

**Sur l'approximation des coques minces par des  
methodes "B-splines et elements finis". 2 eme partie :  
application a la modelisation d'une pale de turbine ou  
d'un compresseur axial**

Michel Bernadou, Bernard Lalanne

► **To cite this version:**

Michel Bernadou, Bernard Lalanne. Sur l'approximation des coques minces par des methodes "B-splines et elements finis". 2 eme partie : application a la modelisation d'une pale de turbine ou d'un compresseur axial. RR-0479, INRIA. 1986. <inria-00076075>

**HAL Id: inria-00076075**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076075>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tel. : (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 479

**SUR L'APPROXIMATION  
DES COQUES MINCES  
PAR DES MÉTHODES  
"B-SPLINES ET  
ÉLÉMENTS FINIS"  
2<sup>ème</sup> Partie :  
APPLICATION  
À LA MODÉLISATION  
D'UNE PALE DE TURBINE  
OU D'UN COMPRESSEUR AXIAL**

**Michel BERNADOU  
Bernard LALANNE**

**Janvier 1986**

**SUR L'APPROXIMATION DES COQUES MINCES  
PAR DES METHODES "B-SPLINES ET ELEMENTS FINIS"**

**2<sup>ème</sup> partie :  
APPLICATION A LA MODELISATION D'UNE PALE DE TURBINE  
OU D'UN COMPRESSEUR AXIAL**

Michel BERNADOU\* et Bernard LALANNE\*\*

RESUME

Dans la première partie de ce travail, nous avons proposé une méthode d'approximation des coques minces combinant

- i) une approche de la géométrie de la coque (surface moyenne et épaisseur) par fonctions B-splines ;
- ii) une approche du champ de déplacement par des méthodes conformes d'éléments finis.

Puis nous avons établi la convergence de la méthode et nous avons obtenu les estimations asymptotiques d'erreur.

Dans cette seconde partie, nous indiquons comment appliquer les méthodes précédentes à la modélisation de **pales de turbine** ou de **compresseur axial**.

---

\* INRIA, B.P. 105, 78153 LE CHESNAY Cedex

\*\* Bureau d'Etudes, TURBOMECA, 64320 BORDES

Cette étude a été soutenue par la DRET (Opération n° 83.322)

## ABSTRACT

In the first part of this work, we have proposed an approximation method of thin shells combining

i) an approach of the geometry of the shell (middle surface and thickness) by using B-spline functions ;

ii) an approach of the displacement field by using conforming finite element methods.

Then, we have proved the convergence of the method and we have obtained the asymptotic error estimates.

In this second part, we indicate how to apply the previous methods to the modelization of turbine or axial compressor blades.

## 1. INTRODUCTION

Le but de ce rapport est d'illustrer les résultats d'approximation obtenus dans BERNADOU-LALANNE [1] par quelques exemples pratiques traités par le Bureau d'Etudes de la Société TURBOMECA.

Nous décrivons tout d'abord la pièce à modéliser, représentative d'une famille de pièces similaires que l'on retrouve dans la plupart des compresseurs.

Puis, nous détaillons le prélèvement des données et les diverses étapes de l'interpolation de la géométrie.

A l'issue de ce travail, on dispose d'une représentation "classique" de la géométrie de la pale permettant une approche soignée des déformations, des contraintes et des modes vibratoires de la pale. Ces différents problèmes seront abordés dans des rapports ultérieurs.

## REMERCIEMENTS

Les Auteurs tiennent à remercier

i) la Direction des Recherches Etudes et Techniques qui a soutenu financièrement ce travail (DRET N° 83.322) ;

ii) Maryse DESNOUS qui a remarquablement dactylographié le manuscrit.

## 2. MODELISATION GEOMETRIQUE D'UNE PALE DE TURBINE OU DE COMPRESSEUR AXIAL

### Orientation :

Dans ce paragraphe, nous allons modéliser la géométrie d'une pale de turbine du type de celles qui apparaissent sur la figure couleur ci-après. Le passage à d'autres types de pales, de turbine ou de compresseur axial, se ferait par analogie.

### 2.1. Description de la pièce à modéliser

Comme on peut le vérifier sur la figure couleur ci-après les pales sont disposées sur des **disques** dont le diamètre est de 2 à 5 fois la "longueur" de la pale et dont l'épaisseur est du même ordre que la largeur de la pale. Le nombre de pales par disques est très variable : de vingt jusqu'à quatre-vingt selon le disque considéré. Sur une même turbine on peut trouver plus d'une vingtaine de disques de diamètres et d'épaisseurs différents.

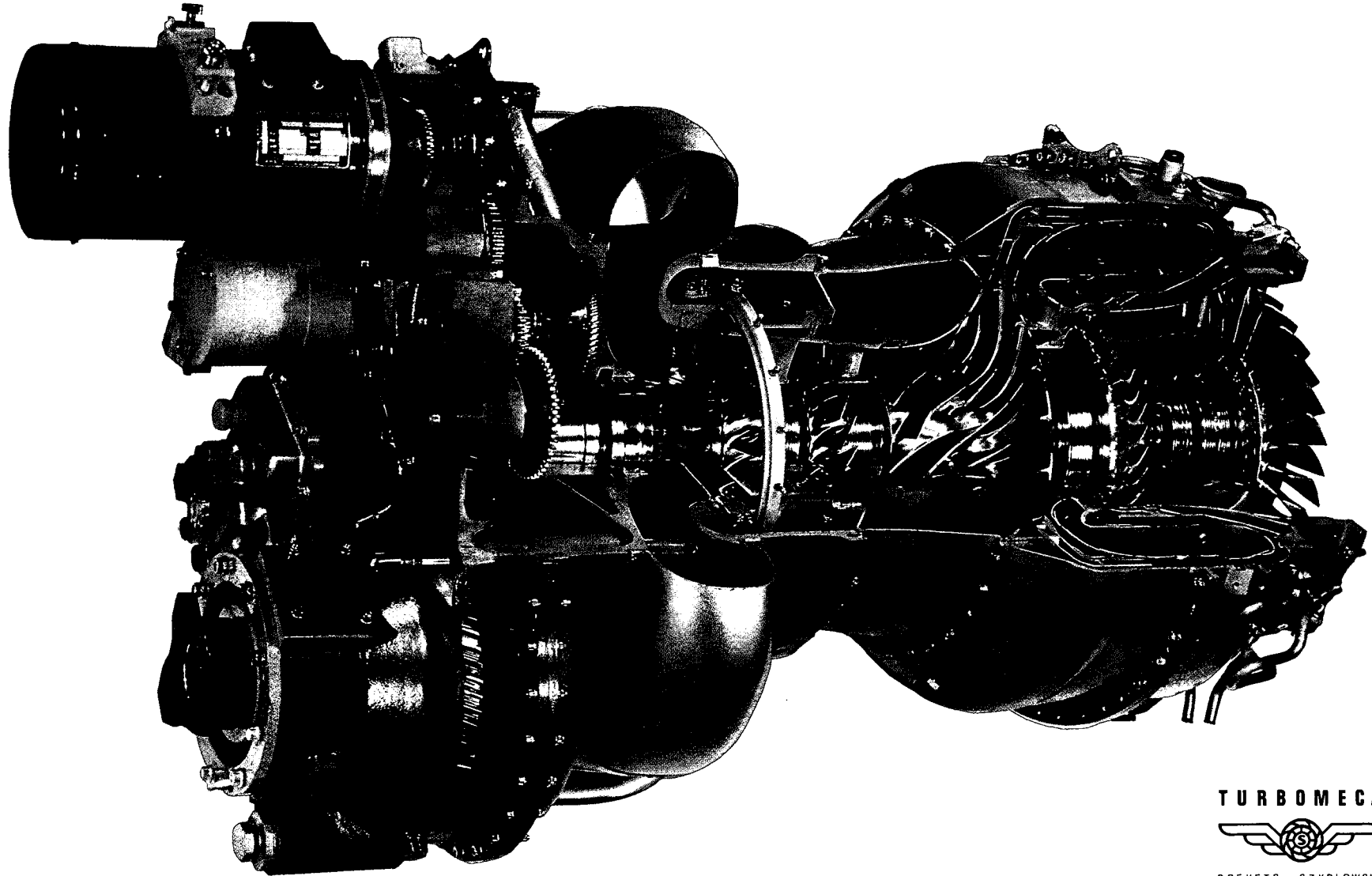
Pour la construction de tels dispositifs (disque + pales) deux techniques sont essentiellement utilisées :

i) l'ensemble du dispositif est obtenu à partir d'un disque brut ; les pales sont alors réalisées une à une par fraisage à l'aide de machines à commande numérique ;

ii) l'ensemble du dispositif comporte un disque final d'une part, les pales d'autre part. Ces dernières sont réalisées une à une ; la liaison est réalisée de diverses façons : pied de sapin, queue d'aronde, goupille... Lors du montage, la base de la pale vient se fixer sur le pourtour du disque.

Par la suite, nous considérerons que la pale est **parfaitement encastrée** sur le disque. Dans certains cas, cette hypothèse est réaliste, dans d'autres, le couplage pale-disque est non négligeable. Nous nous en tiendrons ici à la modélisation suivante :

tm333



TURBOMECA



BREVETS SZYDLOWSKI

i) le disque lui-même sera assimilé à un **corps rigide** tournant autour de son axe ;

ii) chaque pale sera assimilée à une **coque mince élastique**, peu profonde ou moyennement profonde, encastrée à sa base sur le disque.

Le disque rigide ne présentant aucune difficulté de modélisation géométrique, nous nous tournons donc vers la **modélisation géométrique de la pale élastique**. Compte tenu des différentes techniques de conception basées d'une part, sur des considérations d'aérodynamique, d'autre part, sur la fabrication par des machines à commande numérique, on ne dispose pas - a priori - d'une définition analytique de la pale. Nous allons l'approcher à l'aide des méthodes B-splines étudiées dans la première partie de ce travail. Pour cela, il convient de relever les données nécessaires à la modélisation.

## 2.2. Prélèvement des données et interpolations

Nous décrivons ci-après la préparation des données telle qu'elle a été réalisée par le second Auteur à partir d'une pale réelle. Cette description repose sur les Figures 2.2.1 à 2.2.4, les trois dernières étant commentées ci-après.

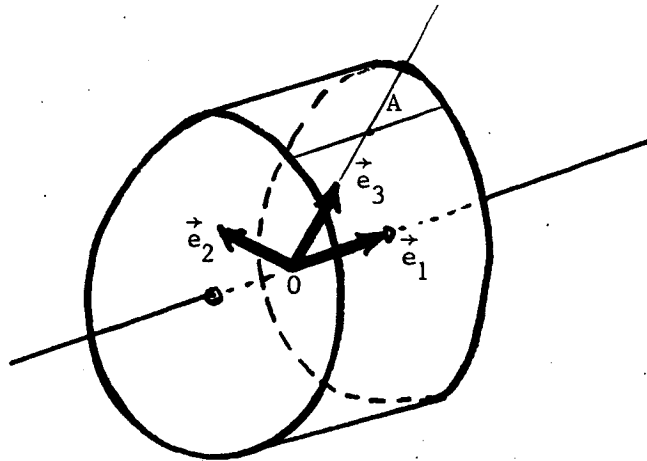


Figure 2.2.1 : Repère de référence

Figure 2.2.2 : Coupes transversales de la pale étudiée

En supposant que la pale considérée est encastrée au niveau A du disque et en utilisant le repère orthonormé fixe centré en O et associé au point A, on a réalisé les neuf coupes transversales (orthogonales à  $\vec{e}_3$ ), de cotes 42, 47, 50, 57, 64, 71, 78, 83, 86mm indiquées sur la Figure 2.2.2. Pour plus de clarté :

- i) on a hachuré la première coupe et la dernière ;
- ii) puis on élimine les coupes de cote 47mm et 83 mm qui sont irrégulièrement réparties.

Ces coupes donnent une définition points par points des intrados et extrados de la section.

Figure 2.2.3 et 2.2.4 : Approximation de la surface moyenne et de l'épaisseur

(i) A partir des coordonnées de 10 points régulièrement répartis sur l'**extrados** d'une coupe plane, on trace la courbe B-spline associée (de classe  $\mathcal{E}^k$  en général, de classe  $\mathcal{E}^3$  sur la figure). Pour vérifier, on trace également le polygône de BEZIER associé ;

(ii) On fait la même interpolation pour l'**intrados** ;

(iii) Dans chaque coupe plane, on cherche alors la **ligne moyenne** entre l'intrados et l'extrados de telle sorte que la normale en tout point de cette ligne moyenne coupe intrados et extrados à la même distance (demi-épaisseur de la coupe considérée) ;

(iv) En utilisant l'interpolation "B-splines" définie dans la partie 1, on **approche alors la surface moyenne** par une surface passant par des points donnés situés sur les lignes moyennes définies en (iii). Ces points apparaissent sur la Figure 2.2.4.a ainsi que les lignes moyennes approchées obtenues par intersection de la surface moyenne approchée et des plans  $x_3 = 42\text{mm}, \dots, x_3 = 86\text{ mm}$ .



v) Connaissant la surface moyenne approchée, il est possible de définir la normale en tous points de cette surface moyenne, ce que l'on fait en pratique en tous les points d'interpolation utilisés en (iv). D'une manière générale, cette normale n'est pas contenue dans les coupes planes considérées et fait ainsi un "petit" angle  $\theta$  avec les normales utilisées en (iii). On corrige alors l'épaisseur trouvée en (iii), en la multipliant par  $\cos\theta$ . En utilisant ces nouvelles valeurs définies en tous les points d'interpolation, on réalise ensuite l'interpolation "B-splines" décrite dans le paragraphe 4 de la partie 1, ce qui détermine la fonction d'épaisseur "approchée".

vi) Cependant, comme la définition numérique est prolongée par rapport au solide réel, nous effectuons deux intersections par des cônes intérieurs et extérieurs pour obtenir les limites physiques exactes de la pale. Sur la Figure 2.2.4.b, il apparaît les noeuds d'interpolation et les lignes moyennes approchées des 7 coupes planes précédemment définies. Au passage, il est effectué une nouvelle interpolation afin de régulariser le paramétrage.

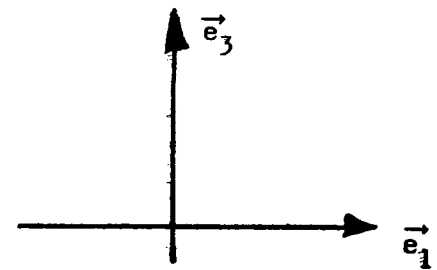
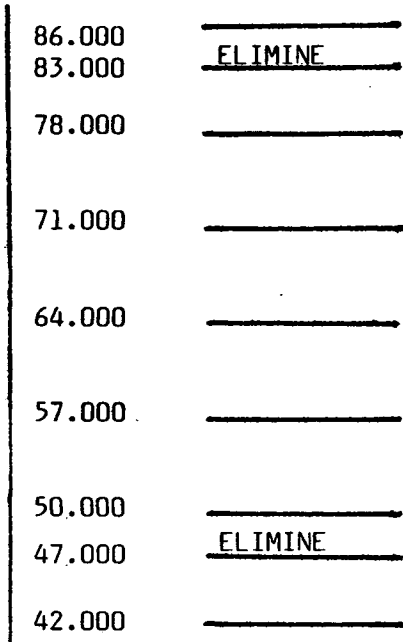
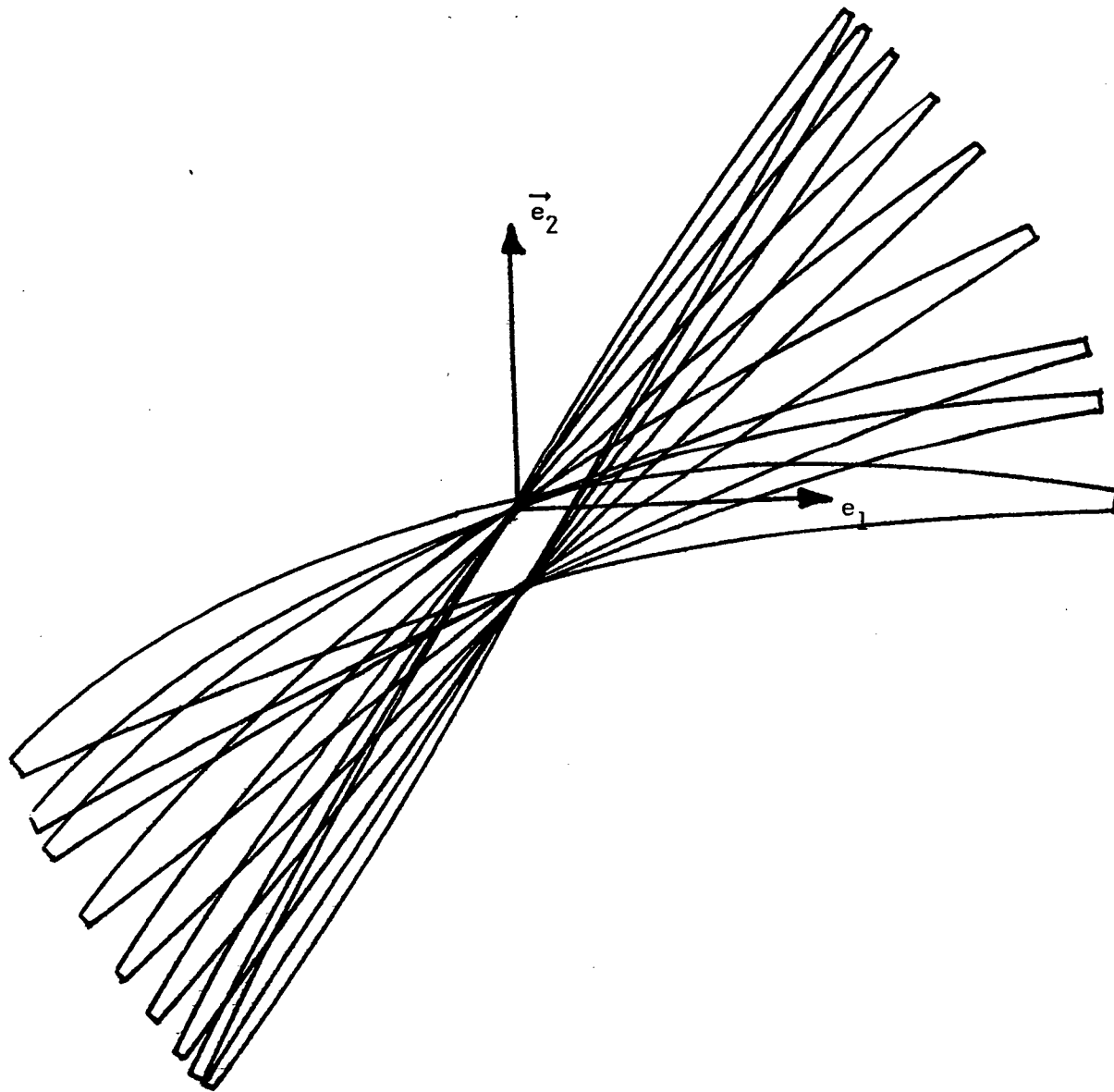


Figure 2.2.2 : Les coupes transversales de la pale étudiée

interpolation  $\epsilon^3$  de l'épaisseur

{ fonction  
{ polygône de BEZIER

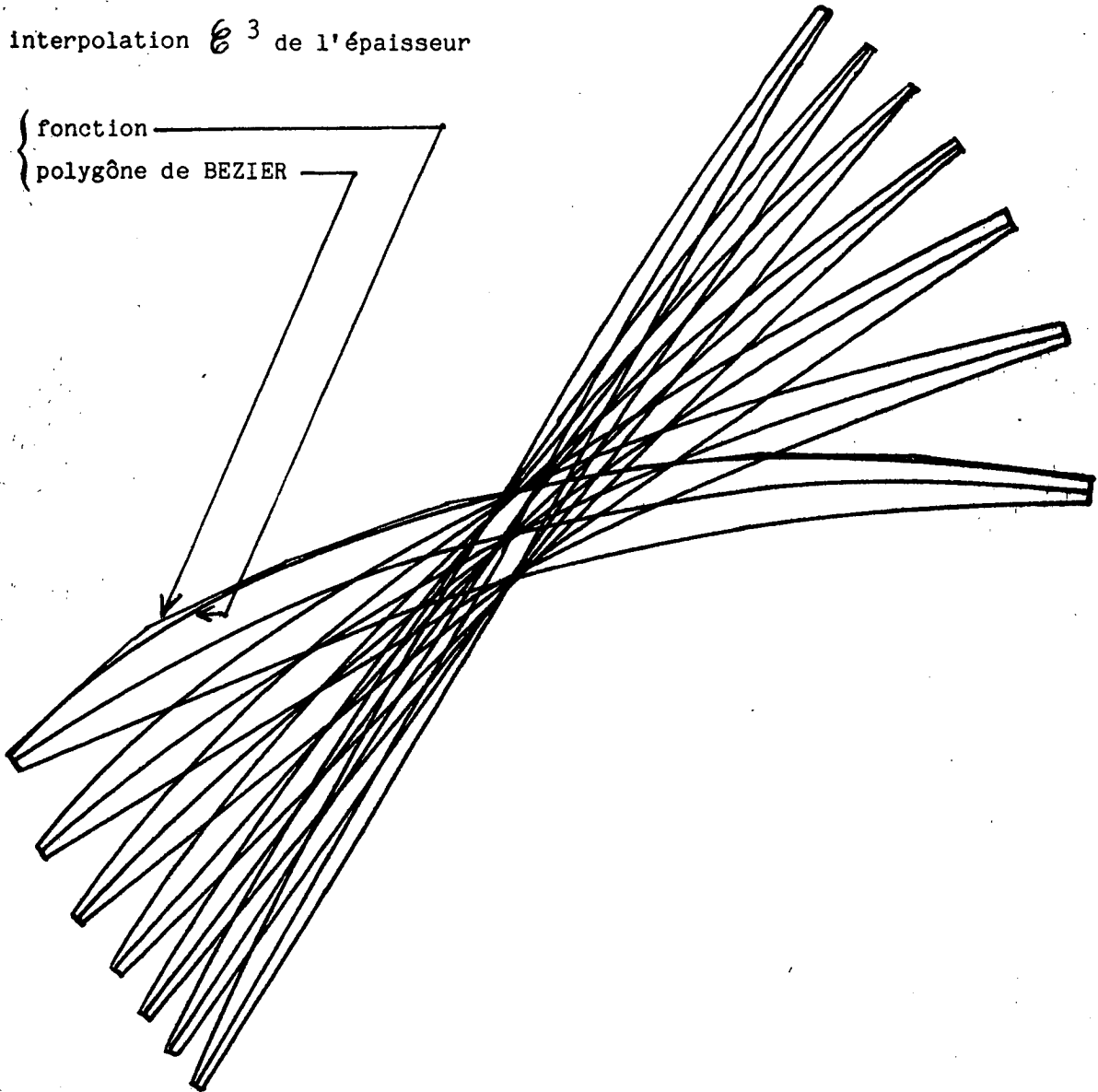
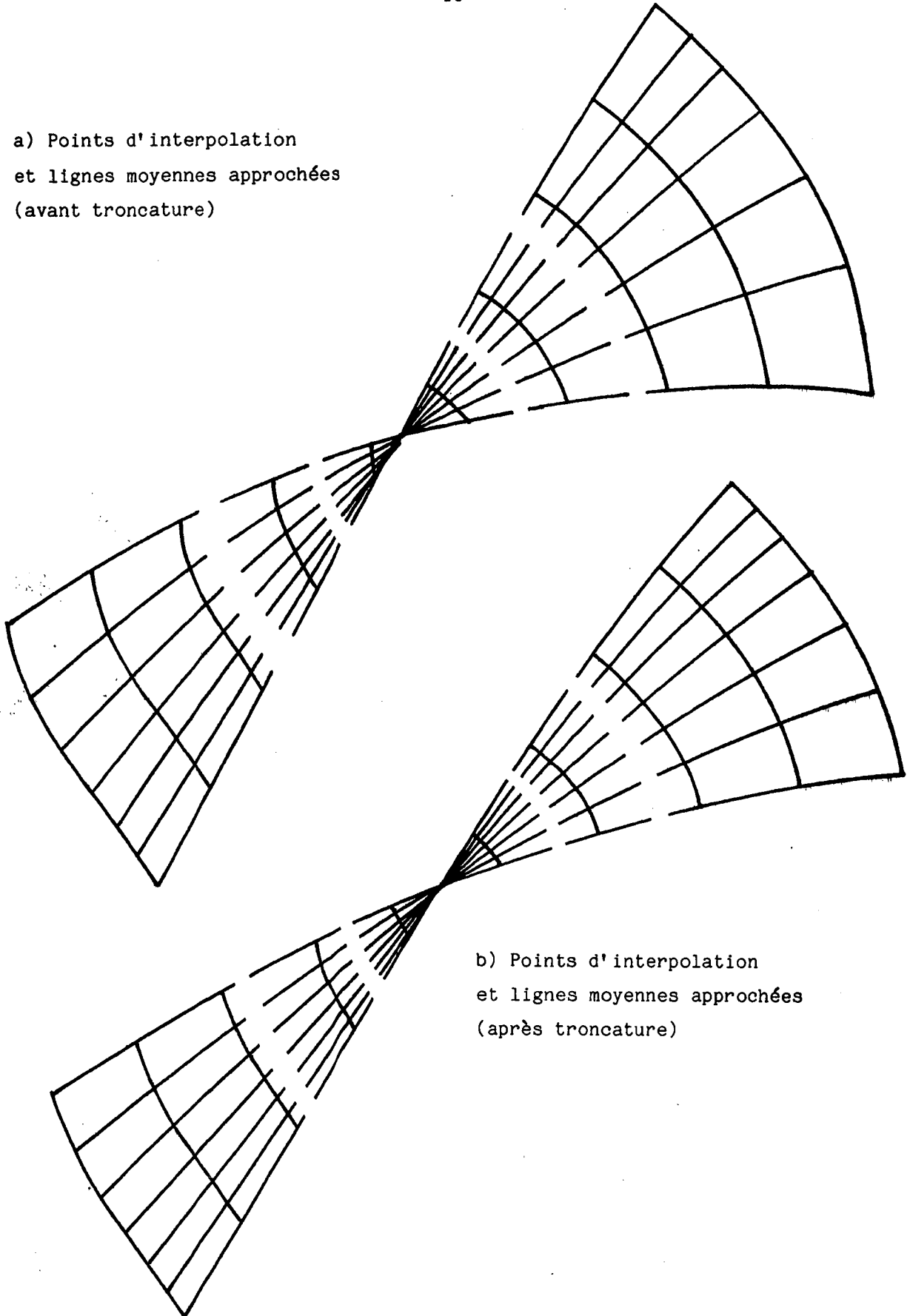


Figure 2.2.3 : Recherche de la ligne moyenne

a) Points d'interpolation  
et lignes moyennes approchées  
(avant troncature)



b) Points d'interpolation  
et lignes moyennes approchées  
(après troncature)

Figure 2.2.4 : Approximation de la surface moyenne et de l'épaisseur

### 2.3. La pale approchée

La Figure 2.3.1 montre les projections de la surface moyenne approchée sur les plans  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$  et  $(0, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

