, I_{m-l} - Q_{m-l}\,)^{-1}C](h,k)\, P_k(K_n = j)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence , on obtient :

$$P_i(K_{n+1} = j) = \sum_{h=1}^{l} p_{ih}\, H^{n-1}(h,j) + \sum_{h=l+1}^{m} p_{ih} \sum_{k=1}^{l} [(\, I_{m-l} - Q_{m-l}\,)^{-1}C](h,k)\, H^{n-1}(k,j)$$

ce qui donne matriciellement :

$$P_i(K_{n+1} = j) = [Q_l H^{n-1}](i,j) + [D(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C H^{n-1}](i,j)$$
$$= [(Q_l + D(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C) H^{n-1}](i,j)$$
$$= H^n(i,j)$$

On a donc le résultat suivant : pour tout $i,j \in B$, $P_i(K_n = j) = H^{n-1}(i,j)$ $\quad n \geq 1$

Ainsi , $H^{n-1}(i,j)$ est la probabilité que , partant de $i \in B$, le n-ième état de B visité soit l'état j. Notons qu'avant d'atteindre l'état j , le processus a évolué librement dans tout l'espace E .

* *Interprétation de la distribution conditionnelle de la variable aléatoire* N_B *sachant l'état initial.*

Pour $i \in B$ et $k \geq 1$, la formule (13) nous permet d'écrire :

$$P_i(N_B = k) = \sum_{j=1}^{l} [H^{k-1}(I_l - H)](i,j)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{h=1}^{l} H^{k-1}(i,h) \, [I_l - H](h,j)$$

ce qui nous donne par le résultat trouvé précédemment :

$$= \sum_{h=1}^{l} P_i(K_k = h) \sum_{j=1}^{l} [I_l - H](h,j)$$

d'où , vu que $H(h,j) = P_h(K_2 = j)$ pour $h , j \in B$

$$= \sum_{h=1}^{l} P_i(K_k = h) \, [\, 1 - \sum_{j=1}^{l} P_h(K_2 = j)]$$

$$= \sum_{h=1}^{l} P_i(K_k = h) \, P_h(K_2 = 0)$$

or , pour $h \in B$, $P_h(K_2 = 0)$ représente de façon immédiate la probabilité de ne plus revenir dans B sachant que l'état initial est h . Donc , pour $i \in B$ et $k \geq 1$:

$$P_i(N_B = k) = \sum_{h=1}^{l} P_i(\text{le k-ième état de B visité} = h)\ P_h(\text{quitter immédiatement B et de ne plus jamais y revenir}).$$

Pour $i \in B^c$ et $k \geq 1$, on a grâce aux formules (11) et (13):

$$P_i(N_B = k) = \sum_{j=1}^{l} [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C\, H^{k-1}(I_l - H)](i,j)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{h=1}^{l} [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C](i,h)\ [H^{k-1}(I_l - H)](h,j)$$

$$= \sum_{h=1}^{l} [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C](i,h) \sum_{j=1}^{l} [H^{k-1}(I_l - H)](h,j)$$

$$= \sum_{h=1}^{l} P_i(K_1 = h)\ P_h(N_B = k)$$

$$= \sum_{h=1}^{l} P_i(\text{le premier état de B visité est } h)\ P_h(N_B = k).$$

Traitons maintenant le cas où $k = 0$

$P_{m+1}(N_B = 0) = \alpha_{m+1}$ = probabilité de démarrer dans l'état absorbant.

Si $i \in B$:

$P_i(N_B = 0) = 0$ de façon triviale.

Si $i \in B^c$, la relation nous donne:

$$P_i(N_B = 0) = 1 - \sum_{j=1}^{l} [(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C](i,j)$$

ce qui donne par la relation obtenue pour l'interprétation de $\underline{\beta}$:

$$P_i(N_B = 0) = 1 - \sum_{j=1}^{l} P_i(K_1 = j) = P_i(K_1 = 0)$$

$= P_i$(ne jamais entrer dans B).

4. DISTRIBUTION DE LA VARIABLE ALEATOIRE W

Pour calculer la distribution de cette V.A. par l'intermédiaire du théorème 1, nous allons utiliser le procédé d'uniformisation au processus X.

Uniformisation du processus X.

La technique d'uniformisation [ROSS 83] consiste à construire une chaîne de Markov $Z^* = \{Z^*_n, n \in \mathbb{N}\}$ et un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ indépendant de Z^* et de taux μ tels que $X(t) = Z^*_{N(t)}$ de la façon suivante :

.on choisit μ réel tel que : $\mu \geq \max(\lambda(i), i = 1, \ldots, m)$

et si P^* désigne la matrice des probabilités de transitions pour la chaîne de Markov Z^*

$$.P(Z^*_{n+1} = j \,/\, Z^*_n = i) = p^*_{ij} = \begin{cases} 1 - \lambda(i)/\mu & \text{si } i = j \\ \lambda_{ij}/\mu & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui nous donne la relation :

$$P^* = I_{m+1} + A / \mu \qquad (18)$$

Sur le processus uniformisé, le taux de sortie de chaque état est alors constant et égal à μ et Z^* est la chaîne de Markov incluse aux instants de changement de transition du processus uniformisé. Il n'est donc pas étonnant de voir apparaître sur le graphe de la chaîne de Markov Z^* des rebouclages.

Désormais, les notations comportant des étoiles en exposant désignent les mêmes entités que celles n'en comportant pas mais elles réfèrent le processus uniformisé équivalent.

Notons A_1 la matrice carrée (m,m) déduite de A en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de A

grâce à la définition de P, on peut écrire :

$$A_1 = -\Lambda(I - Q)$$

de la relation (18), on tire :

$$Q^* = I + A_1/\mu$$

soit :

$$Q^* = I - \Lambda(I - Q) / \mu$$

En décomposant cette dernière relation en sous matrices de la même façon qu'au début de ce rapport , on obtient :

$$Q_l^* = I_l - \Lambda_l(I_l - Q_l) / \mu \qquad (a)$$
$$D^* = \Lambda_l D / \mu \qquad (b)$$
$$C^* = \Lambda_{m-l} C / \mu \qquad (c)$$
$$Q_{m-l}^* = I_{m-l} - \Lambda_{m-l}(I_{m-l} - Q_{m-l}) / \mu \qquad (d)$$

N_B^* étant l'équivalent de N_B sur la chaîne de Markov Z^*
on a de même l'équivalent du théorème 1:

$$P(N_B^* = k) = \underline{\beta}^* H^{*k-1}(I_l - H^*)\underline{1}_l \qquad k \geq 1$$
$$P(N_B^* = 0) = 1 - \underline{\beta}^* \underline{1}_l$$

la V.A. W peut donc désormais s'écrire sous la forme suivante :

$$W = \sum_{i=1}^{N_B^*} U_i$$

où les U_i sont des V.A. de loi exponentielle de taux μ . Comme ici les V.A. U_i sont indépendantes et identiquement distribuées , la transformée de Laplace de W donnée au début de ce rapport peut s'écrire plus simplement :

$$E(e^{-sW}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_B^* = k) (\mu / \mu+s)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\beta}^* H^{*k-1}(I_l - H^*)\underline{1}_l \ (\mu / \mu+s)^k \ + 1 - \underline{\beta}^* \underline{1}_l$$

$$= \underline{\beta}^* (\sum_{k=1}^{\infty} H^{*k-1} (\mu/\mu+s)^k)(I_l - H^*)\underline{1}_l \ + 1 - \underline{\beta}^* \underline{1}_l$$

$$= \underline{\beta}^* (\mu / \mu+s)(I_l - (\mu / \mu+s)H^*)^{-1} (I_l - H^*)\underline{1}_l \ + 1 - \underline{\beta}^* \underline{1}_l$$

$$= \mu\underline{\beta}^* (sI_l + \mu (I_l - H^*))^{-1} (I_l - H^*)\underline{1}_l \ + 1 - \underline{\beta}^* \underline{1}_l$$

En utilisant les relations (a),(b),(c),(d) et les définitions de $\underline{\beta}^*$ et H^*, il est simple de voir que :

$$\underline{\beta}^* = \underline{\beta} \quad \text{et} \quad H^* = I_l - \Lambda_l(I_l - H) / \mu$$

de plus , si l'on pose :

$$T \triangleq -\mu\,(I_l - H^*) \text{ ce qui entraîne } T = -\Lambda_l(I_l - H)$$

on obtient :

$$E(e^{-sW}) = 1 - \underline{\beta}\,\underline{1}_l - \underline{\beta}\,(sI_l - T)^{-1}\,T\,\underline{1}_l$$

et $-\underline{\beta}\,(sI_l - T)^{-1}\,T\,\underline{1}_l$ n'est autre que la transformée de Laplace de la fonction

$$f(t) = -\underline{\beta}\,e^{Tt}\,T\,\underline{1}_l$$

La distribution de W est donc donnée par :

$$P(W \le t) = 1 - \underline{\beta}\,e^{Tt}\,\underline{1}_l$$

où $T = -\Lambda_l(I_l - Q_l - D\,(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C)$ et $\underline{\beta} = \underline{\alpha}_B + \underline{\alpha}_{B^c}(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C$

On remarquera que T est une matrice carrée d'ordre cardinal de B. D'un point de vue numérique , la difficulté réside dans le calcul de l'inverse de la matrice $(I_{m-l} - Q_{m-l})$ dont l'ordre est égal au cardinal de B^c. En posant , $X = (I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1}C$, on pourra résoudre en X l'équation matricielle $(I_{m-l} - Q_{m-l})\,X = C$ .On utilisera par exemple la méthode de factorisation LU ou une méthode itérative si la matrice $(I_{m-l} - Q_{m-l})$ est creuse.

Remarque :

Supposons que E contienne un nombre fini k de classes récurrentes et un nombre fini r d'états absorbants . Soit C(1) , ... , C(k) les k classes récurrentes , on agrège chacune de ces classes en un état absorbant que l'on note c(i) pour la classe C(i) , i = 1, ... , k de la façon suivante :

pour $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le k$:

$$\lambda_{ic(j)} = \sum_{h \in C(j)} \lambda_{ih}$$

E est maintenant formé de m états transitoires et de k+r états absorbants . En posant u = r+k , on réordonne alors E de la façon suivante :

$$E = \{1 ,\ldots, l , l+1,\ldots, m , m+1 ,\ldots, m+u\}$$

où m+1 ,..., m+u désignent les u états absorbants de E. On regroupe alors ces u états en un seul état absorbant que l'on note a . Il est simple de voir que si l'on pose :

pour $1 \leq i \leq m$:

$$\lambda_{ia} = \sum_{j=m+1}^{m+u} \lambda_{ij} \quad , \quad \lambda_{ai} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{aa} = 0$$

et si l'on donne l'indice $m+1$ à l'état a alors on retrouve le processus X de départ.

5 . TEMPS D'ABSORPTION POUR LE PROCESSUS REDUIT .

Soit $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ un processus markovien sur un ensemble d'états $B \cup \{a\}$ où $B = \{1, \dots, l\}$ est formé d'états transitoires et où a est un état absorbant . Soit M le générateur infinitésimal du processus Y; en donnant l'indice $l+1$ à l'état a, M a la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} T & T^0 \\ \underline{0} & 0 \end{pmatrix}$$

où T est une matrice (l,l) , T^0 un vecteur colonne de dimension l et $\underline{0}$ un vecteur ligne de dimension l .

Soit T_a la V.A. "temps d'absorption du processus Y sur $[0,+\infty[$".

Soit $(\underline{\beta}, \beta_{l+1})$ le vecteur des probabilités initiales de Y où β_{l+1} est la probabilité que le processus soit dans l'état absorbant a à t = 0 et où $\underline{\beta} \triangleq (\beta_1, \dots, \beta_l)$.

On a :

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= P(Y_t = a) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{l} P(Y_t = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l+1} \beta_i P_i(Y_t = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} \beta_i P_i(Y_t = j) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{l} \beta_i \sum_{j=1}^{l} P_i(Y_t = j) \end{aligned}$$

$$= 1 - \underline{\beta}\, e^{Tt}\, \underline{1}_l$$

Donc en prenant :

$$T = -\Lambda_l (I_l - Q_l - D\,(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C) \quad \text{et} \quad \underline{\beta} = \underline{\alpha}_B + \underline{\alpha}_{B^c}(I_{m-l} - Q_{m-l})^{-1} C$$

on obtient le résultat annoncé dans la section 1 , à savoir :

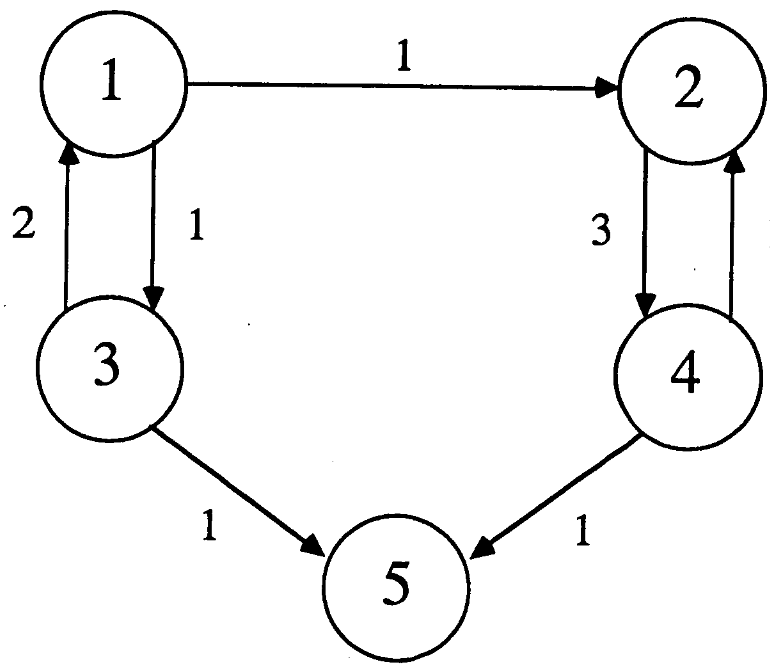
La distribution du temps de séjour cumulé dans B sur [0,+∞[pour le processus X est égale à la distribution du temps d'absorption pour le processus Y .

6 . EXEMPLES.

Pour illustrer ce rapport , deux exemples numériques sont exposés dans cette section.

Exemple 1.

Soit le schéma suivant décrivant un processus markovien dont les taux de transitions correspondent aux valuations des arcs :



On choisit pour état initial : $\underline{\alpha} = (1/2 , 0 , 1/2 , 0 , 0)$.

On a : $m = 4$, $E = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$ et l'on prend $l = 2$ c'est à dire : $B = \{ 1 , 2 \}$.

Le générateur infinitésimal de ce processus est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on en déduit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La simplicité du processus considéré (pas de transitions de l'état 2 vers l'état 1) nous permet d'appliquer 2 méthodes :

Première méthode : calcul de la distribution de la V.A. W à partir de la formule de la section 2 par le biais de la transformée de Laplace.

Rappelons la formule générale de la section 2 :

$$1 \le i \le m \qquad E_i(e^{-sW}) = \sum_{\underline{n}} P_i(\underline{N} = \underline{n}) \prod_{j=1}^{l} (\lambda(j) / \lambda(j)+s)^{nj}$$

en l'appliquant à cet exemple , on obtient :

$$E_1(e^{-sW}) = \sum_{n,m} P_1(N_1 = n , N_2 = m) \; (\lambda(1) / \lambda(1)+s)^n \, (\lambda(2) / \lambda(2)+s)^m$$

$$E_3(e^{-sW}) = \sum_{n,m} P_3(N_1 = n , N_2 = m) \; (\lambda(1) / \lambda(1)+s)^n \, (\lambda(2) / \lambda(2)+s)^m$$

Remarque : le calcul de $E_2(e^{-sW})$, $E_4(e^{-sW})$ et $E_5(e^{-sW})$ n'est pas nécéssaire ici puisque α_2 , α_4 et α_5 sont nuls.

On a : $\lambda(1) = 2$ et $\lambda(2) = 3$.

Il nous reste donc à calculer $P_1(N_1 = n , N_2 = m)$ et $P_3(N_1 = n , N_2 = m)$.

On voit de façon immédiate sur le graphe que :

$$P_1(N_1 = n, N_2 = m) = \begin{cases} (p_{13}p_{31})^{n-1} p_{13}p_{35} & \text{si } m=0 \text{ et } n\geq 1 \\ (p_{13}p_{31})^{n-1} p_{12}(p_{24}p_{42})^{m-1} p_{24}p_{45} & \text{si } m\neq 0 \text{ et } n\geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_3(N_1 = n, N_2 = m) = \begin{cases} p_{31}(p_{13}p_{31})^{n-1} p_{13}p_{35} & \text{si } m=0 \text{ et } n\geq 1 \\ p_{31}\,(p_{13}p_{31})^{n-1} p_{12}(p_{24}p_{42})^{m-1} p_{24}p_{45} & \text{si } m\neq 0 \text{ et } n\geq 1 \\ p_{35} & \text{si } m=0 \text{ et } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui donne en remplaçant les p_{ij} par leurs valeurs et en passant aux valeurs numériques dans les expressions de $E_1(e^{-sW})$ et $E_3(e^{-sW})$:

$$E_1(e^{-sW}) = 1 / (3s + 4) \; + \; 9 / (3s + 4)(2s + 3)$$

et

$$E_3(e^{-sW}) = 1 / 3 \; + \; (2 / 3)\, E_1(e^{-sW})$$

or ,

$$E(e^{-sW}) = (1 / 2)\, E_1(e^{-sW}) \; + \; (1 / 2)\, E_3(e^{-sW})$$

soit :

$$E(e^{-sW}) = 1 / 6 \; + \; (5 / 6)\, E_1(e^{-sW})$$

si l'on note μ la loi de W et μ_1 la loi conditionnelle de W sachant X_0=1, on a :

$$\mu = (1 / 6)\delta_0 \; + \; (5 / 6)\,\mu_1 \qquad \text{où } \delta_0 \text{ est la masse de Dirac en } 0$$

on remarque que $E_1(e^{-sW})$ est la transformée de Laplace de la fonction suivante,

$$f(t) = (28 / 3)\, e^{-(4 / 3)t} - 9\, e^{-(3/2)t}$$

d'où l'on en déduit par un calcul simple :

$$\mu_1(\,[0,t]\,) = 1 - 7\, e^{-(4 / 3)t} + 6\, e^{-(3/2)t}$$

puis finalement :

$$P(W \leq t) = \mu(\,[0,t]\,) = 1 - (35 / 6)\, e^{-(4 / 3)t} + 5\, e^{-(3/2)t}.$$

Deuxième méthode : calcul de distribution de la V.A. W à partir des résultats des sections 3) et 4) de ce rapport .

Dans ce cas particulier , on a : $m\text{-}l = l = 2$; pour une meilleure compréhension , on choisit de remplacer l'indice $m\text{-}l$ par l'indice B^c et l'indice l par l'indice B .

A partir de la matrice P , on déduit les quatre sous-matrices suivantes :

$$Q_B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad Q_{B^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et de la matrice A , on tire : $\Lambda_B = \mathrm{diag}(2, 3)$ (matrice diagonale).

On a : $T = -\Lambda_B(I_B - Q_B - D(I_{B^c} - Q_{B^c})^{-1}C)$ et $\underline{\beta} = \underline{\alpha}_B + \underline{\alpha}_{B^c}(I_{B^c} - Q_{B^c})^{-1}C$
ce qui donne numériquement :

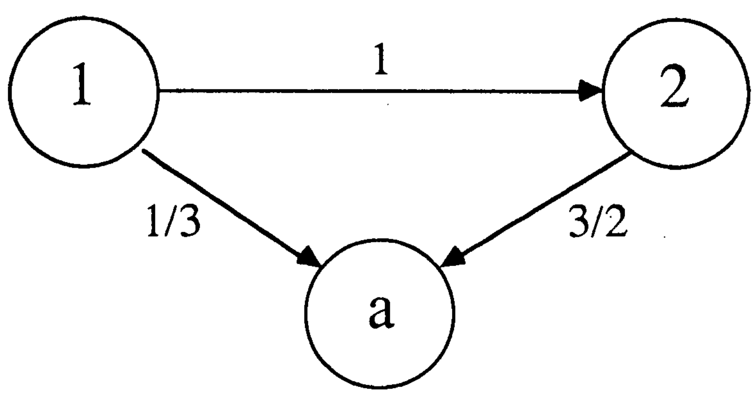
$$T = \begin{pmatrix} -4/3 & 1 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \underline{\beta} = (5/6, 0)$$

On a vu que : $P(W \leq t) = 1 - \underline{\beta}\, e^{Tt}\, \underline{1}_2$
donc , par un calcul simple (diagonalisation de T) , on obtient finalement :

$$P(W \leq t) = 1 - (35/6)\, e^{-(4/3)t} + 5\, e^{-(3/2)t}$$

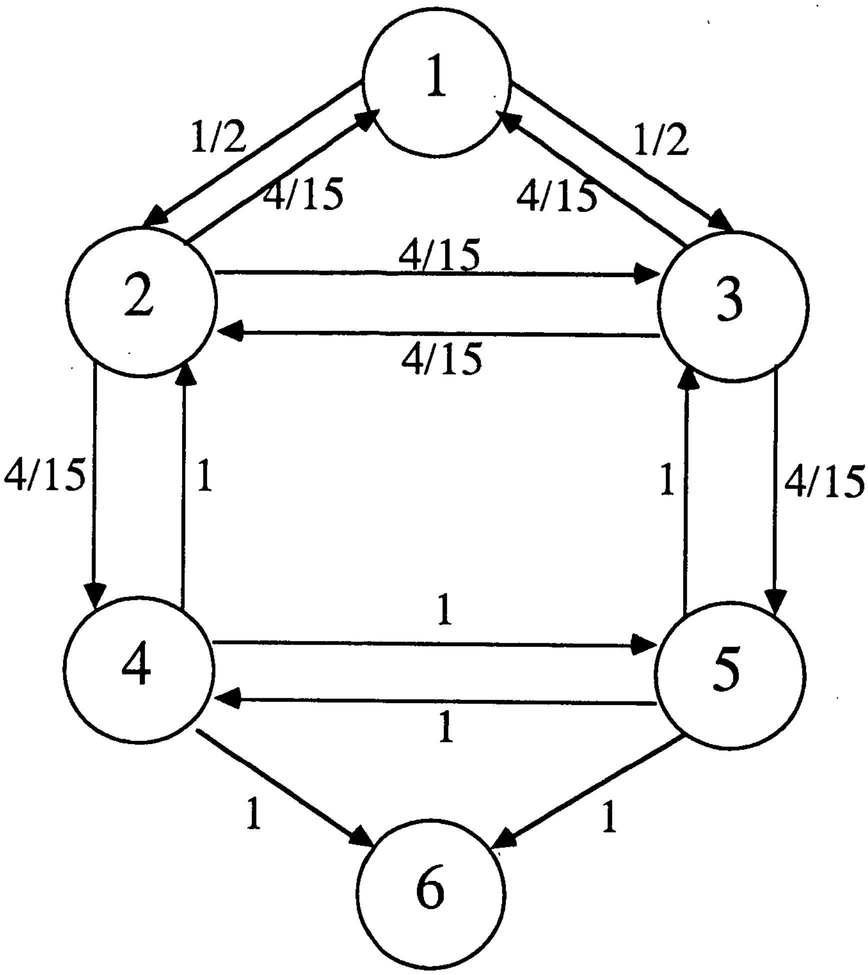
qui est bien le même résultat que celui de la première méthode .

De la matrice T , on déduit aisément le schéma du graphe de transition correspondant au processus réduit dont l'état initial est (5/6 , 0 , 1/6) :



Exemple 2.

Soit le schéma suivant décrivant un processus markovien dont les taux de transitions correspondent aux valuations des arcs:



On a : m = 5 c'est à dire E = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}.
On prend l =3 c'est à dire B={1, 2, 3}.
On choisit pour état initial : $\underline{\alpha}$ = (1/4 , 1/4 , 1/4 , 1/8 , 1/8 , 0).

Le générateur infinitésimal de ce processus est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 4/15 & -4/5 & 4/15 & 4/15 & 0 & 0 \\ 4/15 & 4/15 & -4/5 & 0 & 4/15 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cet exemple , comme dans le cas général , il est très difficile de calculer la distribution de la V.A. W à partir de la première méthode (cf exemple 1) ; on a donc recours aux résultats des sections 3) et 4) de ce rapport (i.e. deuxième méthode) .

A partir de la matrice P , on en déduit les quatre sous-matrices suivantes :

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

et de la matrice A , on tire : $\Lambda_3 = \mathrm{diag}(1 , 4/5 , 4/5)$ (matrice diagonale) .
On a : $T = -\Lambda_3(I_3- Q_3-D(I_2- Q_2)^{-1}C)$ et $\underline{\beta} = \underline{\alpha}_B + \underline{\alpha}_{B^c}(I_2- Q_2)^{-1}C$
ce qui donne numériquement :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 4/15 & -7/10 & 3/10 \\ 4/15 & 3/10 & -7/10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \underline{\beta} = (1/4 , 5/64 , 5/64)$$

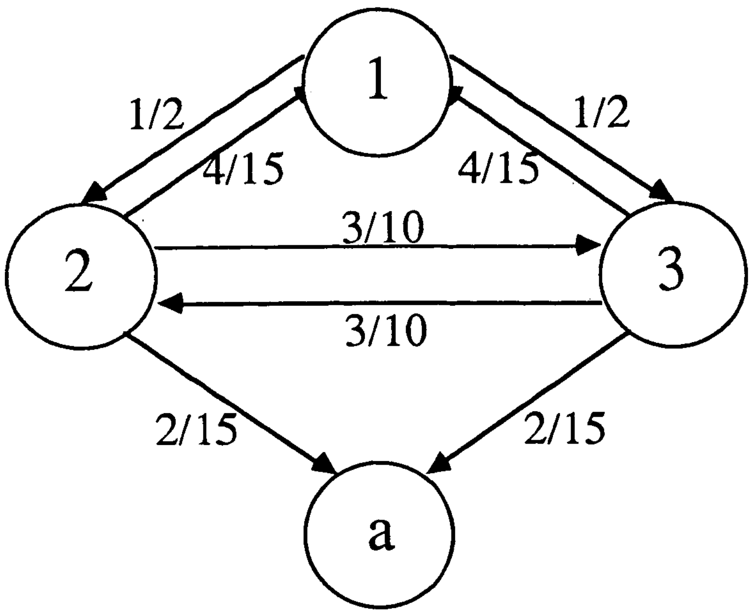
On a vu que : $P(W \le t) = 1 - \underline{\beta}\, e^{Tt}\, \underline{1}_3$
donc , après diagonalisation de T , on obtient finalement :

$$P(W \le t) = 1 + a\, e^{xt} + b\, e^{yt}$$

où : $x = (-21 + (321)^{1/2}) / 30$; $y = (-21 - (321)^{1/2}) / 30$

$a = - (13 / 64) - (253 / 64(321)^{1/2})$; $b = - (13 / 64) + (253 / 64(321)^{1/2})$

De la matrice T , on déduit aisément le schéma du graphe de transition correspondant au processus réduit dont l'état initial est (1/4 , 5/64 , 5/64 , 19/32) :



7. CONCLUSIONS.

Dans ce rapport, nous avons essentiellement mis en évidence la distribution de W et la caractérisation d'une autre chaîne de Markov plus petite dont le temps d'absorption a même distribution que W.

Les exemples traités ont été pris volontairement petits dans un but pédagogique (et aussi afin d'obtenir manuellement une expression formelle de la distribution de W), mais il est possible d'appliquer les nouveaux résultats (calcul de la distribution de W) à des systèmes ayant plusieurs centaines d'états. La difficulté numérique est essentiellement celle du calcul de la matrice T.

Enfin, le problème traité dans ce rapport est à rapprocher de celui du de la distribution du temps total de séjour W(t) dans B sur un intervalle de temps fini (0,t). Pour ce dernier problème, il existe des méthodes numériques telles [IYER 84] (reposant sur la technique de l'uniformisation [ROSS 83]) et [SOUZ 85] mais ces méthodes ne permettent pas d'obtenir la distribution de W.

REFERENCES

[CINL 75] E. Cinlar, "Introduction to Stochastic Processes", Prentice Hall, 1975.

[NEUT 81] M.P. Neuts, "Matrix-Geometric Solutions in Stochastics Models", John Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[ROSS 83] S.M. Ross, "Stochastic Processes", John Wiley & Sons, 1983.

[IYER 84] B.R. Iyer, L. Donatiello and P. Heidelberger, "Analysis of Performability for Stochastic Models of Fault-Tolerant Systems", IBM Research Report RC 10719, September 1984.

[SOUZ 85] E. de Souza e Silva, H.R. Gail, "Calculating Cumulative Operational Time Distributions of Repairable Computer Systems", IBM Research Report RC 11259, 1985.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique