

Stabilité robuste dans la commande adaptative indirecte passive

Philippe de Larminat

▶ **To cite this version:**

Philippe de Larminat. Stabilité robuste dans la commande adaptative indirecte passive. [Rapport de recherche] RR-0509, INRIA. 1986. inria-00076045

HAL Id: inria-00076045
https://inria.hal.science/inria-00076045

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tel.(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 509

STABILITÉ ROBUSTE DANS LA COMMANDE ADAPTATIVE INDIRECTE PASSIVE

Philippe de LARMINAT

Mars 1986

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone : 99 36 20 00
Télex : UNIRISA 950 473 F
Télécopie : 99 38 38 32

Publication Interne n°282
70 pages
Janvier 1986

STABILITE ROBUSTE DANS LA COMMANDE ADAPTATIVE INDIRECTE PASSIVE

Philippe de LARMINAT - Professeur INSA, Rennes

IRISA - Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex

et

GRECO-CNRS: "Systèmes Adaptatifs"

Résumé

Dans le contexte des commandes adaptatives basées sur une identification explicite, on montre que le problème de la stabilisabilité du modèle identifié peut être résolu dans une approche passive, c'est-à-dire sans qu'il soit besoin d'entrées excitantes destinées à garantir la convergence de l'identification.

Ce problème est traité complètement, pour des systèmes lentement variables dans les temps, d'ordre éventuellement sous-estimé, et affectés de faibles non linéarités non modélisées.

Mots-clefs : Adaptatif, Robustesse, Indirect, Passif.

Abstract

This paper deals with adaptive control based on explicit identification. The problem of the identified model stabilisability is solved in the passive approach, i.e. without requiring persistingly exciting inputs. This solution is robust, covering time varying processes, unstructured model errors and underestimating model order.

Key words : Adaptive, Robustness, Indirect, Passive.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L. A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I. N. S. A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

1 - INTRODUCTION

Selon le principe dit d'équivalence certitude [1], l'approche la plus naturelle pour la commande adaptative consiste à identifier le processus en temps réel et à ajuster à tout instant la loi de commande en fonction du modèle identifié.

Pendant longtemps, on a cru que cette approche ne pouvait pas faire l'objet d'analyses théoriques sérieuses de stabilité. Cela explique pourquoi la décennie 70-80 a vu apparaître de multiples études d'algorithmes dits "directs", où la loi de commande est adaptée directement sans identification explicite [2 à 6]. Cette approche conserve encore des adeptes, malgré les sévères contraintes qui la limitent (hypothèse de minimum de phase, commande par poursuite parfaite, ou de variance minimale).

Au début des années 80, il est apparu que les conditions de stabilité des algorithmes basés sur l'approche indirecte pouvaient être formulées d'une façon très féconde et générale [7, 8].

Typiquement, ces conditions sont les suivantes :

(i) Le modèle identifié $\hat{\theta}(t)$ doit permettre d'établir des majorants convenables

- sur l'erreur d'équation $\nu(t)$ qui apparaît dans les équations du processus lorsqu'on y introduit les paramètres $\hat{\theta}(t)$ et les entrées-sorties observées
- sur la rapidité d'évolution $\dot{\hat{\theta}}(t)$.

(ii) Le modèle identifié doit être stabilisable, en sorte qu'il permette le calcul du vecteur des coefficients $k(\hat{\theta})$ de la loi de commande, tel que le polynome caractéristique du système en boucle fermée résultant de $\hat{\theta}(t)$ et $k(\hat{\theta})$ soit strictement d'Hurwitz à tout instant.

Ces conditions sont très peu restrictives en ce qui concerne la loi de commande, à tel point qu'on peut proclamer que, du point de vue de la stabilité des systèmes de commande adaptative, le choix des méthodes de commande est complètement indifférent, dès lors que la méthode adaptée permet de garantir

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

la stabilité exponentielle d'un modèle stabilisable (on dira plus précisément admissible vis-à-vis de la méthode considérée), ce qui est le cas de toutes les méthodes classiquement proposées dans la littérature pour la commande des systèmes linéaires.

De ce point de vue, on peut dire maintenant que la commande adaptative est d'abord et par-dessus tout un problème d'identification.

Il se trouve que les méthodes d'identification les plus classiques permettent généralement d'établir les majorants (i) cités ci-dessus. C'est le cas de beaucoup de méthodes basées sur la méthode de l'erreur de prédiction [9], incluant en particulier :

- des moindres carrés avec oubli exponentiel
- des algorithmes à gain scalaire.

Néanmoins, ces méthodes ne présentent aucune propriété particulière du point de vue de la stabilisabilité du processus identifié : si l'on ne prend pas de dispositions particulières, rien n'empêche en effet $\hat{\theta}(t)$ d'entrer dans des régions non stabilisables (non admissibles) de l'espace paramétrique.

Pour y remédier, l'approche dite "active" [10] consiste alors à exciter continuellement le système, en manipulant la consigne, ou en superposant à la commande des extra-signaux, de façon à garantir la proximité de $\hat{\theta}(t)$ avec les paramètres exacts θ^* qu'on suppose, par hypothèse, admissibles. Notons alors que les conditions d'admissibilité peuvent engendrer dans l'espace paramétrique des régions admissibles non connexes, et il faut prévoir le cas où l'initialisation $\hat{\theta}(0)$ se trouve dans une région, θ^* dans une autre. L'approche active peut permettre de garantir que le franchissement de la zone inadmissible se fera en un temps fini, ce qui suffit à garantir la stabilité globale, à condition de maintenir bornés pendant ce temps les paramètres k de la loi de commande.

Néanmoins, l'existence de signaux continuellement excitants est souvent incompatible avec le cahier des charges du système, et il faut alors trouver des solutions compatibles avec l'approche passive.

Dans le cas exceptionnel où les connaissances a priori permettent de définir un domaine admissible D_A connexe, et de préférence convexe, il est relativement facile de modifier l'algorithme d'identification par des projections sur la frontière de D_A, lorsque $\hat{\theta}$ a tendance à en sortir. Encore faut-il vérifier

que ces opérations préservent l'existence des majorants (i).

Si D_A n'est ni convexe, ni même simplement connexe, les choses se compliquent considérablement : il faut pouvoir introduire non seulement des projections, mais la possibilité de sauts d'une région admissible à une autre, et ceci en préservant les majorants (i).

Le problème de stabilisabilité dans l'approche passive est resté longtemps non résolu. Une première solution a été proposée par De Larminat [11], basée sur l'évolution simultanée de deux modèles

- un modèle $\hat{\theta}(t)$ issu des moindres carrés ordinaires
- un modèle corrigé $\bar{\theta}$ (t), utilisé pour le calcul de la loi

de commande, et réinitialisé à la fois dans le domaine admissible, et dans un voisinage de $\hat{\theta}$, lorsque $\bar{\theta}$ sort du domaine D_A. Le voisinage de $\hat{\theta}$ étant défini par l'inégalité $\| \bar{\theta} - \hat{\theta} \|_P^{-1} \leq 1$ où P est la matrice dite de variance - covariance associée à $\hat{\theta}$ par les moindres carrés.

Cette approche constituait en fait la première solution complète au problème de la stabilité globale de la commande adaptative dans l'approche indirecte passive.

Néanmoins, bien que l'algorithme d'identification soit conçu pour le cas bruité, l'analyse était faite dans le cas sans bruit, et on pouvait craindre que la preuve soit tributaire à tel point de l'hypothèse déterministe, que l'algorithme ne présente aucune robustesse vis-à-vis des bruits.

Par ailleurs, Lozano et Goodwin ont présenté [12] une solution dans laquelle on retrouve une forte similitude : identification d'un modèle $\hat{\theta}$ par une méthode apparentée au moindres carrés (cette fois à "trace constante") et utilisation pour la loi de commande d'un modèle corrigé $\bar{\theta}$, déterminé sur la base du couple $(\hat{\theta}, P)$.

Là encore, l'analyse est réduite au cas déterministe, mais la parenté des deux approches suggère qu'une solution complète devait pouvoir être trouvée dans cette voie. Une telle solution a été proposée par De Larminat [13] et le présent papier n' est autre qu'une version améliorée sur certains détails.

Il y apparaît que, contrairement aux apparences, les principes utilisés en [11] sont robustes vis-à-vis des bruits, en non seulement de bruits bornés, mais à des erreurs de modèles non structurées (non linéarités, ordre sous-estimé), et on étend même l'analyse aux systèmes variables dans le temps. Ce dernier point à notre connaissance, reste exceptionnel (on parle bien ici de l'analyse, pas de la conception), même sans traiter du problème de la

stabilisabilité.

Le présent papier apporte donc une solution véritablement complète au problème de la commande adaptative indirecte passive.

Nous avons dit plus haut que ce problème est avant tout un problème d'identification. On présente donc ici essentiellement un algorithme d'identification satisfaisant.

On pourrait évidemment tenter de généraliser à toute une classe d'algorithme d'identification, dont l'algorithme proposé serait évidemment un exemple type. En fait, les caractéristiques essentielles de l'algorithme feront l'objet de suffisamment de commentaires pour que le lecteur puisse imaginer par lui-même quelques extensions triviales et nous avons préféré décrire un algorithme unique pour la simplicité de l'exposé.

Les caractéristiques générales en sont les suivantes :

- Il est apparenté aux moindres carrés, pour disposer de la matrice P indispensable aux corrections de stabilisabilité.
- Il est exponentiellement pondéré, grâce au facteur d'oubli classique préservant l'adaptabilité, en cas de paramètres variables dans le temps.
- Il est modifié de façon à borner $\hat{\theta}$ et P.
- Le gain est divisé par la norme du vecteur d'observation, de façon à assurer la robustesse par rapport aux erreurs de modélisation.
- Enfin, toutes ses caractéristiques sont harmonisées de façon à fournir un ellipsoïde de <u>certitude</u> autour du modèle identifié $\hat{\theta}$.
- Parallèlement à $\hat{\theta}(t)$, on fait évoluer alors un modèle $\bar{\theta}(t)$ que l'on réinitialise à la fois dans le <u>domaine admissible</u> et dans le <u>domaine de certitude</u>, lorsque $\bar{\theta}(t)$ sort du domaine admissible.

Ces principes généraux se justifient intuitivement assez bien et les modalités d'application sont relativement simples.

Par contre, la démonstration <u>rigoureuse</u> selon laquelle leur application permet de garantir la stabilité globale de la commande adaptative n'est pas des plus aisées. Pour en faciliter la compréhension, nous traitons ici complètement le seul cas continu, qui permet d'alléger la présentation du problème. On donne néanmoins en annexe quelques indications indispensables à la trans-

position au cas discret.

Le papier est organisé comme suit : En section 2, on introduit les hypothèses et notations concernant un système linéaire continu monovariable d'ordre n, ainsi qu'un système de commande associée. On précise alors la notion de domaine admissible D_A vis-à-vis de la méthode de commande choisie.

En section 3, on énonce un théorème de stabilité robuste, qui établit sous une forme utilisable pour la commande adaptative le résultat suivant :

Un système $\{\dot{x} = F(t)\, x(t) + w(t)\}$, où $F(t)$ est uniformément borné et de valeurs propres à partie réelle strictement négative, est stable si $\| w(t) \|$ et $\| \dot{F}(t) \|^*$ sont soumis à des majorations convenables.

Ces majorants sont analogues à ceux qui ont déjà été utilisés par L. PRALY [14] dans le cas discret.

En section 4, on expose l'algorithme d'identification déjà commenté plus haut, sans introduire encore le modèle corrigé $\bar{\theta}$, et on montre en section 5 que le théorème de robustesse est applicable, sous l'hypothèse que $\hat{\theta}(t)$ soit continuellement admissible.

En section 6, on atteint véritablement l'apport essentiel du papier, avec l'introduction du modèle admissible $\bar{\theta}(t)$, dont on montre qu'il vérifie des majorants compatibles avec le théorème de stabilité.

Le point clef consiste à montrer que le nombre de réinitialisations possibles sur un intervalle de temps donné est majoré d'une façon similaire aux majorations de w et $\dot{\hat{\theta}}$.

Le théorème est alors appliqué pour montrer la stabilité globale d'une approche indirecte passive.

Les conclusions sont résumées en section 7. Certaines démonstrations, et l'exposé du cas discret sont reportés en appendice.

2 - PROCESSUS ET LOIS DE COMMANDE :

Notations, équations et hypothèses.

On considère d'abord un processus déterministe, invariant dans le temps, d'entrée $u(t)$, de sortie $y(t)$, décrit de façon équivalente par les équations (2.1), (2.2) et (2.3) ci-dessous :

---

*: $\|x\|$ dénote la norme vectorielle Euclidienne et $\|A\|$ la norme matricielle induite : $\|A\| \triangleq \underset{\|x\|=1}{\text{Sup}} \|Ax\|$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \frac{a_1 d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y(t) =$$

$$b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{du}{dt} + b_n u(t) \qquad 2.1$$

$$A(s)y = B(s)u \qquad 2.2$$

$$z(t) = \phi(t)^T \theta \qquad 2.3$$

où : s est l'opérateur dérivation ,

$$A(s) \triangleq s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n \qquad 2.4$$

$$B(s) \triangleq b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n \qquad 2.5$$

$$z(t) \triangleq \frac{d^n y}{dt^n} \qquad 2.6$$

$$\phi^T(t) \triangleq \left[\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \quad \ldots \quad \frac{dy}{dt} \; y \; \vdots \; \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} \quad \ldots \quad \frac{du}{dt} \; u\right] \qquad 2.7$$

$$\theta^T \triangleq \left[- a_1 \ldots - a_{n-1} - a_n \vdots \; b_1 \ldots b_{n-1} \; b_n \right] \qquad 2.8$$

Soit une loi de commande invariante, définie par :

$$\frac{d^n u}{dt^n} = - k^T \phi(t) + k_r \, y_r(t) \qquad 2.9$$

où : $y_r(t)$ est un signal de référence (éventuellement préfiltré),

$$k^T \triangleq \left[q_1 \ldots q_n \vdots \; q_1 \ldots q_n \right] \qquad 2.10$$

La loi de commande peut donc encore s'écrire :

$$P(s)u = - Q(s)\, y + k_r\, y_r \qquad 2.11$$

On note que la transmittance de retour Q(s) / P(s) est strictement propre (i.e. $q_o = 0$), ce qui permet de simplifier l'exposé, sans perte réelle de généralité. On aurait pu introduire aussi un polynome $K_r(s)$ au lieu du simple coefficient k_r . Enfin, on aurait pu préciser des degrés différents pour les polynomes A, B, P, Q.

Les équations en boucle fermée peuvent s'écrire, soit sous forme polynomiale :

$$(AP + BQ)\, y = B\, k_r\, y_r \qquad 2.12$$

$$(AP + BQ)\, u = A\, k_r\, y_r \,, \qquad 2.13$$

soit sous forme d'état :

$$\dot{\phi} = F\,\phi + w \qquad 2.14$$

où :

$$F \triangleq \begin{bmatrix} & \theta^T & \\ 1 & & 0 \\ & 1\ 0 & \\ \hline & k^T & \\ 0 & & 1 \\ & 1\ 0 & \end{bmatrix} \qquad w \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline k_r y_r \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2.15$$

Définir une méthode de commande consiste à préciser une application $\mathcal{R}$, dite loi d'ajustement :

$$\begin{array}{ccc} R^{2n} & \xrightarrow{\ \mathcal{R}\ } & R^{2n+1} \\ \theta & \longmapsto & \left[\begin{array}{c} k \\ \hline k_r \end{array}\right] \end{array}$$

qui permet d'ajuster les coefficients de la boucle de retour (k et k_r) à ceux du processus (θ), de façon à satisfaire les performances désirées. Parmi celles-ci, on exige en premier lieu la stabilité, ce qui impose que :

$A(s)\,P(s) + B(s)\,Q(s)$ soit un polynome d'Hurwitz. 2.16

En second lieu, on impose généralement d'avoir $y(t) = y_r$ en régime permanent, d'où, d'après 2.12 :

$$a_n p_n + b_n q_n = b_n k_r \qquad 2.17$$

Toutes les méthodes classiques sont conçues de façon à satisfaire au moins (2.16). Néanmoins, selon la méthode choisie, les contraintes imposées à θ pourront être plus ou moins sévères, par exemple

- A(s) et B(s) premiers entre eux pour la commande par placement de tous les pôles.
- B(s) d'Hurwitz (condition de phase minimale) pour le placement des pôles et des zéros, la poursuite parfaite de modèle, la variance de sortie minimale.
- Si A(s) et B(s) ne sont pas premiers entre eux, leur facteur commun doit être d'Hurwitz. Cette condition, dite de stabilisabilité, est d'ailleurs nécessaire pour toute méthode, quelle qu'elle soit. Elle est suffisante pour certaines, comme l'optimisation quadratique.
- Pour satisfaire (2.17), on voit que b_n doit être non nul.

Il en résulte que, pour une méthode de commande donnée, θ doit appartenir à un sous-espace convenable de l'espace paramétrique, ou domaine admissible : $D_A \in R^{2n}$.

Plus précisément, en vue de traiter les problèmes de commande adaptative, on introduit un ensemble de propriétés à satisfaire par θ pour être admissible :

Soit une loi d'ajustement $\mathcal{A}$. *On note* $k = k(\theta)$, *et donc* $F = F(\theta)$.

Un domaine D_A *est dit admissible pour la loi* $\mathcal{A}$ *s'il existe des constantes positives* Ω_F, W_F, M_R *et* M_D *telles que, pour tout* $\theta \in D_A$, *on ait les propriétés suivantes :*

$$P_F : \begin{cases} \| F(\theta) \| \leq \Omega_F & 2.18 \\ Re\left[\lambda_i \quad (F(\theta))\right] \leq -W_F < 0 & 2.19 \end{cases}$$

$$P_R : \quad k_r \leq M_R \qquad 2.20$$

$$P_D : \quad \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\partial f_{ij}(\theta)}{\partial \theta_k}\right)^2 \leq M_D^2 \qquad 2.21$$

Remarques

- (2.18) est une condition triviale de bornitude

- (2.19) impose la stabilité asymptotique de $F(\theta)$. Il est clair que l'utilisateur pourra imposer des conditions plus strictes sur la valeur et l'amortissement des modes, mais (2.19) est un minimum exigible.

- (2.20), joint à l'existence d'une borne sur la référence y_r est indispensable si l'on veut que y soit borné.

- Enfin, (2.21) impose la continuité de la loi d'ajustement, qui sera indispensable lorsqu'on considérera le cas des systèmes adaptatifs, où θ sera variable dans le temps.

Il est clair que, parmi les conditions nécessaires d'admissibilité, on trouve celle que le processus θ soit stabilisable.

Il peut se faire que des conditions suffisantes d'admissibilité s'intro-

duisent facilement dans l'algorithme résultant de la loi d'ajustement choisie.

Exemple : commande par placement de pôle.

On choisit arbitrairement un polynome :

$$D(s) \triangleq s^{2n} + d_1 s^{2n-1} + \ldots + d_{2n-1} s + d_{2n}$$

tel que ses racines σ_i vérifient :

$$R_e(\sigma_i) \leq - \omega_F \qquad 2.22$$

(D'où $d_{2n} \neq 0$).

On définit $k(\theta)$ par la résolution de l'équation diophantienne

$$A(s) P(s) + B(s) Q(s) = D(s)$$

qui se traduit par la résolution du système linéaire :

$$S(\theta) k = d$$

où :

$$S(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & 0 \\ a_n & & a_1 & b_n & & b_1 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_n & & & b_n \end{bmatrix}, \quad k \triangleq \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad d \triangleq \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{2n} \end{bmatrix} \qquad 2.23$$

Soit la loi $\mathcal{A}$:

$$k(\theta) = S^{-1}(\theta)\, d \qquad 2.24$$

$$k_r(\theta) = \frac{d_{2n}}{b_n} \qquad 2.25$$

Définissons alors D_A par

$$\theta \in D_A \iff \begin{cases} \| \theta \| \leq R_\theta & 2.26 \\ \| k(\theta) \| \leq R_k & 2.27 \\ \| k_r(\theta) \| \leq M_r & 2.28 \end{cases}$$

où R_θ, R_k, M_r sont fixés a priori.

Il est clair que D_A est un domaine admissible, en effet, pour tout $\theta \in D_A$,

- (2.26) et (2.27) impliquent l'existence d'une borne Ω_F dans (2.18)
- (2.22) implique (2.19)
- (2.28) implique (2.20)
- Enfin, il résulte de (2.24) et (2.25) que les fonctions $k(\theta)$ et $k_r(\theta)$ sont des fractions rationnelles de θ, à dénominateur non nul pour tout θ satisfaisant (2.26) à (2.28), et donc à dérivées bornées pour tout $\theta \in D_A$, d'où l'existence d'une borne M_D dans (2.21).

Notons que les données $D(s)$, R_θ, R_k, M_r ne définissent qu'implicitement D_A, mais, dans (2.18) à (2.21) :

- la grandeur M_R est donnée directement.
- Ω_F peut être déduit assez facilement de R_θ et R_k.
- ω_F peut être calculé à partir de $D(s)$.
- Par contre, M_D pourra être beaucoup plus difficile à déduire.
- Il sera plus difficile encore de déduire la forme exacte du domaine D_A qui n'est ni convexe, ni même simplement connexe, puisqu'il est séparé au moins en deux régions par la contrainte issue de (2.25, 2.28) :

$$|b_m| \geq \frac{|d_{2n}|}{M_r} \qquad 2.29$$

Notons donc dès à présent les points suivants :

. La connaissance de la <u>forme</u> exacte de D_A n'est <u>pas</u> nécessaire à l'élaboration des algorithmes qui seront introduits ultérieurement.

. Dans certains cas favorables (mais trop particuliers) le domaine D_A pourrait être réduit à un voisinage très local d'un point déterminé de l'espace paramétrique, et l'hypothèse de connexité et de convexité pourrait alors être introduite.

Définissons enfin pour les besoins ultérieurs un domaine fortement stabilisable D_{FA}.

On suppose que D_{FA} est strictement inclus dans D_A :

$$D_{FA} \subset D_A$$

et on définit la distance δ :

$$\delta = \min_{\theta_1 \in D_{FA},\ \theta_2 \notin D_A} \| \theta_1 - \theta_2 \| \qquad 2.30$$

Dans le cas du placement de pôle, on définira facilement D_{FA} de la même façon que D_A, en introduisant des seuils différents dans (2.26) à (2.28) :

$$R'_\theta < R_\theta \qquad R'_k < R_k \qquad M'_r < M_r$$

L'existence d'une distance δ non nulle résulte directement du caractère borné et dérivable de $k(\theta)$ lorsque $\theta \in D_A$.

On a choisi ici l'exemple de la commande par placement de pôle, comme étant le plus simple et le plus caractéristique, mais il semble évident que toute méthode de commande raisonnable permet de définir facilement un domaine admissible D_A et un domaine D_{FA}, garantissant l'existence des grandeurs Ω_F, ω_F, M_R, M_D et δ. La définition des domaines pourra évidemment se faire aussi d'après la connaissance a priori des processus concernés dans les applications prévues.

3 - UN THEOREME DE STABILITE ROBUSTE POUR LES SYSTEMES LENTEMENT VARIABLES DANS LE TEMPS

On considère un système décrit par l'équation

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + w(t)$$

Dans ce paragraphe, F ne présente pas nécessairement la structure définie par (2.15). x(t) n'est donc pas nécessairement de la forme de $\phi(t)$, ni w donné par (2.15).

On considère ici le cas où F est variable dans le temps (soit F(t)), et où w(t) inclut éventuellement des erreurs de modèle. Par exemple, si le modèle exact est $\dot{x} = F^*x$, on a $w = (F^* - F)x$. Donc w n'est pas supposé borné a priori.

Il est clair alors que même si F(t) satisfait à tout instant la condition (2.19) (valeurs propres à partie réelle négative), la stabilité n'est plus garantie, à moins que $\| \dot{F} \|$ et $\| w \|$ ne soient "relativement petits".

L'objet de ce paragraphe est de préciser des majorants pour $\| \dot{F} \|$ et $\| w \|$, de sorte que ces majorants soient féconds pour le traitement ultérieur des problèmes de commande adaptative.

Théorème 1

On considère les fonctions vectorielles du temps x(t) et w(t), et la fonction matricielle F(t). (dimensions n_F et $n_F x n_F$).

On suppose que les propriétés suivantes sont vraies pour tout t, τ et $T \geq 0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)\, x(t) + w(t) \qquad 3.1$$

$\| x(0) \|$ est fini 3.2

Il existe des constantes positives ω_F et Ω_F telles que l'on ait :

$$R_e [\, \lambda_i(t) \,] \leq -\omega_F < 0 \qquad (\lambda_1 \ldots \lambda_{n_F} : \text{val.propres de F}) \qquad 3.3$$

$$\| F(t) \| \leq \Omega_F < \infty \qquad 3.4$$

On a :

$$\int_t^{t+T} \frac{\| \dot{F}(\tau) \|}{k_d}\, d\tau \leq T + T_1 \qquad 3.5$$

$$\int_t^{t+T} \frac{\| w(\tau) \|^2}{(M_w + k_x \| x(\tau) \| + k_\xi \xi(\tau))^2} d\tau \leq T + T_2 \qquad 3.6$$

où $\xi(\tau)$ satisfait :

$$0 \leq \xi(0) < \infty \qquad 3.7$$

$$T_\xi \dot{\xi}(t) = - \xi(t) + \| x(t) \| \qquad 3.8$$

et où

T_1, T_2, M_w sont des constantes positives (éventuellement grandes)

T_ξ, k_d, k_x, k_ξ sont des constantes positives, qui dépendent seulement de ω_F et Ω_F

Alors $x(t)$ est uniformément borné.

Pour k_d, k_x, k_ξ, T_ξ, on peut proposer les expressions suivantes :

$$T_\xi \leq T_F \qquad 3.9$$

$$k_d \leq \frac{\tau_F}{2T_F^3} \qquad 3.10$$

$$k_x \leq \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\tau_F}{T_F^3}} \qquad 3.11$$

$$k_\xi \leq \frac{1}{16} \sqrt{\frac{T_\xi}{T_F^3}} \qquad 3.12$$

où :

$$T_F \triangleq \frac{n_F^2}{2\omega_F} \left(\frac{2\Omega_F}{\omega_F} \right)^{2n_F} \qquad 3.13$$

$$\tau_F \triangleq \frac{1}{\Omega_F} \qquad 3.14$$

Les expressions ci-dessus ne sont pas nécessairement les "meilleures" : elles résultent de certains choix arbitraires intervenant lors des démonstrations et, lors d'applications concrètes, il pourra en résulter des valeurs k_d, k_ξ et k_d extrêmement petites, et donc peu utilisables pour quantifier les non-stationnarités et erreurs de modèle tolérables par (3.5) et (3.6).

Dans les problèmes de robustesse, toute la difficulté consiste à trouver des majorants intéressants, et pour cela, il faut nécessairement restreindre plus ou moins la classe de problèmes considérés (et ceci est surtout vrai dans les approches par équation d'état). En fait notre objectif n'est pas tellement ici de traiter du problème de la robustesse en tant que tel , que de proposer un cadre, le plus général et le moins structuré possible. Dans ce cadre, les majorants proposés n'auront pas d'intérêt réel en tant qu'instrument de quantification : ils prouveront seulement l'existence de ces majorants et, accessoirement, ils pourront donner des indications qualitatives sur les actions à exercer pour améliorer la robustesse. Ainsi, on voit apparaître dans (3.13) le rapport (Ω_F/ω_F) qui a intérêt à être petit pour accroître k_d, k_x et k_ξ.

Il en résulte qu'il est souhaitable d'augmenter la borne ω_F concernant les valeurs propres de F, mais sans augmenter pour autant $\| F \|$. Ceci revient à dire qu'on a intérêt à "équilibrer" si possible les modes du système en boucle fermée. De même, dans (3.10 à 3.12), la grandeur τ_F est donnée par $1/\Omega_F$ (3.14). Il en résulte que l'accroissement de $\| F \|$ est nocif pour la robustesse et donc que les grands gains (qui se répercutent dans F) sont à proscrire ...

Commentons maintenant la forme des majorants (3.5) et (3.6).

. Lorsque T est grand, (3.5) revient à borner $\| F \|$ en moyenne. Lorsque $T \to 0$, (3.5) borne l'amplitude de sauts sur F(t).

Dans cette expression, k_d doit être petit, compte tenu des caractéristiques globales du processus, définies par ω_F et Ω_F. Par contre, T_1 est une borne quelconque. Il en résulte que (3.5) sera satisfait aussi bien par des variations continuelles, mais lentes, que par des variations brutales, mais rares.

. Dans l'introduction du présent paragraphe, on a mentionné que w(t) pouvait inclure des erreurs de modèle : Si x(t) est solution d'un modèle "exact" défini par ailleurs et F(t) est donné, w est défini par $w \triangleq \dot{x} - Fx$.

Grâce à (3.6), ces erreurs peuvent revêtir des formes très générales.

Supposons d'abord qu'il existe un modèle exact d'ordre égal à n_F : soit x

solution de

$$\dot{x} = f^*(x) + w_e \qquad 3.15$$

où w_e est un signal exogène borné

$$\| w_e \| \leq M_w \qquad 3.16$$

et où $f^*(x)$ est une fonction de x inconnue.
Par la définition (3.14) on a :

$$w = w_e + f^*(x) - F\,x \qquad 3.17$$

si $f^*(x)$ est faiblement non linéaire, et F un modèle approché tel que l'on ait, pour tout x :

$$\frac{\| f^*(x) - F\,x \|}{\| x \|} \leq k_x \qquad 3.18$$

alors (3.6) sera satisfait.

Supposons maintenant un modèle exact d'ordre supérieur à n_f et limitons nous, pour simplifier, au cas linéaire déterministe où x serait solution d'un modèle exact ayant pour état $\begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix}$:

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} x \\ \hline \zeta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline \zeta \end{array}\right] \qquad 3.19$$

Alors w résulte des dynamiques non modélisées :

$$w = F_{12}\,\zeta \qquad 3.20a$$

$$\dot{\zeta} = F_{22}\,\zeta + F_{21}x \qquad 3.20b$$

Alors, on a encore

$$w(t) = H(t) * x(t) \qquad 3.21$$

où $*$ dénote le produit de convolution et H(t) la réponse impulsionnelle du processus (3.20), d'entrée x et de sortie w.
Si F_{22} est asymptotiquement stable, $\| F_{12} \|$ et/ou $\| F_{21} \|$ suffisamment petit(s), il existe T_ξ et k_ξ tels que

$$\| H(t) \| \leq k_\xi \, e^{-\frac{t}{T_\xi}} \qquad 3.22$$

et de plus, si $T_\xi \leq T_F$ (d'après (3.9))

$$\| H(t) \| \leq k_\xi \, e^{-\frac{t}{T_F}} \qquad 3.23$$

Alors, si l'on définit ξ selon (3.8) :

$$\dot{\xi} = \frac{1}{T_F} (\| x \| - \xi) \qquad 3.24$$

$$\xi = \| x \| * e^{-t/T_F} \geq \frac{\| x \| * \| H(t) \|}{k_\xi} \geq \frac{\| w(t) \|}{k_\xi}$$

et (3.6) sera satisfait.

On note que la condition $T_\xi \leq T_F$ n'impose pas que T_ξ soit petit puisque T_F sera généralement grand.

Plus généralement, l'inégalité (3.22) peut être vraie même pour des systèmes à paramètres distribués, approximés par des modèles d'ordre fini.

D'une façon très générale, le théorème permet de prendre en compte des erreurs de modèle non structurées, de la forme

$$w(t) = w(t \, , \, x(\tau) \quad | \tau \leq t) \qquad 3.25$$

Dans le cadre étroit de la robustesse, une inégalité de la forme

$$\frac{\| w \|}{M_w + k_x \| x \| + k_\xi \, \xi} \leq 1 \qquad 3.26$$

pourrait sembler déjà intéressante, et la forme intégrale (3.6) être un raffinement superflu.

La forme (3.6) se révèlera néanmoins indispensable ultérieurement pour l'analyse des commandes adaptatives, lorsque w résultera d'un modèle identifié $\hat{\theta}$.

Les modèles résultants d'un algorithme d'identification satisferont alors effectivement des inégalités de type intégral telles (3.5) et (3.6), et non des inégalités simples telles que (3.26).

Finalement, le théorème proposé est énoncé de la façon à la fois la plus simple et la plus générale, pour servir par la suite d'outil de base pour la stabilité des systèmes adaptatifs.

La démonstration du théorème est donnée en appendice A. Elle est basée sur une approche de Lyapunov, en considérant la fonction :

$$W(t) \triangleq x^T(t)\, \Sigma(t)\, x(t) + T_\xi\, \xi^2(t) \qquad 3.27$$

où $\Sigma(t)$ est solution de

$$F(t)^T\, \Sigma(t) + \Sigma(t)\, F(t) + 2\, I = 0 \qquad 3.28$$

Selon la théorie classique de la stabilité, (3.3) et (3.4) impliquent l'existence de bornes hautes et basses pour $\Sigma(t)$:

$$\tau_F\, I \leq \Sigma(t) \leq T_F\, I \qquad 3.29$$

Néanmoins, on consacre une première partie de la preuve à la dérivation des expressions proposées (3.12) et (3.13) pour T_F et τ_F.

La seconde partie de la démonstration concerne la relation entre $\dot{\Sigma}$ et $\dot{F}$. On montre que

$$\| \dot{\Sigma}(t) \| \leq T_F^2\, \| \dot{F}(t) \|$$

Alors, on peut enfin montrer que $W(t)$ est borné, ce qui prouve le théorème.

Enfin, on a donné une version continue du théorème, mais tous les principes

sont aisément transposables au cas discret, et on donne sans démonstration, en appendice B, une version discrète de ce théorème.

4 - UN ALGORITHME D'IDENTIFICATION ORIENTE VERS LA COMMANDE ADAPTATIVE

Même si un algorithme d'identification est conçu de façon à minimiser l'écart entre les estimées $\hat{\theta}(t)$ et les paramètres exacts $\theta^*(t)$, cet objectif pourra souvent n'être que très imparfaitement atteint pour de multiples raisons.

(i) - Entrées insufisamment excitantes (d'où solution non unique à $z(t) = \phi^T(t)\,\theta$); et le présent travail se situe justement dans le cadre de la commande adaptative passive, sans hypothèse d'entrée continuellement excitantes.

(ii) - Existence des bruits non mesurés.

(iii) - Modèle "exact" $\theta^*(t)$ variable dans le temps.

(iv) - Non existence d'un modèle "exact" $\theta^*(t)$. Il s'agit là en fait d'une difficulté plutôt sémantique car l'identification n'a de sens que si l'on peut au moins supposer l'existence d'un modèle "acceptable" ou "nominal" $\theta^*(t)$, tel que $z(t) - \phi^T(t)\,\theta^*(t)$ soit "assez" petit .

En raison des difficultés soulevées par (i) et (iv), on ne cherchera pas à analyser ici les algorithmes d'identification sous l'angle de la petitesse d'un écart (hypothétique) $(\hat{\theta} - \theta^*)$, mais sous l'angle des propriétés de l'erreur d'équation :

$$\nu(t) \triangleq z(t) - \phi^T(t)\,\hat{\theta}(t)$$

et de la vitesse d'évolution :

$$\dot{\hat{\theta}} \triangleq \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}$$

qui doivent être l'un et l'autre "relativement" petits pour que le modèle soit utilisable.

On peut prévoir immédiatement qu'il sera intéressant de pouvoir majorer $\nu(t)$ et $\hat{\theta}$ par des expressions compatibles avec les inégalités (3.5) et (3.6) du théorème de robustesse.

Par bonheur, les algorithmes classiques du type moindres carrés, ou identification par filtrage, satisfont pratiquement d'emblée cet objectif. Néanmoins, divers points de détails doivent être traités avec attention, pour satisfaire simultanément diverses conditions complémentaires. Celles-ci, sans être heureusement incompatibles, ne laissent méanmoins qu'une marge de manoeuvre étroite.

Les difficultés que nous nous proposons de résoudre sont en effet les suivantes :

- le processus à identifier est bruité, variable dans le temps (lentement), non linéaire (faiblement), et l'ordre peut être supérieur à l'ordre n du modèle $\vec{\theta}$. Par ailleurs, les dynamiques non modélisées peuvent être lentes, à condition d'être d'amplitude relativement petite.

- $\hat{\theta}(t)$ doit rester borné pour des raisons techniques évidentes.

- on souhaite un algorithme du type "moindres carrés", et non du type "gradient stochastique". En d'autres termes, il devra apparaître une matrice P apparentée à la matrice dite classiquement de variance-covariance.

- la matrice P devra être bornée supérieurement pour des raisons techniques évidentes.

- la matrice P devra être bornée inférieurement pour éviter la décroissance des gains d'identification.

- le modèle identifié devra être admissible, c'est-à-dire au moins stabilisable.

- Ce problème sera traité complètement plus loin (section 6). Néanmoins, en prévision de cet objectif, on veut que le couple $\hat{\theta}(t)$, $P(t)$ définisse un domaine de certitude pour $\theta^*(t)$ autour de $\hat{\theta}(t)$.

- tout ce qui précède doit rester <u>rigoureusement</u> compatible avec l'existence de majorants du type (3.5) - (3.6).

On va présenter maintenant un algorithme type qui permet de satisfaire les objectifs proposés.

Pour la simplicité, nous avons évité volontairement de proposer diverses variantes possibles. Celles-ci existent, bien entendu, et le lecteur peut en imaginer, mais il est bon de redire que les objectifs énumérés plus haut sont à la limite de l'incompatibilité mutuelle (et c'est ce qui fait la difficulté du problème). Telle "amélioration" tentante à première vue aura généralement des répercussions indésirables sur un autre point, parfois éloigné, situé éventuellement dans le paragraphe suivant consacré à la résolution du problème de la stabilisabilité. Le lecteur est donc invité à se garder d'une critique trop hâtive à première lecture, même si celle-ci lui paraît évidente. Il devra aussi considérer l'algorithme proposé comme un prototype destiné avant tout à apporter la preuve de l'existence d'une solution acceptable.

Soit $\mathcal{P}$ le processus à identifier, d'entrée u(t), de sortie y(t).

On suppose qu'il existe un vecteur $\theta^*(t)$, dit "modèle nominal", ou "meilleur modèle", et on note v(t) l'erreur d'équation :

$$v(t) \triangleq z(t) - \phi^T(t)\,\theta^*(t) \qquad 4.1$$

où z(t) et $\phi(t)$ sont définis plus haut (2.6), (2.7).

On suppose <u>données</u> des constantes σ, r, ρ, β, telles que l'on ait :

$$\left| \frac{v(t)}{s(t)} \right| \leq 2 \qquad 4.2$$

où $s(t) \triangleq \sigma + r\|\phi(t)\| + \rho\,\psi(t)$ 4.3

$\psi(t)$ étant solution de

$$\dot{\psi} = -\beta(\psi(t) - \|\phi(t)\|) \quad (0 \leq \psi(0) < \infty) \qquad 4.4$$

On suppose que $\|\theta^*(t)\|$ est borné par une constante donnée R.

$$\| \theta^* \|^2 \leq R^2 \qquad 4.5$$

On suppose donné α tel que l'on ait :

$$\| \dot{\theta}^* \|^2 \leq \alpha^2 \frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2} \qquad 4.6$$

Remarques

- Compte tenu de (4.2), (4.3), (4.4), le processus réel pourra être non linéaire et d'ordre supérieur à n . Néanmoins, on verra par la suite que r et ρ sont contraints d'être petits.

- L'inégalité (4.5) définit un domaine a priori qui est sphérique autour de l'origine, mais on peut considérer le cas d'un domaine ellipsoïdal, centré autour d'une valeur quelconque donnée θ_N, soit :

$$(\theta^* - \theta_N)^T Q(\theta^* - \theta_N) \leq R^2 \qquad 4.7$$

où Q est non singulière, factorisable en $Q = S^T S$. 4.8

(4.1) peut se réécrire sous la forme :

$$v(t) = [z(t) - \phi^T \theta_N] - [\phi^T S^{-1}] \cdot [S(\theta^* - \theta_N)] \qquad 4.9$$

en remplaçant z par $(z - \phi^T \theta_N)$

ϕ^T par $\phi^T S^{-1}$

et θ^* par $S(\theta^* - \theta_N)$

le nouveau vecteur θ^* satisfait maintenant (4.5).

- On note que la constante donnée r intervient dans les majorants de $v(t)$ et de $\dot{\theta}^*(t)$ (cf. (4.5) et (4.6)).

Il en résulte que si $\theta^*(t)$ est un modèle linéaire ($|v(t)|$ borné par 2σ), mais variable dans le temps ($\dot{\theta}^*(t)$ non nul), alors la constante donnée r (qui interviendra dans l'algorithme d'identification), devra être non nulle de façon à pouvoir satisfaire (4.6)).

On propose l'algorithme d'identification suivant, établi à partir des constantes données σ, r, ρ, β, R, α définies plus haut :

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \alpha \left(P(t)\,\phi(t)\,\frac{\nu(t)}{s^2(t)} - \frac{P(t)\,\hat{\theta}(t)\,\lambda}{R^2} \right) \qquad 4.10$$

$$\dot{P}(t) = \alpha \left(\frac{-P(t)\,\phi(t)\,\phi(t)^T P(t)}{s^2(t)} + P(t) - \frac{P(t)^2}{R^2} \right) \qquad 4.11$$

avec $\|\hat{\theta}(0)\| \leq R$ 4.12

$$P(0) = R^2 I \qquad 4.13$$

où $\nu(t) \triangleq z(t) - \phi^T(t)\,\hat{\theta}(t)$ 4.14

$s(t)$ est défini plus haut (4.3), (4.4)

et où $\lambda = 0$ si $\|\hat{\theta}\| < R$ 4.15

$\lambda = 1$ si $\|\hat{\theta}\| \geq R$ 4.16

Commentaires

On peut comparer cet algorithme avec les moindres carrés à oubli exponentiel, qui s'écrivent :

$$\dot{\hat{\theta}} = P\,\phi\,\nu \qquad 4.17$$

$$\dot{P} = -P\phi\,\phi^T P + \alpha P \qquad 4.18$$

Les différences avec (4.10), (4.11) portent d'abord sur la pondération $(\frac{\alpha}{s^2})$ qui affecte $P\phi\nu$ et $P\phi\phi^T P$.

En liaison avec les hypothèses (4.2) à (4.6), cette pondération permettra à la fois d'obtenir un domaine de certitude à partir du couple $(\hat{\theta},P)$, et les inégalités du type souhaité pour majorer ν et $\hat{\theta}$. On remarque que le facteur (α/s^2) ne permet pas d'attribuer à α la valeur 0 (oubli nul). Cette restriction est le prix de l'obtention d'un domaine de certitude.

Par ailleurs, les termes $P\hat{\theta}\lambda/R^2$ et P^2/R^2 s'associent pour borner $\hat{\theta}$ et P, tout en conservant les propriétés déjà acquises.

L'algorithme (4.10) à (4.16), sous les hypothèses (4.1) à (4.6) présente les propriétés suivantes :

Propriété 1 : des bornes sur P

On a

$$\boxed{P(t) \geq \frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2} I} \qquad 4.19$$

$$\boxed{P(t) \leq R^2 I} \qquad 4.20$$

Preuve

On note $M(t) \triangleq P^{-1}(t)$ 4.21

D'où, d'après (4.11): $\dot{M} = \alpha \frac{\phi\,\phi^T}{s^2} + M - \frac{I}{R^2}$ 4.22

Soit a un vecteur constant arbitraire, et $U(t) \triangleq a^T M a$.

On a $\dot{U} = \alpha \left(\frac{a^T\phi}{s}\right)^2 - U + \|a\|^2/R$

Or, d'après (4.3) : $\left(\frac{a^T\phi}{s}\right)^2 \leq \frac{\|a^2\|\,\|\phi\|^2}{(\sigma + r\|\phi\| + \rho\psi)^2} \leq \frac{\|a^2\|}{r^2}$

d'où : $-U + \frac{\|a\|^2}{R^2} \leq \frac{\dot{U}}{\alpha} \leq -U + \frac{\|a\|^2}{R^2} + \frac{\|a\|^2}{r^2}$

or : $U(0) = \frac{\|a\|^2}{R^2} \in \left[\frac{\|a\|^2}{R^2}\,,\,\left(\frac{\|a\|^2}{R^2} + \frac{\|a\|^2}{r^2}\right)\right]$

Lorsque U(t) atteint la borne supérieure de l'intervalle ci-dessus, $\dot{U}(t)$ devient négatif ou nul. U(t) ne peut donc pas aller au-delà. Même chose pour la borne inférieure.

On a donc, ce qui démontre (4.19) et (4.20) :

$$M \geq I/R^2 \qquad 4.23$$

$$M \leq I\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right) \qquad 4.24$$

Commentaire

On sait qu'une contre-indication à l'oubli exponentiel classique est qu'il entraîne la divergence de P lorsque $\phi(t)$ ne balaye pas continuellement tout l'espace.

La présence du terme $(-P^2/R)$ permet de prévenir cet inconvénient.

Inversement si $\phi(t)$ diverge, la matrice P pourrait tendre vers 0. La "normalisation" de ν par s, (où intervient $r\|\phi\|$), s'y oppose (d'après (4.19)). La présence du terme $r\|\phi\|$ dans s, qui est imposée, ou par les bruits majorés par $r\|\phi\|$ (cf. éq. (4.3)), ou par l'instationnarité de θ^* (cf. éq. (4.6)), présente une retombée favorable en générant un minorant de P (4.19). Un tel minorant est généralement considéré comme un facteur favorable, mais l'analyse des résultats ultérieurs montrera qu'il n'est en rien nécessaire dans le cas linéaire (bruits bornés ν majorés par σ) et invariant ($\dot{\theta}^* = 0$).

Propriété 2 : un ellipsoïde de certitude autour de $\hat{\theta}$.

On a $$\boxed{(\hat{\theta} - \theta^*)^T P^{-1} (\hat{\theta} - \theta^*) \leq 16} \qquad 4.25$$

Preuve

On note $$\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta^* \qquad 4.26a$$

$$V \triangleq \tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta} \qquad 4.26b$$

On dérive V en utilisant (4.18)

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T \dot{M} \tilde{\theta} + 2\tilde{\theta}^T P^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta}^*)$$

D'où, avec (4.22) et (4.10)

$$\frac{\dot{V}}{\alpha} = \frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{s^2} - \tilde{\theta}^T M \tilde{\theta} + \frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{R^2}$$

$$+ 2\tilde{\theta}^T \phi \frac{\nu}{s^2} - 2\lambda \tilde{\theta}^T \hat{\theta} - \frac{2\tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\theta}^*}{\alpha} + \left(\frac{\nu^2 - \nu^2}{s^2}\right)$$

D'où

$$\frac{\dot{V}}{\alpha} + \frac{\nu^2}{s^2} = -V + \left(\frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{R^2} - 2\lambda \tilde{\theta}^T \hat{\theta}\right) + \frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2 + 2\tilde{\theta}^T \phi \nu + \nu^2}{s^2}$$

$$- \frac{2\tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\theta}^*}{\alpha} \qquad 4.27$$

Or, on a $(\tilde{\theta}^T \phi + \nu) = (\hat{\theta} - \theta^*)^T \phi + (z - \phi^T \hat{\theta}) = z - \phi^T \theta^* = v$

D'où

$$\frac{\dot{V}}{\alpha} + \frac{\nu^2}{s^2} = -V + \left(\frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{R^2} - 2\lambda \tilde{\theta}^T \hat{\theta}\right) + \frac{v^2}{s^2} - \frac{2\tilde{\theta} P^{-1} \dot{\theta}^*}{\alpha} \qquad 4.28$$

Considérons successivement les termes du second membre. On a :

(i) $$\boxed{\frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{R^2} - 2\lambda \tilde{\theta}^T \hat{\theta} \leq 4} \qquad 4.29$$

En effet

- si $\|\hat{\theta}\| < R$, on a $\lambda = 0$

  Alors, $\|\tilde{\theta}\| < \|\hat{\theta}\| + \|\theta^*\| < 2R$, d'où (4.29)

- si $|\theta| \geq R$, on a $\lambda = 1$ et

$$\frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{R^2} - 2\lambda \tilde{\theta}^T \hat{\theta} = \frac{1}{R^2} \left[\tilde{\theta}^T \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \hat{\theta} + \hat{\theta}^T \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \hat{\theta} \right]$$

$$= \frac{1}{R^2} \theta^{*T} \theta^* - \frac{1}{R^2} \hat{\theta}^T \hat{\theta}$$

$$\leq \frac{1}{R^2} \theta^{*T} \theta^*$$

≤ 1, d'où encore (4.29). □

(ii) Par hypothèse (4.2) : $\boxed{\frac{v^2}{s^2} \leq 4}$ □ 4.30

(iii) $$\boxed{2 \frac{|\tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\theta}^*|}{\alpha} \leq 2\sqrt{V}} \qquad 4.31$$

En effet, d'après l'inégalité de Schwartz

$$|\tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\theta}^*| \leq \sqrt{\tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta}} \sqrt{\dot{\theta}^{*T} P^{-1} \dot{\theta}^*}$$

D'où en incorporant (4.26b), (4.24), puis (4.6) :

$$|\hat{\theta}^T P^{-1} \dot{\theta}^*| \leq \sqrt{V} \sqrt{\|\dot{\theta}^*\|^2 \frac{R^2 + r^2}{R^2 r^2}} \leq \alpha \sqrt{V}$$ □

On reporte (4.29), (4.30) et (4.31) dans (4.28) :

$$\frac{\dot{V}}{\alpha} + \frac{v^2}{s^2} \leq -V + 4 + 4 + 2\sqrt{V} \qquad 4.32$$

D'où

$$\frac{\dot{V}}{\alpha} \leq -(V - 2\sqrt{V} - 8) = -(\sqrt{V} - 4)(\sqrt{V} + 2) \qquad 4.33$$

$\dot{V}$ devient donc négatif pour $\sqrt{V} > 4$ (soit

Sachant que $0 \leq V(0) \leq 16$, il en résulte que V restera toujours inférieur à 16.

Commentaire

Grâce à (4.25), le couple $(\hat{\theta}, P)$ définit autour de $\hat{\theta}$ un ellipsoïde où se trouve avec certitude le modèle nominal inconnu θ^*.

Ce domaine n'est pas trivial, en ce sens qu'il n'englobe pas nécessairement la sphère $\|\theta^*\| \leq R$. En effet, P peut devenir petit (dans la limite imposée par (4.19)).

Propriété 3 : une borne sur $\hat{\theta}$.

On a $$\boxed{\|\hat{\theta}\| \leq 5R} \qquad 4.34$$

En effet $\tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta} \leq 16$

avec $P^{-1} \geq 1/R^2$

d'où $\|\tilde{\theta}\|^2 \leq 16\, R^2$

par ailleurs $\hat{\theta} = \theta^* + \tilde{\theta}$

d'où $|\hat{\theta}| \leq |\theta^*| + |\tilde{\theta}| \leq R + 4R = 5R$

Propriété 4 : un majorant de ν.

On a, pour tout t et T positif :

$$\boxed{\int_t^{t+T} \frac{\nu^2}{s^2}\, d\tau \leq 16 \left[T + \frac{1}{\alpha} \right]} \qquad 4.35$$

Preuve

On reprend (4.32) dans lequel $\sqrt{V} \leq 4$

D'où

$$\frac{\dot{V}}{\alpha} + \frac{\nu^2}{s^2} \leq 16$$

On intègre de t à t + T

$$\frac{V(t+T) - V(t)}{\alpha} + \int_t^{t+T} \frac{\nu^2}{s^2} d\tau \leq 16T$$

D'où (4.35), sachant que $0 \leq V \leq 16$.

Propriété 5 : un majorant de $\dot{\hat{\theta}}$.

On a

$$\int_t^{t+T} \| \dot{\hat{\theta}} \| \, d\tau \leq 16 \sqrt{n} R \alpha (T + 1/\alpha) \qquad 4.36$$

Preuve

D'après (4.10) : $\| \dot{\hat{\theta}} \| \leq \| \frac{\alpha P \phi \nu}{s^2} \| + \| \frac{\alpha P \hat{\theta}}{R^2} \|$ 4.37

où $\| P \| \leq R^2$, $\| \hat{\theta} \| \leq 5R$

D'où

$$\int_t^{t+T} \|\dot{\tilde{\theta}}\| d\tau \leq \int_t^{t+T} \left\| \frac{\alpha P \phi \nu}{s^2} \right\| d\tau + \int_t^{t+T} 5R\alpha \, d\tau \qquad 4.38$$

Considérons le terme $\left\| \frac{\alpha P \phi \nu}{s^2} \right\| = \left\| \frac{\alpha P \phi}{s} \right\| \left| \frac{\nu}{s} \right|$

On a l'inégalité de Schwartz :

$$\left\{ \int_t^{t+T} \left\| \frac{\alpha P \phi}{s} \right\| \left| \frac{\nu}{s} \right| d\tau \right\}^2 \leq \int_t^{t+T} \left\| \frac{\alpha P \phi}{s} \right\|^2 d\tau \cdot \int_t^{t+T} \left| \frac{\nu}{s} \right|^2 d\tau \qquad 4.39$$

Or

$$\left\| \frac{P \phi}{s} \right\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\frac{P \phi \phi^T P}{s^2} \right) = \mathrm{Tr}\left(P - \frac{P^2}{R^2} - \frac{\dot{P}}{\alpha} \right) \quad \text{(d'après (4.11))}$$

$$\leq \mathrm{Tr}\left(R^2 I - \frac{\dot{P}}{\alpha} \right)$$

D'où

$$\int_t^{t+T} \left\| \frac{P \phi}{s} \right\|^2 d\tau \leq \mathrm{Tr}\,(R^2 I)\, T + \frac{\mathrm{Tr}[P(t)] - \mathrm{Tr}[P(t+T)]}{\alpha}$$

$$\leq \mathrm{Tr}\,(R^2 I)\, T + \frac{\mathrm{Tr}(R^2 I)}{\alpha} = T_r(I) R^2 \left(T + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Sachant que les matrices sont de dimension 2n, Tr(I) = 2n.

D'où

$$\int_t^{t+T} \left\| \frac{P\,\phi}{s} \right\|^2 d\tau \leq 2n\,R^2\,(T + 1/\alpha) \qquad 4.40$$

On incorpore (4.35) et (4.40) dans (4.39) :

$$\int_t^{t+T} \left\| \frac{\alpha\,P\,\psi\,\nu}{s^2} \right\| d\tau \Bigg)^2 \leq 32n\,\alpha^2\,R^2\,(T + \frac{1}{\alpha})^2 \qquad 4.41$$

On incorpore (4.38), d'où

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \left\| \dot{\hat{\theta}} \right\| d\tau &\leq \sqrt{32n}\,\alpha\,R\,(T + \frac{1}{\alpha}) + 5\,\alpha\,RT \\ &\leq (\sqrt{32n} + 5)\,\alpha\,RT + \sqrt{32n}\,R \qquad 4.42 \\ &\leq (\sqrt{32n} + 5)\,\alpha\,R(T + \frac{1}{\alpha}) \end{aligned}$$

Sachant que $\sqrt{32n} + 5 \leq (\sqrt{32} + 5)\sqrt{n} < 16\sqrt{n}$, (car $n > 1$), on a démontré (4.36).

Remarque

On aurait pu conserver pour la suite le majorant (4.42), plus strict que (4,36). On a retenu (4.36) pour la simplicité de l'exposé.

5 - STABILITE ROBUSTE D'UNE COMMANDE ADAPTATIVE, SOUS HYPOTHESE D'ADMISSIBILITE DU MODELE IDENTIFIE

On présente ce résultat sous forme du théorème suivant :

THEOREME 2

. Soit un processus $\mathcal{P}$ de paramètre $\theta^*(t)$, satisfaisant (4.1) à (4.6).

. Soit l'algorithme d'identification décrit par (4.10) à (4.15).

. On suppose que $\hat{\theta}(t)$ reste continuellement admissible vis-à-vis de la loi d'ajustement $\mathcal{A}$ choisie, le domaine admissible étant défini par (2.18) à (2.21).

Alors le système en boucle fermée est globalement stable si l'on a :

$$\alpha > 0 \qquad 5.1$$

$$16\sqrt{n}\,R\alpha \leq k_d/M_d \qquad 5.2$$

$$4\sqrt{2}\,r \leq k_x \qquad 5.3$$

$$4\sqrt{2}\,\rho \leq k_\xi \qquad 5.4$$

$$1/\beta \leq T_F \qquad 5.5$$

où T_F, k_x, k_ξ, k_d sont définis de (3.9) à (3.13).

Preuve

On applique le théorème de robustesse avec :

$$x \triangleq \phi, \quad F \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\theta}^T(t) & \\ 1 \;\ddots\; 1\;0 & 0 \\ k^T(\theta) & \\ 0 & 1 \;\ddots\; 1\;0 \end{bmatrix}, \quad w \triangleq \begin{bmatrix} \nu \\ 0 \\ k_r(\hat{\theta})y_r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 5.6$$

Alors :

- x, F et w vérifient (3.1).
- on admet que $\| \phi(0) \|$ est borné, d'où (3.2).
- $\hat{\theta}(t)$ étant par hypothèse admissible, (3.3) et (3.4) sont vérifiés par (2.18) et (2.19)
- on note $\xi \triangleq \psi$, alors (3.7) et (3.8) sont vérifiés avec $T_\xi \triangleq 1/\beta$.
- on a les dérivées totales :

$$\frac{d f_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \hat{\theta}_k} \frac{d \hat{\theta}_k}{dt} \qquad 5.7$$

D'où

$$(\dot{f}_{ij})^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} (\frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta_k})^2 \| \dot{\hat{\theta}} \|^2$$

et, $\hat{\theta}$ étant admissible, d'après (2.21), on a

$$\| \dot{F} \| \leq M_D \| \dot{\hat{\theta}} \|$$

(3.5) devient donc

$$\int_t^{t+T} \frac{\| \dot{F} \|}{k_d} d\tau \leq \frac{M_D}{k_D} \int_t^{t+T} \| \dot{\hat{\theta}} \| d\tau$$

on utilise (4.36)

$$\int_t^{t+T} \frac{\| \dot{F} \|}{k_d} d\tau \leq \frac{M_D}{k_D} 16 \sqrt{n}\, \alpha\, R\, (T + \frac{1}{\alpha})$$

Grâce à (5.2), l'inégalité (3.5) est donc vérifiée, avec $T_1 = 1/\alpha$, qui est fini d'après (5.1).

. D'après la définition de w, x et ξ :

$$\frac{\|w\|^2}{(M_w + k_x \|x\| + k_\xi \xi)^2} = \frac{\nu^2 + k_r^2 \; y_r^2}{(M_w + k_x \|\phi\| + k_\xi \psi)^2}$$

On utilise (5.3) et (5.4) :

$$\frac{\|w\|^2}{(M_w + k_x \|x\| + k_\xi \xi)^2} \leq \frac{\nu^2 + k_r^2 \; y_r^2}{(M_w + 4\sqrt{2}\, r\|\psi\| + 4\sqrt{2}\, r\, \psi)^2}$$

($\hat{\theta}$) étant admissible, on a

$$k_r^2 \leq M_r^2 < \infty$$

On note Y_r le maximum de $y_r(t)$

$$y_r^2 \leq Y_r^2 < \infty$$

On définit

$$M_w = \sqrt{2}(4\sigma + M_r Y_r) < \infty$$

D'où

$$\frac{\|w\|^2}{(M_w + k_x\|x\| + k_\xi \xi)^2} \leq \frac{M_r^2 Y_r^2 + \nu^2}{(\sqrt{2}\, M_r Y_r + 4\sqrt{2}(\sigma + r\|\phi\| + \rho\, \psi))^2}$$

$$\leq \frac{M_r^2 Y_r^2 + \nu^2}{2M_r^2 Y_r^2 + 32s^2}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{32s^2}$$

On intègre en utilisant (4.34) :

$$\int_t^{t+T} \frac{\|w\|^2 \, d\tau}{(M_w + k_x \|x\| + k_\xi \xi)^2} \leq \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\left(T + \frac{1}{\alpha}\right) = T + \frac{1}{2\alpha}$$

En définissant $T_2 \triangleq 1/2\alpha < \infty$, l'inégalité (3.6) est vérifiée.

Toutes les conditions du théorème sont donc vérifiées, et la stabilité est donc démontrée.

Commentaires

Dans les inégalités (5.2) à (5.5) le premier membre concerne le modèle du processus (bruits, erreurs de modèle, vitesse de variation), en liaison avec les coefficients de l'algorithme d'identification. Le second membre concerne les caractéristiques du système en boucle fermée, (ω_F, Ω_F), qui sont liées à la loi d'ajustement choisie.

Pour satisfaire (5.2) à (5.4) on doit d'abord augmenter autant que possible k_d, k_x et k_ξ, ce qui signifie choisir une méthode de commande intrinsèquement robuste. On doit minimiser M_d, défini par (2.21), c'est-à-dire rechercher une méthode se traduisant par une loi d'ajustement aussi continue que possible.

k_d, k_x, k_ξ, M_d étant supposés déterminés, par (3.9) à (3.13), l'application de (5.2) à (5.3) risque de conduire concrètement à des valeurs α, r, ρ extrêmement petites, ce qui signifierait que la robustesse ainsi quantifiée est très faible vis-à-vis

- des erreurs de modèle non linéaires sans mémoire (coefficient r)
- des dynamiques non modélisées (coefficient ρ)
- de la vitesse d'évolution de θ^* (produit αr).

Quant à T_F (dans (5.5)), il est généralement grand, ce qui signifie que des dynamiques non modélisées lentes sont permises, pourvu que leur amplitude soit petite.

Par contre, la robustesse n'est pas limitée par les bruits bornés (puisque σ n'intervient pas dans les inégalités : il suffit que σ existe et soit fini).

Concrètement, on introduira dans l'algorithme d'identification les coefficients σ, r, l, α, R compatibles avec les connaissances a priori sur les bruits et le processus.

Alors, les inégalités (5.2) à (5.5) pourront être violées, mais ce ne sont que des conditions suffisantes de stabilité, sans doute loin d'être nécessaires, et on peut espérer que la stabilité, sans être garantie, pourra néanmoins exister.

En introduisant dans l'algorithme d'identification des coefficients compatibles avec les connaissances a priori sur le processus et les bruits, on peut compter sur un meilleur comportement de l'algorithme, et en particulier sur le respect de l'inégalité (4.25) qui détermine l'ellipsoïde de certitude.

Ce point est important car l'ellipsoïde de certitude sera utilisée ultérieurement pour le recherche d'un modèle admissible.

Enfin, on remarque que dans le cas linéaire ($|v| \leq 2\sigma$), invariant ($\dot{\theta}^* = 0$), r et ρ peuvent être fixés à zéro, ce qui montre alors que, dans ce cas :

- la normalisation de ν n'est pas indispensable
- une borne inférieure sur P n'est pas indispensable.

Les auteurs qui les utilisent dans le cas linéaire invariant le font donc par facilité et non par nécessité.

6 - RESOLUTION DU PROBLEME DE STABILISABILITE

Le théorème précédent comporte déjà une solution locale au problème de la stabilisabilité. En effet si le domaine ellipsoïdal donné a priori (4.7) est suffisamment inclus dans le domaine admissible, $\hat{\theta}(t)$ restera continuellement admissible.

En règle générale, le domaine donné a priori est relativement grand, et inclut des régions non admissibles.

Lorsque $\hat{\theta}$ rentre dans une région non admissible, il faut de toutes façons prendre une décision, par exemple :

- Attendre que $\hat{\theta}(t)$ en ressorte spontanément (mais rien ne garantit le résultat si les entrées ne génèrent pas un vecteur $\phi(t)$ qui balaye tout l'espace).

- Forcer $\hat{\theta}(t)$ à rester intérieur au domaine admissible, en modifiant l'algorithme d'identification : ceci présente des difficultés considérables si l'on veut conserver les majorants de $\hat{\theta}$ et de ν, en tenant compte du fait que la forme de D_A est généralement inconnue et complexe.

En particulier, si D_A n'est pas simplement connexe, un "saut" d'une région à l'autre pourra être nécessaire, car $\hat{\theta}(t)$ peut être dans une région et $\theta^*(t)$ dans une autre.

- Si on laisse $\hat{\theta}(t)$ rentrer dans le domaine non admissible, il faut au moins envisager de "geler" $k(\hat{\theta})$ pour éviter des valeurs intolérables de la commande. Dans cette solution (maintes fois évoquée), on voit apparaître le principe selon lequel le modèle utilisé pour déterminer $k(\theta)$ peut devenir distinct du modèle identifié.

C'est ce principe que nous allons généraliser ici en introduisant un modèle $\bar{\theta}(t)$, distinct de $\hat{\theta}(t)$, qui sera utilisé par l'algorithme d'ajustement pour déterminer $k(\bar{\theta})$. Tout le problème consiste à déterminer correctement, à partir de $\hat{\theta}(t)$, un modèle $\bar{\theta}(t)$ qui à la fois soit admissible, et respecte les inégalités nécessaires à l'application du théorème de robustesse.

On définit $\bar{\theta}(t)$ comme la solution de :

$$\dot{\bar{\theta}} = \alpha P\phi \frac{\bar{\nu}}{s^2} + \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - t_i)\, \Delta_i \qquad 6.1$$

avec $\bar{\theta}(0) = \hat{\theta}(0)$ ($\in D_A$ par hypothèse)

où $\bar{\nu} \triangleq z - \phi^T \bar{\theta}$

Les instants t_i son ceux où $\bar{\theta}(t)$ atteint la frontière de D_A.
$\delta(t - t_i)$ est l'impulsion unitaire centrée sur t_i.
$\Delta_i = \bar{\theta}(t_i^+) - \bar{\theta}(t_i^-)$ est un saut effectué par $\bar{\theta}(t)$ à l'instant t_i.

$\bar{\theta}(t_i^+)$ est un vecteur arbitraire appartenant à la fois au domaine fortement stabilisable (défini en fin de section 2) et à l'ellipsoïde $E(t_i)$, centrée sur $\hat{\theta}(t_i)$, et défini par :

$$\{ \theta \in E(t_i) \} \Longleftrightarrow \{ \| \theta - \hat{\theta}(t_i) \|^2_{P^{-1}(t_i)} \leq 16 \} \qquad 6.2$$

où P et $\hat{\theta}$ sont donnés par l'algorithme précédent (4.10) à (4.15).

Les hypothèses sur le processus à identifier sont :

- celles du paragraphe 4 (éq. (4.1) à (4.6))
- on suppose de plus que $\theta^*(t)$ est à tout instant strictement intérieur au domaine fortement stabilisable (fig. 6.1) :

$$\text{Min}_{t \geq 0,\ \theta \in D_{FA}} \| \theta^*(t) - \theta \| \triangleq \Delta > 0 \qquad 6.3$$

- on suppose que δ (défini par (2.30)) satisfait :

$$\delta \leq R \qquad 6.4$$

- et que $\theta \in D_A \Longrightarrow \| \theta \| \leq R \qquad 6.5$

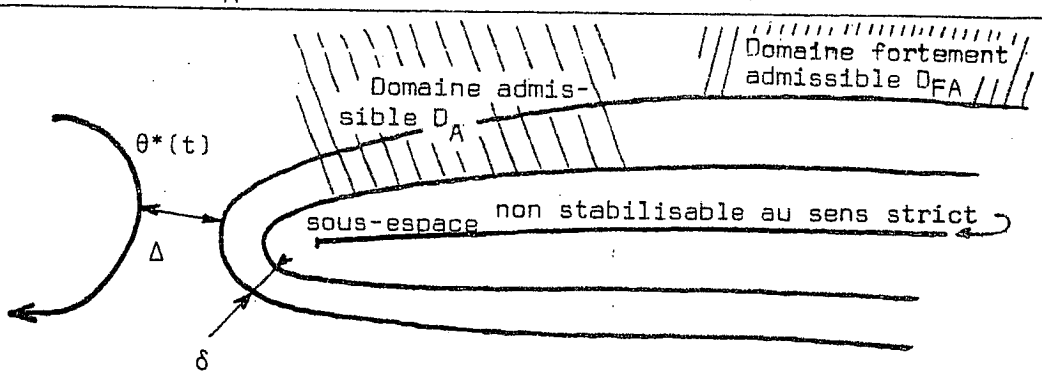


Fig. 6.1: Représentation des domaines admissible D_A et fortement admissible D_{FA}.

On remarque d'abord que l'intersection de D_{FA} et $E(t_i)$ est non vide, puisqu'elle contient au moins $\theta^*(t_i)$ en raison de (6.5), et (4.22) à (4.24).

Alors, une trajectoire $\bar{\theta}(t)$ pourra être typiquement la suivante (fig. 6.2).

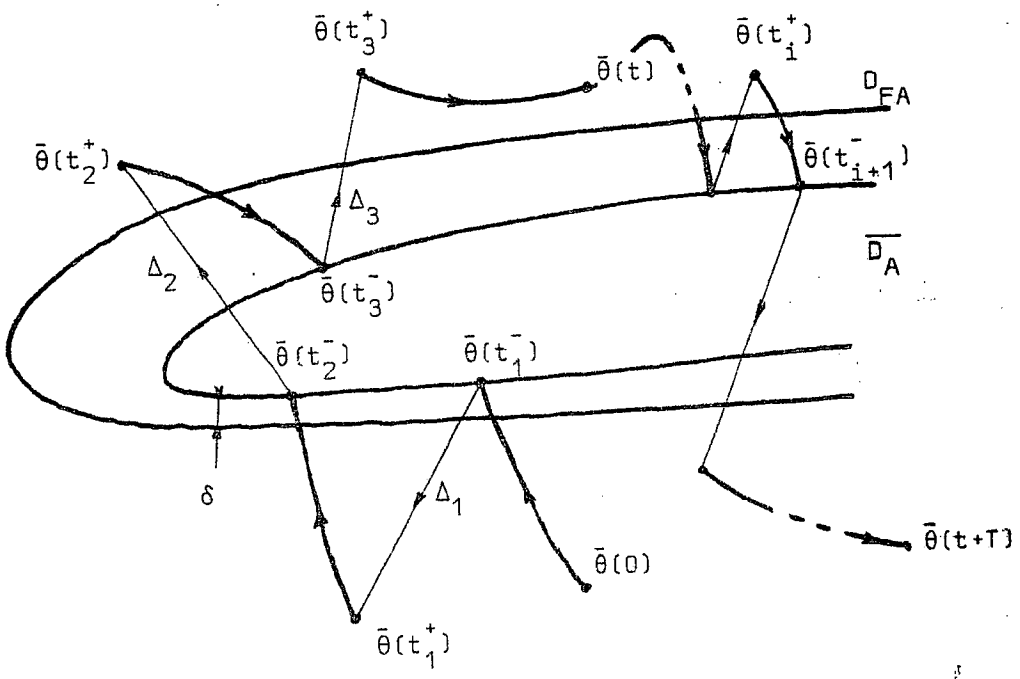


Fig. 6.2: Exemple de trajectoire $\bar{\theta}(t)$

Considérons maintenant le problème de la recherche d'une réinitialisation $\bar{\theta}(t_i^+)$.

- S'il se trouve que $\hat{\theta}(t_i) \in D_{FA}$, le problème est résolu en prenant $\bar{\theta}(t_i^+) = \hat{\theta}(t_i)$

- Si $\hat{\theta}(t_i) \notin D_{FA}$, on se trouve dans un cas de figure semblable à celui de la figure 6.3.

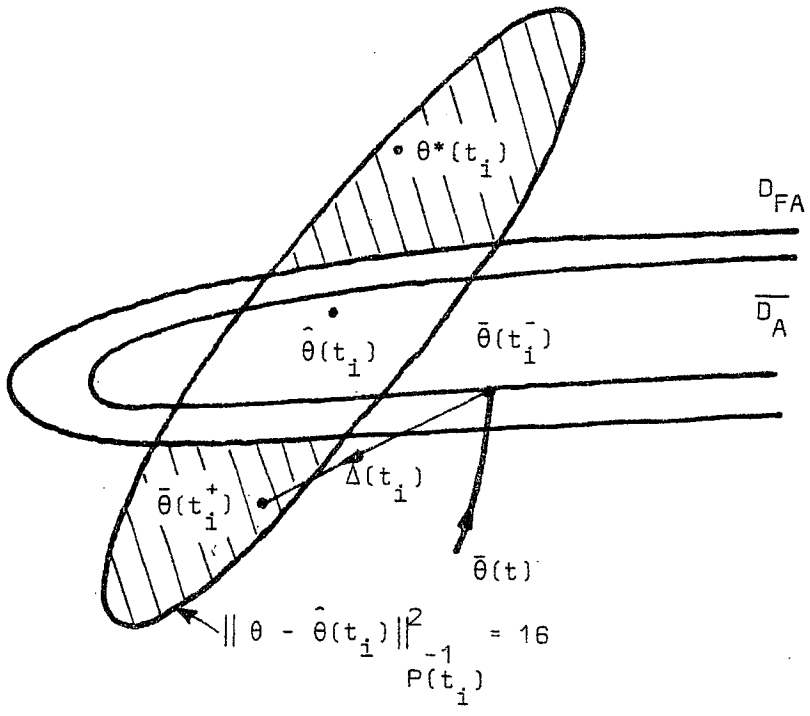


Fig. 6.3: Cas de figure où $\hat{\theta}(t_i) \notin D_{FA}$

Rappelons que

P est borné (4.20)

$\hat{\theta}$ est borné (4.34)

θ^* est strictement inclus dans $D_{FA} \cap E(\hat{\theta})$

$D_{FA} \subset D_A$, qui est borné (6.5).

On peut en conclure que, dans le pire des cas de figure possible, le rapport suivant :

$$\text{Ratio} = \frac{\text{Volume de l'intersection } E(t_i) \cap D_{FA} \text{ (hachurée)}}{\text{Volume total de l'ellipsoïde } E(t_i)}$$

présente une borne inférieure non nulle.

A la limite, ce rapport est même égal à 1 si $\overline{D_A}$ et $\overline{D_{FA}}$ sont confondus avec le domaine non stabilisable au sens strict qui est réduit à une surface, et donc de volume nul (fig. 6.1).

Il est donc possible de concevoir un algorithme de recherche d'un point $\bar{\theta}$ appartenant au sous-espace $D_{FA} \cap E(t_i)$ de l'ellipsoïde $E(t_i)$. Dans le cas général où la forme de D_{FA} est complexe et inconnue, le plus immédiat consiste à mettre en oeuvre une recherche au hasard, en définissant :

$$\bar{\theta}(t_i^+) = \hat{\theta}(t_i) + P^{1/2}(t_i)\,\gamma \qquad 6.6$$

où $P^{1/2}$ est une factorisation de P, et où γ est un vecteur aléatoire uniformément distribué dans la sphère de rayon 4.

Compte tenu du rapport non nul des volumes de $D_{FA} \cap E(t_i)$ et de $E(t_i)$, on peut garantir que le nombre d'essais nécessaires sera en moyenne fini (moyenne d'une variable de Bernoulli), et dans beaucoup de cas, ce nombre sera voisin de 1.

On peut évidemment proposer des recherches plus sophistiquées, mais un cas de figure comme celui de la figure (6.3) montre la difficulté du problème : On ignore a priori où se trouve la valeur exacte $\theta^*(t_i)$ et il faut éviter une politique de recherche systématique qui risquerait de conduire régulièrement dans la mauvaise région. En l'absence d'informations sûres et précises, il vaut sans doute mieux encore laisser faire le hasard plutôt qu'une stratégie déficiente.

Propriétés de l'algorithme

a) Reconsidérons maintenant la figure (6.2) et définissons $N(t, t+T)$ comme le nombre de sauts effectués entre deux instants t et $t+T$, et $D(t, t+T)$ comme la longueur de la trajectoire parcourue, sauts exceptés (en traits gras sur la figure) entre t et $t+T$.

Compte tenu du fait que

$$\bar{\theta}(t_i^+) \in D_{FA}$$

$$\bar{\theta}(t_{i+1}^-) \in \text{Frontière de } D_A$$

et de la distance δ entre $\overline{D_A}$ et D_{FA}, il est clair que l'on a

$$\boxed{D(t, t+T) \geq \left[N(t, t+T) - 1 \right] \delta} \qquad 6.7$$

b) Définissons

$$\bar{V}(t) \triangleq \| \bar{\theta} - \theta^* \|^2_{P^{-1}} \qquad 6.8$$

A un instant t_i^+, on a :

$$\| \bar{\theta}(t_i^+) - \hat{\theta}(t_i) \|^2_{P^{-1}(t_i)} \leq 16 \text{ (par construction)}$$

$$\| \hat{\theta}(t_i) - \theta^*(t_i) \|^2_{P^{-1}(t_i)} \leq 16 \text{ (éq. (4.25))}$$

On a donc

$$\bar{V}(t_i^+) \leq 4 \times 16 = 64 \qquad 6.9$$

Par une démonstration analogue à celle de (4.24), en prenant t_i^+ comme instant initial, on a donc

$$\boxed{\bar{V}(t) \leq 64 \qquad \text{pour tout } t} \qquad 6.10$$

c) Compte tenu du majorant ci-dessus, on calcule de façon analogue à (4.35)

$$\int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \left(\frac{\bar{\nu}}{s}\right)^2 d\tau \leq 64 \left[t_{i+1} - t_i + \frac{1}{\alpha} \right] \qquad 6.11$$

D'où, s'il y a N réinitialisation entre t et t + T :

$$\boxed{\int_t^{t+T} \left(\frac{\bar{\nu}}{s}\right)^2 d\tau \leq 64 \left[T + \frac{N+1}{\alpha} \right]} \qquad 6.12$$

d) La distance D(t, t + T) est donnée, d'après (6.1) par

$$D(t, t+T) = \int_t^{t+T} \left\| \alpha P \phi \frac{\nu}{s^2} \right\| d\tau$$

D'où, en réutilisant (4.40), (6.12) et l'inégalité de Schwartz :

$$D^2(t, t+T) \leq \alpha^2 \cdot 2n R^2 \left(T + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot 64 \left[T + \frac{N+1}{\alpha} \right] \qquad 6.13$$

On utilise (6.7), d'où :

$$(N-1)^2 \delta^2 \leq 128n R^2 (\alpha T + 1)(\alpha T + N + 1)$$

En notant

$$\boxed{N_0 \triangleq \frac{128n R^2}{\delta^2}} \qquad 6.14$$

Il vient

$$(N-1)^2 \leq N_0(\alpha T + 1)(N - 1 + \alpha T + 2)$$

d'où

$$(N-1)^2 \leq N_0(\alpha T + 1)(N-1) + N_0(\alpha T + 1)(\alpha T + 2) \qquad 6.15$$

Pour la simplicité, on majore le dernier terme, sachant que $N_0 > 1$ (d'après (6.4)), et $\alpha T < 2\alpha T$:

$$N_0(\alpha T + 1)(\alpha T + 2) \leq N_0 \left[N_0(\alpha T + 1)(2\alpha T + 2)\right] = 2 N_0^2 (\alpha T + 1)^2$$

(6.15) devient :

$$(N-1)^2 - N_0(\alpha T + 1)(N-1) - 2N_0^2(\alpha T + 1) \leq 0$$

On factorise :

$$\left[(N-1) + N_0(\alpha T + 1) \right] \left[(N-1) - 2N_0(\alpha T + 1) \right] \leq 0$$

D'où :

$$\underline{- N_0(\alpha T + 1) \leq (N-1) \leq 2N_0(\alpha T + 1)}$$

Et donc

$$N(t,\ t+T] \leq 1 + 2N_0(\alpha T + 1) \qquad 6.16$$

On a donc obtenu un majorant du nombre de sauts possibles sur un intervalle de temps T, et on peut maintenant facilement majorer $\overline{\nu}^2$ et $\bar{\theta}$.

e) On substitue (6.16) dans (6.12) :

$$\int_t^{t+T} \frac{\overline{\nu}^2}{s^2}\, d\tau \leq 64 \left[T + \frac{1 + 2N_0(\alpha T + 1) + 1}{\alpha} \right]$$

$$= 64 \left[T + \frac{2}{\alpha} + 2N_0\left(T + \frac{1}{\alpha}\right) \right]$$

$$\leq 64 \left[2T + \frac{2}{\alpha} + 2N_0\left(T + \frac{1}{\alpha}\right) \right]$$

D'où en notant :

$$N_1 = N_0 + 1 \qquad 6.17$$

$$\int_t^{t+T} \frac{\overline{\nu}^2}{s^2}\, d\tau \leq 128\, N_1\left(T + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad 6.18$$

(à comparer avec (4.35) : ... $\leq 16\left(T + \frac{1}{\alpha}\right)$)

f) De même, on substitue (6.16) dans (6.13) :

$$D^2(t,\ t+T) \leq \alpha^2\, 2n\, R^2\left(T + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot 128\, N_1\left(T + \frac{1}{\alpha}\right)$$

D'après (6.15) :

$$128n\, R^2 = N_0\, \delta^2 \leq N_1\, \delta^2$$

D'où :

$$D(t;\ t+T) \leq 2\alpha\delta\, N_1\left(T + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad 6.19$$

Par ailleurs, les sauts étant d'amplitude inférieure à 2R, en raison de (6.5), on a un majorant de la longueur totale de la trajectoire totale parcourue par $\bar{\theta}$ entre t et t + T, sauts compris cette fois :

$$\int_t^{t+T} \| \dot{\bar{\theta}} \| \, d\tau \leq D(t, t+T) + 2R\, N(t, t+T) \qquad 6.20$$

On incorpore (6.16) et (6.19) :

$$\int_t^{t+T} \| \dot{\bar{\theta}} \| \, d\tau \leq 2\alpha N_1 \delta(T + \frac{1}{\alpha}) + 2R(1 + N_0(\alpha T + 1)$$

On majore δ par R et $1 + N_0(\alpha T + 1)$ par $N_1(\alpha T + 1)$

D'où

$$\boxed{\int_t^{t+T} \| \dot{\bar{\theta}} \| \, d\tau \leq 4N_1 \alpha R(T + \frac{1}{\alpha})} \qquad 6.21$$

(à comparer avec (4.37) : ... $\leq 16\sqrt{n}\, \alpha R(T + \frac{1}{\alpha})$).

Grâce aux majorants ci-dessus (6.18) et (6.21), l'application du théorème de robustesse est maintenant immédiate, et on peut énoncer le théorème 3.

THEOREME 3

- Soit un processus de paramètres $\theta^*(t)$ satisfaisant (4.1) à (4.6) et (6.3) à (6.5), où les domaines D_A et D_{FA} sont relatifs à la loi d'ajustement choisie.

- Soit l'algorithme d'identification défini de (6.1) à (6.2).

Alors le système en boucle fermée est globalement stable si l'on a :

$$\alpha > 0 \qquad 6.22$$

$$4N_1 \alpha R \leq k_d / M_d \qquad 6.23$$

$$16\sqrt{N_1}\, r \leq k_x \qquad 6.24$$

$$16\sqrt{N_1}\,\rho \leq k_\xi \qquad 6.25$$

$$1/\beta \leq T_F \qquad 6.26$$

$$\text{où } N_1 \triangleq \frac{128n\,R^2}{\delta^2} + 1 \qquad 6.27$$

et où T_F, k_x, k_ξ, k_d *sont définis de* (3.9) *à* (3.19).

Compte tenu des majorants (6.18) et (6.21) (au lieu de (4.35) et (4.36)), la preuve est exactement similaire à celle du théorème du paragraphe 5.

Commentaires

Les inégalités (6.23), (6.24), (6.25) sont de la même forme que celles du théorème 2. Il y apparaît que la robustesse est affaiblie par la présence du terme N_1.

D'après (6.27) ce facteur sera généralement grand, en raison de la présence du rapport R/δ. Il y a donc intérêt à réduire ce rapport autant qu'il se peut en éloignant les frontières de D_A et D_{FA}, ce qui aura pour effet de diminuer la fréquence maximale possible des réinitialisations.

En fait, le majorant (6.16) de cette fréquence est basé sur (6.7) qui devient une égalité dans le pire cas imaginable, lui-même très improbable.

En présence d'une éventuelle incompatibilité entre inégalités (4.2) et (4.6) et (6.22) à (6.25), il convient de choisir α, r et ρ de façon à respecter en priorité (4.2) et (4.6) pour préserver la validité de (4.25).

Le respect de (4.25) conditionne en effet l'existence même de l'algorithme qui est basé sur l'existence d'une intersection non vide $D_{FA} \cap E(t_i)$.

7 - CONCLUSION

Les principaux apports de ce papier sont finalement les suivants :
On a proposé un théorème de stabilité robuste pour les systèmes faiblement sous-modélisés (non linéarités et dynamiques), qui s'apparente à beaucoup d'autres théorèmes analogues dits "des petits gains".
Une de ses caractéristiques originales est d'inclure le cas des systèmes lentement variables dans le temps.

. Les majorants proposés sont d'un forme telle qu'ils puissent être satisfaits par les modèles identifiés par des méthodes classiques (type moindres carrés de l'erreur d'équation ou de prédiction).
Il en résulte que ce théorème peut jouer le rôle de lemme technique fondamental, pour l'analyse des systèmes adaptatifs indirects.

Dans l'hypothèse où le modèle identifié reste admissible (stabilisable) à tout instant, l'application du théorème ci-dessus est relativement facile et nos résultats ne sont pas fondamentalement différents de ceux de PRALY, qui nous ont d'ailleurs directement inspiré, en particulier en ce qui concerne la normalisation des signaux par un facteur en $1/\|\phi\|$.
On notera cependant quelque différence (même dans notre formulation discrête) dans la procédure permettant de borner P et θ. Par ailleurs, nous considérons en outre des processus à contrôler lentement variables dans le temps.

On a donc proposé, à titre de prototype, un algorithme d'identification satisfaisant les conditions requises par l'application du théorème. Parmi ses caractéristiques, il présente celle de générer un domaine de certitude autour du modèle identifié θ. Ce domaine est non trivial en ce sens que si P est petit (et il peut le devenir), l'ellipsoïde de certitude sera elle aussi petite (meilleure que celle engendrée par les connaissances a priori).
L'obtention de ces domaines de certitude est en soi un résultat intéressant, mais dans ce papier, il est en outre à la base d'une procédure permettant de générer un modèle, noté $\bar{\theta}(t)$, qui est stabilisable à tout instant et qui satisfait encore les conditions d'application du théorème de robustesse.
La démonstration est basée sur le "prototype" d'algorithme d'identification proposé.

Les caractéristiques de cet algorithme sont néanmoins toutes assez ordinaires, et la principale conclusion de ce papier est qu'il existe des sclutions très acceptables au problème de la commande adaptative robuste, dans une approche purement passive. On se réserve d'effectuer les généralisations souhaitables dans un proche avenir.

Il reste clair que des entrées actives sont toujours un facteur favorable à la qualité de l'identification, et donc à une bonne commande adaptative. Néanmoins, le fait que l'activité ne soit pas une condition nécessaire à la stabilité robuste est une considération très importante qui mérite d'être largement reconnue.

REFERENCES

[1] Y. BAR-SHALOM and E.TSE,
"Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-19, n°5, oct. 1984, pp 494-500.

[2] K.J. ÅSTROM and B. WITTENMARK,
"On self tuning regulators", Automatica, Vol. 9, 1973, pp 185-199.

[3] I.D. LANDAU,
"A survey of Model Reference Adaptive Techniques - Theory and applications", Automatica, Vol. 10, 1974, pp 353-379.

[4] R.V. MONOPOLY,
"Model reference adaptive control with an augmented error signal", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-19, oct. 1974, pp 474-484.

[5] K.S. NARENDRA and L.S. VALAVANI,
"Stable adaptive controller design - Direct control", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-23, aug. 1978, pp 570-583.

[6] Ph. De LARMINAT,
"An overall stability of certain adaptive control systems", 5th IFAC Symposium on Identification, Darmstadt, F.R.G., 1979.

[7] Ph. De LARMINAT,
"Unconditional stabilization of linear discrete systems via adaptive control", Systems and Control Letters, Vol. 1, 1981, pp 7-11.

[8] G.C. GOODWIN and K.S. SIN,
"Adaptive control of non minimum phase systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-26, n°2, april 1981, pp 478-483.

[9] L. LJUNG and T. SODERSTROM,
"Theory and practice of recursive identification", MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.

[10] G.C. GOODWIN and E.K. TEOH,
"Persistency of excitation in the presence of possible unbounded signals", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC, 1983.

[11] Ph. De LARMINAT,
"On the stabilizability condition in indirect adaptive control", Automatica, Vol. 20, n°6, 1984, pp 793-795.

[12] R. LOZANO-LEAL and G.C. GOODWIN,
"A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-30, n°8, aug. 1985, pp 795-798.

[13] Ph. De LARMINAT,
"Une solution robuste au problème de la stabilisabilité dans la commande indirecte passive", Colloque C.N.R.S., Commande Adaptative, Grenoble (FR), nov. 1984.

[14] L. PRALY
"Robustness of indirect adaptive control based on pole placement design" IFAC Workshop on Application of Adaptive Control Theory, San Francisco, 1983.

APPENDICE A

PREUVE DU THEOREME 1

Première partie

On démontre la proposition suivante

Soit Σ la solution symétrique de

$$F^T\Sigma + \Sigma F + 2I = 0 \qquad \text{A.1}$$

où F satisfait les propriétés P_F :

$$\| F \| \leq \Omega < \infty \qquad \text{A.2}$$

$$R_E(\lambda_i) \leq - \omega_F < 0 \qquad \text{A.3}$$

Alors on a :

$$\Sigma \leq T_F I \qquad \text{A.4}$$

$$\Sigma \geq \tau_F I \qquad \text{A.5}$$

où :

$$T_F \triangleq \frac{n_F^2}{2\omega_F} \left(\frac{2\Omega_F}{\omega_F} \right)^{2n_F} \qquad \text{A.6}$$

$$\tau_F = \frac{1}{\Omega_F} \qquad \text{A.7}$$

Preuve

(i) Pour tout vecteur propre p_i de F

$$|\lambda_i| = \frac{\| \lambda_i \, p_i \|}{\| p_i \|} = \frac{\| F \, p_i \|}{\| p_i \|} \leq \underset{q \neq 0}{\text{Max}} \frac{\| Fq \|}{\| q \|} \triangleq \| F \|$$

donc, d'après (A.2)

$$\boxed{|\lambda_i| \leq \Omega_F} \qquad \text{A.8}$$

(ii) Soit a(s) le polynome caractéristique de F :

$$a(s) \triangleq s^{n_F} + a_1 s^{n_F - 1} + \ldots + a_{n_F} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_{n_F})$$

on a :

$$\left.\begin{aligned} |a_1| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda \Big| \leq n_F \, \Omega_F = C_{n_F}^1 \, \Omega_F \\ |a_2| &= \Big| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \, \lambda_j \Big| \leq C_{n_F}^2 \, \Omega_F^{\,2} \\ &\vdots \\ |a_{n_F - 1}| &\leq C_n^{n-1} \, \Omega_F^{n-1} \\ |a_{n_F}| &\leq \Omega_F^n \end{aligned}\right\} \qquad \text{A.10}$$

(iii) On considère un facteur $\frac{1}{s - \lambda}$ de $\frac{1}{a(s)}$

Où $\lambda = \alpha + j\beta$, $\alpha^2 + \beta^2 = |\lambda|^2 \leq \Omega_F^{\,2}$, $\alpha^2 \geq \omega_F^{\,2}$

On a $\dfrac{1}{|j\omega - \lambda|^2} = \dfrac{1}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2}$

D'où le majorant évident

$$\boxed{\left| \frac{1}{j\omega - \lambda} \right|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \leq \frac{1}{\omega_F^{\,2}}} \qquad \text{A.11}$$

On recherche alors un majorant de la forme

$$\frac{1}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2} \leq \frac{\gamma}{|\lambda|^2 + \omega^2}$$

γ doit donc satisfaire :

$$\gamma\left[(\omega - \beta)^2 + \alpha^2\right] - |\lambda|^2 - \omega^2 \geq 0$$

On développe :

$$= \gamma(\omega^2 - 2\beta\omega + \beta^2 + \alpha^2) - |\lambda|^2 - \omega^2$$

$$= (\gamma - 1)\omega - 2\beta\gamma\omega + (\gamma - 1)\,|\lambda|^2$$

qui est toujours positif lorsque :

$$\beta^2\gamma^2 = (\gamma - 1)\,|\lambda|^2$$

d'où

$$\gamma = \frac{|\lambda|}{|\lambda| - |\beta|}$$

On a aussi : $\gamma = \dfrac{|\lambda|\,(|\lambda| + |\beta|)}{(|\lambda| - |\beta|)\,(|\lambda| + |\beta|)} = \dfrac{|\lambda|^2 + |\lambda|\,|\beta|}{|\lambda|^2 - \beta^2}$

$$= \frac{|\lambda|^2 + |\lambda|\,|\beta|}{\alpha^2}$$

où $|\lambda|^2 + |\lambda|\,|\beta| \leq 2|\lambda|^2 \leq 2\Omega_F$

On a donc

$$\left|\frac{1}{j\omega - \lambda}\right|^2 \leq \frac{2\Omega_F}{\alpha^2\,(|\lambda|^2 + \omega^2)} \leq \frac{2\Omega_F}{\omega_F^2\,(\omega_F^2 + \omega^2)} \qquad \text{A.12}$$

Enfin, on recherche le maximum de $\left|\dfrac{\omega}{j\omega - \lambda}\right|$, et on trouve

$$\left|\frac{\omega}{j\omega - \lambda}\right|^2 \leq \frac{|\lambda|^2}{\alpha^2} \leq \frac{\Omega_F^2}{\omega_F^2} \qquad \text{A.13}$$

(iv) On montre que

$$\left\| (j\omega I - F)^{-1} \right\| \leq \frac{n_F^2}{2}\left(\frac{2\Omega_F}{\omega_F}\right)^{2n_F} \frac{1}{\omega_F^2 + \omega^2} \qquad \text{A.14}$$

Preuve

On vérifie d'abord que

$$(sI - F)^{-1} = \frac{1}{a(s)} \{(s^{n_F-1} + a_1 s^{n_F-2} + \ldots + a_{n_F-2} s + a_{n_F-1})I + (s^{n_F-2} + a_1 s^{n_F-3} + \ldots + a_{n_F-2})F + \vdots + (s + a_1) F^{n_F-2} + F^{n_F-1}\} \qquad A.15$$

en multipliant les deux membres de (A.15) par $(s I - F)$ et en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton $(F^{n_F} + a_1 F^{n_F-1} + \ldots + a_{n_F} I = 0)$.

Alors, en utilisant (A.2), (A.10), (A.15), il vient

$$\|(j\omega I - F)^{-1}\| \leq \left|\frac{1}{a(j\omega)}\right| \times \{|\omega|^{n_F-1} + C^1_{n_F} \Omega_F |\omega|^{n_F-2} + \ldots + C^{n_F-1}_{n_F} \Omega_F^{n_F-1} + \Omega_F |\omega|^{n_F-2} + C^1_{n_F} \Omega_F |\omega|^{n_F-3} + \ldots + C^{n_F-1}_{n_F} \Omega_F^{n_F-1} \vdots + \Omega_F^{n_F-2} |\omega| + C^1_{n_F} \Omega_F^{n_F-1} + \Omega_F^{n_F-1}\} \qquad A.16$$

Considérons un terme extrait de (A.16), de la forme générale :

$$a_i \triangleq \left|\frac{1}{a(j\omega)}\right| \times \Omega_F^{\,i} |\omega|^{n_F-1-i}$$

α_i peut se réécrire :

$$a_i = \left[\frac{\Omega_F}{|j\omega - \lambda_1|} \times \ldots \times \frac{\Omega_F}{|j\omega - \lambda_i|}\right] \times \left[\frac{|\omega|}{|j\omega - \lambda_{i+1}|} \times \ldots \times \frac{|\omega|}{|j\omega - \lambda_{n_F-1}|}\right] \times \left[\frac{1}{|j\omega - \lambda_{n_F}|}\right]$$

d'où, grâce à (A.11), (A.12) et (A.13)

$$a_i \leq \left(\frac{\Omega_F}{\omega_F}\right)^i \left(\frac{\Omega_F}{\omega_F}\right)^{n_F-1-i} \left(\frac{\Omega_F}{\omega_F} \sqrt{\frac{2}{\omega_F^2 + \omega^2}}\right)$$

d'où

$$a_1 \leq \left(\frac{\Omega_F}{\omega_F}\right)^{n_F} \sqrt{\frac{2}{\omega_F^2 + \omega^2}}$$

(A.16) devient donc

$$\| j\omega I - F)^{-1} \|^2 \leq \left(\frac{\Omega_F}{\omega_F}\right)^{2n_F} \frac{2}{\omega_F^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 + C_{n_F}^1 + \ldots + C_{n_F}^{n_F-1} \\ + 1 + C_{n_F}^1 + \ldots + C_{n_F}^{n_F-2} \\ \vdots \\ + 1 + C_{n_F}^1 \\ + 1 \end{bmatrix}^2 \qquad \text{A.17}$$

Le dernier facteur est égal à

$$\left\{\frac{n_F}{2}\left(1 + C_{n_F}^1 + C_{n_F}^2 + \ldots + C_{n_F}^1 + 1\right)\right\}^2 = \left\{\frac{n_F}{2}\, 2^{n_F}\right\}^2$$

(A.17) devient donc bien :

$$\|(j\omega I - F)^{-1}\|^2 \leq \frac{n_F^2}{4} \left(\frac{2\Omega_F}{\omega_F}\right)^{2n_F} \frac{2}{\omega_F^2 + \omega^2}$$

(v) On achève de prouver (A.4) et (A.6).

Rappelons que la solution de

$$PF + F^T P + Q = 0 \qquad \text{A.18}$$

où F est une matrice asymptotiquement stable et Q une matrice symétrique (positive définie ou non), est donnée par

$$P = \int_0^\infty e^{F^T \tau}\, Q\, e^{F\tau}\, d\tau \qquad \text{A.19}$$

Ici, $Q = 2I$, $P = \Sigma$.

Par ailleurs, la transformée de Fourier de $e^{F\tau}$ est $(j\omega I - F)^{-1}$. Alors on applique l'égalité de Parseval :

$$\Sigma = 2\int_0^\infty e^{F^T\tau}\, e^{F\tau}\, d\tau = 2\int_0^\infty (j\omega I - F)^{-T}(j\omega I - F)^{-1}\, \frac{d\omega}{2\pi}$$

d'où

$$\| \Sigma \| \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} \| (j\omega I - F)^{-1} \|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

On utilise (A.14), sachant que

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_F^2 + \omega^2}\, \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{\omega_F}$$

d'où enfin

$$\| \Sigma \| \leq \frac{n_F^2}{2\omega_F} \left(\frac{2\Omega_F}{\omega_F}\right)^{2n_F}$$

qui prouve (A.4) et (A.6).

(vi) Preuve de (A.5) et (A.7).

Soit $\zeta(t)$ une solution de $\dot\zeta = F\zeta$, et soit $E(t) \triangleq \zeta^T\zeta$.

On a $\dot E = 2\zeta^T F\zeta$

et $|\dot E| \leq 2\| \zeta\|^2 \| F\| \leq 2E\Omega_F$

donc $\underline{-2E\,\Omega_F \leq \dot E \leq 2E\,\Omega_F}$.

On intègre les deux membres de la première inégalité :

$$E(t) \geq E(0)\, e^{-2\Omega_F t} = \| \zeta(0)\|^2\, e^{-2\Omega_F t}$$

Une nouvelle intégration donne

$$\int_0^\infty E(t)\, dt \geq \frac{\| \zeta(0)\|^2}{2\Omega_F}$$

Par ailleurs, on a :

$$E(t) = \zeta(0)^T \left[e^{F^T t} e^{Ft} \right] \zeta(0)$$

D'après (A.18) et (A.19),

$$\int_0^\infty E(t)\, dt = \zeta(0)^T \frac{\Sigma}{2} \zeta(0)$$

On a donc pour tout $\zeta(0)$:

$$\zeta^T(0)\, \Sigma\, \zeta(0) \leq \frac{\| \zeta(0) \|^2}{\Omega_F}$$

ce qui prouve (A.5), (A.7).

Deuxième partie

On considère maintenant que F est fonction du temps. Alors la solution Σ de (A.1) est aussi fonction du temps :

$$F^T(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)F(t) + 2I = 0 \qquad \text{A.20}$$

On suppose que Ω_F et ω_F sont constants dans (A.2), (A.3). Alors (A.4) et (A.5) restent vraies pour tout t, et on a :

$$\boxed{\| \dot{\Sigma}(t) \| \leq 2T_F^2 \| \dot{F} \|} \qquad \text{A.21}$$

Preuve

On différencie (A.20)

$$F^T \dot{\Sigma} + \dot{\Sigma} F + (\dot{F}^T \Sigma + \Sigma \dot{F}) = 0$$

On applique (A.18), (A.19) avec $P = \dot{\Sigma}$ et $Q = (\dot{F}^T \Sigma + \Sigma \dot{F})$

$$\dot{\Sigma} = \int_0^\infty e^{F^T(t)\tau} \left[\dot{F}(t)\,\Sigma(t) + \Sigma(t)\,\dot{F}(t) \right] e^{F^T(t)\tau}\, d\tau$$

Alors

$$\|\dot{\Sigma}\| \leq 2\|\dot{F}\|.\|\Sigma\| \left\| \int_0^\infty e^{F^T\tau}\, e^{F\tau}\, d\tau \right\|$$

$$\leq 2\|\dot{F}\| . \|\Sigma\| \left\| \frac{\Sigma}{2} \right\| \leq \|\dot{F}\|\, T_F^2 \quad \text{(d'après (A.4))}$$

Troisième partie

On introduit la fonction positive suivante :

$$W(t) \triangleq x^T(t)\,\Sigma(t)\,x(t) + T_\xi\, \xi^2(t) \qquad \text{A.22}$$

On dérive, en utilisant (3.1) et (3.8)

$$\dot{W} = x^T \dot{\Sigma} x + 2x^T\Sigma(Fx + w) - 2(\xi - \|x\|)\ \xi$$

On introduit (A.1)

$$\dot{W} = x^T \dot{\Sigma} x + 2x^T\Sigma w - 2x^T x - 2\xi^2 + 2\|x\|\,\xi$$

$$= x^T\dot{\Sigma}x + 2x^T\Sigma w - x^T x + \xi^2 - \left[\|x\|^2 + \xi^2 - 2\|x\|\,\xi \right]$$

$$\text{où } - x^T x - \xi^2 \leq - \frac{x^T\Sigma x}{T_F} - \frac{T_\xi\, \xi^2}{T_F} \quad \text{(d'après (A.4) et (3.9))}$$

D'où, en réintroduisant (A.22) :

$$\dot{W} \leq x^T \dot{\Sigma} x + \left| 2x^T\Sigma w \right| - \frac{W}{T_F} \qquad \text{A.23}$$

. On considère le terme $x^T \dot{\Sigma} x$.

D'après (A.21), (A.5), (A.22), on a :

$$x^T \dot{\Sigma} x \leq \|x\|^2 T_F^2 \|\dot{F}\| \leq \frac{x^T \Sigma x}{\tau_F} T_F^2 \|\dot{F}\| \leq \frac{T_F^2}{\tau_F} w \|\dot{F}\|$$

et, d'après (3.10)

$$\boxed{x^T \dot{\Sigma} x \leq \frac{1}{2T_F} \frac{\|\dot{F}\|}{k_d} w} \qquad \text{A.24}$$

. On considère alors $x^T \Sigma w$. D'après l'inégalité de Schwartz :

$$|x^T \Sigma w| \leq \sqrt{x^T \Sigma x} \sqrt{w^T \Sigma w}$$

D'après (A.22) et (A.4) :

$$|x^T \Sigma w| \leq \sqrt{w} \sqrt{T_F \|w\|^2} \leq \sqrt{T_F} \sqrt{w}\, M \left\| \frac{w}{M} \right\| \qquad \text{A.25}$$

où $M(t) \triangleq M_w + k_x \|x(t)\| + k_\xi \xi(t)$ A.26

D'après (A.5)

$$M \leq M_w + k_x \sqrt{\frac{x^T \Sigma x}{\tau_F}} + k_\xi \sqrt{\frac{T_\xi \xi^2}{T_\xi}}$$

D'après (A.22) :

$$M \leq M_w + \left(\frac{k_x}{\sqrt{\tau_F}} + \frac{k_\xi}{\sqrt{T_\xi}} \right) \sqrt{W}$$

Alors, (A.25) devient :

$$|x^T \Sigma w| \leq \left[\sqrt{T_F}\, M_w \sqrt{W} + \left(\sqrt{\frac{T_F}{\tau_F}}\, k_x + \sqrt{\frac{T_F}{T_\xi}}\, k_\xi \right) W \right] \left\| \frac{w}{M} \right\|$$

et d'après (3.11) et (3.12) :

$$\boxed{2|x^T \Sigma w| \leq \left| 2\sqrt{T_F}\, M_w \sqrt{W} + \frac{1}{4T_F} W \right| \left\| \frac{w}{M} \right\|} \qquad \text{A.27}$$

On réunit (A.23), (A.24) et (A.27) :

$$\frac{\dot{W}}{W} \leq -\frac{1}{T_F} + \frac{1}{2T_F}\frac{\|\dot{F}\|}{k_d} + \left(\frac{2\sqrt{T_F}\,M_w}{\sqrt{W}} + \frac{1}{4T_F}\right)\left\|\frac{w}{M}\right\| \qquad \text{A.28}$$

On définit alors :

$$W_0 \triangleq \text{Max}\ \{\ W(0)\ ,\ (8T_F\sqrt{T_F}\,M_w)^2\ \}$$

et t_0 comme un instant t (s'il existe) tel que $W(t_0) = W_0$. Alors, tant que W(t) reste supérieur à W_0 :

$$\frac{2\sqrt{T_F}\,M_w}{\sqrt{W}} \leq \frac{1}{4T_F}\ ,\ \text{et (A.28) devient :}$$

$$\frac{\dot{W}}{W} \leq -\frac{1}{T_F} + \frac{1}{2T_F}\frac{\|\dot{F}\|}{k_d} + \frac{1}{2T_F}\left\|\frac{w}{M}\right\| \qquad \text{A.29}$$

Appliquons l'inégalité de Schwartz :

$$\left[\int_t^{t+T}\left\|\frac{w}{M}\right\| \cdot 1\ d\tau\right]^2 \leq \int_t^{t+T}\left\|\frac{w}{M}\right\|^2 d\tau \int_t^{t+T} 1\ .\ d\tau$$

D'après (3.6) :

$$\left[\int_t^{t+T}\left\|\frac{w}{M}\right\| d\tau\right]^2 \leq (T + T_2)T \qquad (\leq (T + T_2)^2)$$

d'où

$$\int_t^{t+T}\left\|\frac{w}{M}\right\| d\tau \leq T + T_2 \qquad \text{A.30}$$

Par intégration de (A.29), en utilisant (3.6) et (A.30) :

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\dot{W}}{W}\,d\tau \leq -\frac{t}{T_F} + \frac{1}{2T_F}(t + T_1) + \frac{1}{2T_F}(t + T_2)$$

D'où

$$\text{Log}\left(\frac{W(t_0 + t)}{W(t_0)}\right) \leqq W_0 \frac{T_1 + T_2}{2T_F}$$

et

$$W(t_0 + t) \leqq W_0 \, e^{\frac{T_1+T_2}{2T_F}}$$

W est donc borné.

D'après (.A22) et (A.5)

$$\|x\|^2 \leqq \frac{x^T \Sigma x}{\tau_F} \leqq \frac{W}{\tau_F} \leqq \frac{W_0}{\tau_F} \, e^{\frac{T_1+T_2}{2T_F}} < \infty$$

APPENDICE B

UNE VERSION DISCRETE DU THEOREME 1

On considère les fonctions vectorielles $x(t)$ et $w(t)$ et la fonction matricielle $F(t)$. On suppose que les propriétés suivantes sont vraies pour tous les entiers positifs t, τ et T.

$$x(t+1) = F(t)\,x(t) + w(t)$$

$$\|x(0)\| < \infty$$

$$|\lambda_i(t)| \leq \lambda_F < 1$$

$$\|F(t)\| \leq \Lambda_F < \infty$$

$$\sum_{\tau=t}^{t+T} \frac{\|F(\tau+1) - F(\tau)\|}{k_d} \leq T + T_1$$

$$\sum_{\tau=t}^{t+T} \frac{\|w(\tau)\|^2}{(M_w + k_x\|x(\tau)\| + k_\xi\,\xi(\tau))^2} \leq T + T_2$$

où $\xi(t)$ est donné par

$$\xi(t+1) = \xi(t) - \frac{1}{T_\xi}(\xi(t) - \|x(t)\|)$$

$$0 \leq \xi(0) < \infty$$

et où

T_1, T_2, M_w sont des constantes positives finies

T_ξ, k_d, k_x, k_ξ sont des constantes positives qui dépendent de λ_F et Λ_F.

Alors $x(t)$ est uniformément borné.

Le théorème est donné sans démonstration mais on retrouve l'équivalent discret de toutes les hypothèses sur lesquelles est basée la démonstration dans le cas continu.

APPENDICE C

TRANSPOSITION AU CAS DISCRET DE L'ALGORITHME D'IDENTIFICATION

Soit un processus à temps discret : (t = 0, 1, 2, 3, ...)

$$y(t) = \phi^T(t)\,\theta^*(t) + v(t) \qquad \text{C.1}$$

$$\phi^T(t) = \left[\, y(t-1) \ldots y(t-n) \;\vdots\; u(t-1) \ldots u(t-n) \,\right] \qquad \text{C.2}$$

$$\theta^{*T}(t) = \left[\, -a_1^*(t) \ldots -a_n^*(t) \;\vdots\; b_1^*(t) \ldots b_n^*(t) \,\right] \qquad \text{C.3}$$

avec les hypothèses :

$$\left|\frac{v(t)}{s(t)}\right| \leq 4 - \alpha \qquad (\alpha \text{ positif}) \qquad \text{C.4}$$

où : $s(t) \triangleq \sigma + r\|\phi(t)\| + \rho\,\psi(t)$ C.5

$$\psi(t) = \psi(t-1) - \beta(\psi(t-1) - \|\phi(t-1)\|)\,, \quad (|\beta| < 1) \qquad \text{C.6}$$

$$\|\theta^*(t)\| \leq R \qquad \text{C.7}$$

$$\|\theta^*(t) - \theta^*(t-1)\| \leq \frac{\alpha^2 R^2 r^2}{R^2 + r^2} \qquad \text{C.8}$$

Soit la loi de commande :

$$u(t) = -\phi^T(t)\,k(\hat{\theta}(t)) + y_r(t)\,k_r(\hat{\theta}(t)) \qquad \text{C.9}$$

où $\hat{\theta}$ est donné par l'algorithme d'identification défini plus loin.

La loi d'ajustement $k(\theta)$ dépend de la méthode de commande choisie. On suppose définis des domaines admissibles D_A et D_{FA}, de façon analogue au cas continu.

L'algorithme d'identification est décomposé en trois étapes :

- oubli

$$P'(t) = (1 + \alpha)\, P(t - 1) \qquad \text{C.10}$$

$$\theta'(t) = \hat{\theta}(t - 1) \qquad \text{C.11}$$

- Rappel vers 0

$$P''(t) = \left[P'(t)^{-1} + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{I}{R^2} \right]^{-1} \qquad \text{C.12}$$

$$\theta''(t) = \theta'(t) - P''(t) \frac{\alpha}{(\alpha + 1)R^2} \theta''(t)\, \lambda(t) \qquad \text{C.13}$$

où $\lambda(t) = 0$ si $\| \theta'(t) \| \leq R$ C.14

$\lambda(t) = 1$ si $\| \theta'(t) \| > R$ C.15

- Mise à jour

$$P(t) = P''(t) - P''(t)\, \phi(t) \left[\phi^T(t)\, P''(t)\, \phi(t) + \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha}\right) s^2(t) \right]^{-1} \phi^T(t)\, P''(t) \qquad \text{C.16}$$

$$\hat{\theta}(t) = \theta''(t) - P(t)\, \phi(t) \frac{\alpha}{(1 + \alpha)\, s^2(t)}\, \boldsymbol{\nu}(t) \qquad \text{C.17}$$

on note $\hat{\nu}(t)$ l'erreur a posteriori

$$\hat{\nu}(t) = y(t) - \phi^T(t)\, \hat{\theta}(t) \qquad \text{C.18}$$

On démontre alors des propriétés semblables au cas continu.

PROPRIETE 1: des bornes sur P

On note $M = P^{-1}$, et on utilise des identités matricielles classiques :

(C.10) devient :

$$M'(t) = \frac{M(t-1)}{1+\alpha} = M(t-1) - M(t-1)\frac{\alpha}{1+\alpha} \qquad C.19$$

(C.12) s'écrit) :

$$M''(t) = M'(t) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\,\frac{I}{R^2} \qquad C.20$$

(C.13) s'écrit :

$$M(t) = M''(t) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\,\frac{\phi(t)\,\phi(t)^T}{s^2} \qquad C.21$$

D'où

$$M(t) - M(t-1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}\left[-M(t-1) + \frac{I}{R^2} + \frac{\phi(t)\,\phi^T(t)}{s^2}\right] \qquad C.22$$

en reprenant la démonstration du cas continu, on retrouve les majorants (4.19) et (4.20) :

$$P \leq R^2 I \qquad C.23$$

$$P \geq \frac{R^2 r^2 I}{r^2 + R^2} \qquad C.24$$

PROPRIETE 2 : Ellipsoïde de certitude.

$$(\hat{\theta} - \theta^*)^T P^{-1} (\hat{\theta} - \theta^*) \leq 16 \qquad C.25$$

Preuve

On note :

$\tilde{\theta}'(t) = \hat{\theta}'(t) - \theta^*(t)$, $V'(t) = \| \tilde{\theta}'(t) \|^2_{P'(t)^{-1}}$

$\tilde{\theta}''(t) = \hat{\theta}''(t) - \theta^*(t)$, $V''(t) = \| \tilde{\theta}''(t) \|^2_{P''(t)^{-1}}$

$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*(t)$, $V(t) = \| \tilde{\theta}(t) \|^2_{P(t)^{-1}}$

On développe V'(t) en notant $\mu = \theta^*(t) - \theta^*(t-1)$

$$V'(t) = \| \theta(t-1) - \mu \|^2_{\frac{P^{-1}(t-1)}{1+\alpha}} \qquad \text{C.26}$$

$$V'(t) = \frac{1}{1+\alpha} \left[V(t-1) + \mu P^{-1}(t-1)\mu - 2\mu P^{-1}(t-1)\theta(t-1) \right]$$

On a l'inégalité de Schwartz :

$$|\mu P^{-1} \theta| \leq \sqrt{\mu^T P^{-1} \mu} \sqrt{\theta^T P^{-1} \theta}$$

Or, on a (C.25), d'où

$$\mu P^{-1} \mu \leq \| \mu \|^2 \frac{r^2 + R^2}{r^2 R^2}$$

et on a (C.8), d'où

$$\mu P^{-1} \mu \leq \alpha^2$$

Il vient encore, avec $\frac{V}{1+\alpha} = V - \frac{\alpha V}{1+\alpha}$

$$V'(t) \leq V(t-1) + \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[- V(t-1) + 2\sqrt{V(t-1)} + \alpha \right] \qquad \text{C.27}$$

On développe V''(t)

. si $\lambda = 0$, il vient :

$$V''(t) = V'(t) + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\| \theta^* - \theta' \|^2}{R^2}$$

D'après (C.7) et (C.14) : $\| \theta^* - \theta' \| \leq 2$, d'où

$$V''(t) \leq V'(t) + \frac{4\alpha}{1+\alpha} \qquad \text{C.28}$$

. si $\lambda = 0$, il vient

$$V''(t) = V'(t) + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\|\theta^*\|^2}{R^2} - \frac{1}{1+\alpha} \|\theta'\|^2_{P'(t)^{-1}}$$

D'après (C.7), l'inégalité (C.28) est encore vraie.

On développe enfin $V(t)$ en utilisant des identités matricielles classiques :

d'où : $V(t) \leq V''(t) + \frac{\alpha}{(1+\alpha)\, s^2(t)} (v^2(t) - \hat{v}^2(t))$

On incorpore (C.4) :

$$V(t) \leq V''(t) + \frac{\alpha}{1+\alpha} (4 - \alpha) - \frac{\alpha\, \hat{v}^2}{(1+\alpha)\, s^2(t)} \qquad \text{C.29}$$

On réunit (C.27), (C.28) et (C.29)

$$V(t) \leq V(t-1) + \frac{\alpha}{1+\alpha} (4 - \alpha + 4 - V + 2\sqrt{V} + \alpha)$$

$$[\, V(t) - V(t-1)\,] \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} [8 + 2\sqrt{V} - V] =$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} [2 + \sqrt{V}]\, [4 - \sqrt{V}]$$

D'où : $V(t) < V(t-1)$ si $\sqrt{V(t-1)} > 4$. Sachant que $V(0) < 16$, (C.25) est donc démontré.

PROPRIETE 3 : Un majorant de $\hat{\theta}(t)$.

$$\|\hat{\theta}(t)\| \leq 5R \qquad \text{C.30}$$

Ceci résulte immédiatement de (C.25), où $P^{-1} \geq R^{-2} I$,
d'où $\|\tilde{\theta}\| \leq 4$
or $\|\theta^*\| \leq 1$, d'où (C.30).

PROPRIETE 4 : un majorant pour $\hat{\nu}$.

$$\sum_{\tau=t}^{t+T} \frac{\hat{\nu}(\tau)^2}{s(\tau)^2} \leq 16 \left(T + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{C.31}$$

Preuve

On reprend (27), (28), (29) :

$$V(t) - V(t-1) + \frac{\alpha\, \hat{\nu}^2(t)}{(1+\alpha)\, s^2(t)} \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[8 + 2\sqrt{V(t-1)} - V(t-1)\right]$$

où $V \geq 0$, d'où : $\quad \ldots \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[8 + 2\sqrt{V(t-1)}\right]$

où $V \leq 16$, d'où :

$$\frac{\alpha\, \hat{\nu}^2(t)}{(1+\alpha)\, s^2} \leq \frac{16\alpha}{1+\alpha} + V(t-1) - V(t)$$

On somme de t à t + T :

$$\sum_{\tau=t}^{t+T} \frac{\hat{\nu}^2(t)}{s^2(\tau)} \leq 16\, T + \frac{1+\alpha}{\alpha} \left[\, V(t-1) - V(t+T) \,\right]$$

où $V(t) \leq 16$, et $V(t+T) \geq 0$, d'où (C.31).

PROPRIETE 5

$$\sum_{\tau=t}^{t+T} \left\| \hat{\theta}(\tau) - \hat{\theta}(\tau-1) \right\| \leq 16 \sqrt{n}\, R\, \alpha \left(T + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

On effectue ici encore une démonstration similaire en tous points à celle du cas continu.

STABILITE GLOBALE SOUS HYPOTHESE D'ADMISSIBILITE DE $\hat{\theta}(t)$

(C.1) et (C.9) s'écrivent globalement sous forme d'état :

$$x(t+1) = F(t)\,x(t) + w(t)$$

où

$$x(t) \triangleq \phi(t),\quad F(t) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}^T(t) \\ \hline 1 \;\ddots\; 1\;0 \\ \hline k^T(\theta(t)) \\ \hline 1 \;\ddots\; 1\;0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \hat{\nu}(t) \\ \hline 0 \\ \hline y_r(t)k_r(\theta(t)) \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Il suffit alors d'appliquer la version discrète du théorème I pour démontrer la stabilité, et on trouve des conditions analogues à celles du cas continu.

STABILITE GLOBALE SANS HYPOTHESE D'ADMISSIBILITE

Si $\hat{\theta}$ n'est pas continuellement admissible, on définit, comme dans le cas continu, un modèle $\bar{\theta}(t)$ qui obéit aux équations :

$$\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(t-1) - P(t)\,\phi(t)\,\frac{\alpha}{(1+\alpha)\,s^2(t)}\,(y(t) - \phi^T(t)\,\bar{\theta}(t-1))$$

Sauf si $\bar{\theta}(t)$ n'appartient pas à D_A. On cherche alors un modèle $\bar{\theta}(t)$ appartenant à la fois à D_{FA} et à l'ellipsoïde $E(t)$:

$$\theta \in E(t) \iff \| \hat{\theta}(t) - \theta \|^2_{P(t)^{-1}} \leq 16.$$

On suit alors pas à pas la démarche du cas continu pour majorer le nombre de réinitialisations possibles sur un intervalle de temps donné, et trouver encore des majorants de l'erreur a posteriori $\bar{\nu}(t) = y(t) - \phi^T(t)\,\bar{\theta}(t)$, et des différences $\| \bar{\theta}(t) - \bar{\theta}(t-1) \|$.

APPENDICE D

UNE SOLUTION AU PROBLEME DE LA DERIVATION DES SIGNAUX CONTINUS

Soit un processus décrit par le diagramme fonctionnel ci-dessous

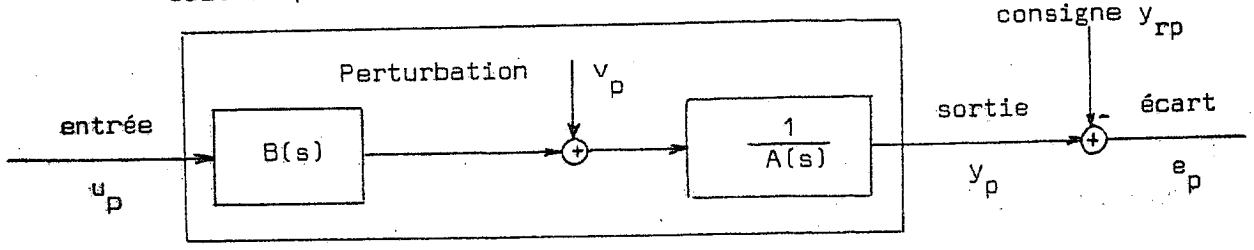


fig. D-1

Soit $\frac{1}{C(s)}$ une transmittance arbitraire stable.

On note u, y, y_r, e les grandeurs définies sur le diagramme fonctionnel suivant

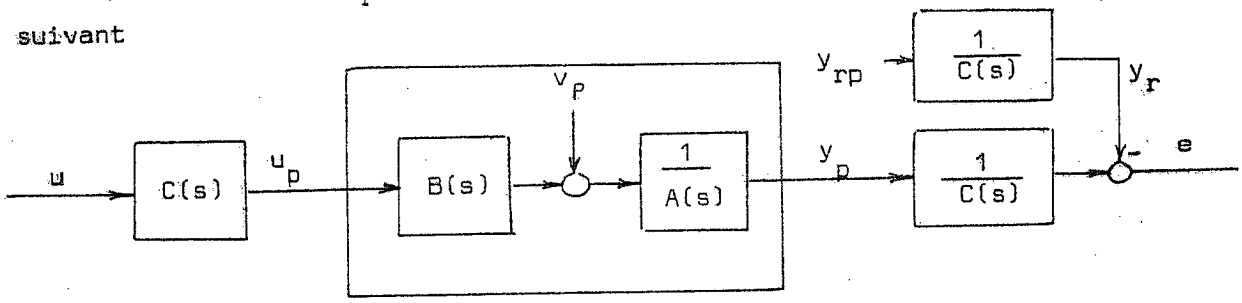


fig. D-2

La transmittance $\frac{1}{C(s)}$ est réalisée selon le schéma

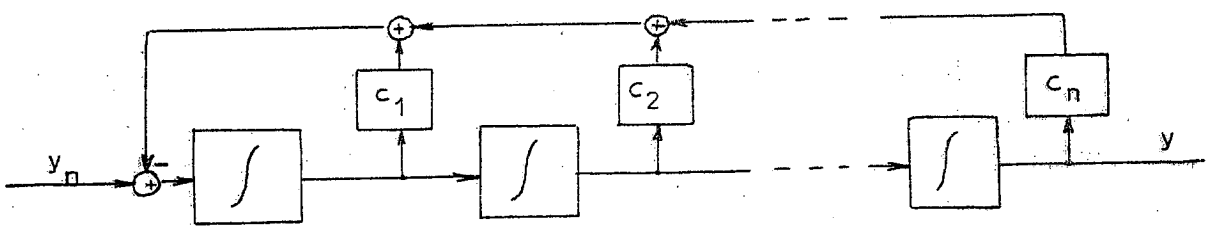


fig. D-3

Les dérivées de y sont disponibles à l'entrée de chaque intégrateur.

De la même façon, les dérivées de u sont accessibles dans la réalisation de u par la loi de commande :

$$u = \frac{1}{P(s)} \left[Q(s)y + k_r y_r \right]$$

Considérons maintenant les relations entre les différentes grandeurs.

On remplace $y_p = Cy$, $u_p = Cu$ dans $Ay_p = Bu_p + v_p$.

On a donc $Ay = Bu + \frac{v_p}{C}$

On note $v \triangleq \frac{v_p}{C}$

Sous des conditions très générales, les hypothèses faites sur v peuvent donc s'appliquer.

On pourrait aussi considérer le cas où v_n serait modélisé par $v_p = C\varepsilon$ (ε = bruit blanc). Alors on retrouve $v = \varepsilon$ = bruit blanc, ce qui correspond à une hypothèse favorable pour l'identification. Cet argument a néanmoins une faible portée dans le cadre de la commande adaptative, où il serait irréaliste de supposer connu le modèle stochastique des bruits.

Enfin, si la commande permet de borner u et ses dérivées, il en sera évidemment de même pour $y_p = Cy$.

On pourrait s'interroger sur l'intérêt du problème de la dérivabilité des signaux, puisqu'il existe une version discrète qui sera appliquée dans la quasi-totalité des cas.

Néanmoins, dans le cas où la période d'échantillonnage est petite, on aura le plus grand intérêt à effectuer une transformation analogue à celle de la figure C-2, à partir d'une transmittance discrète D(z) judicieusement choisie, en vue de mieux conditionner la mise en oeuvre numérique.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique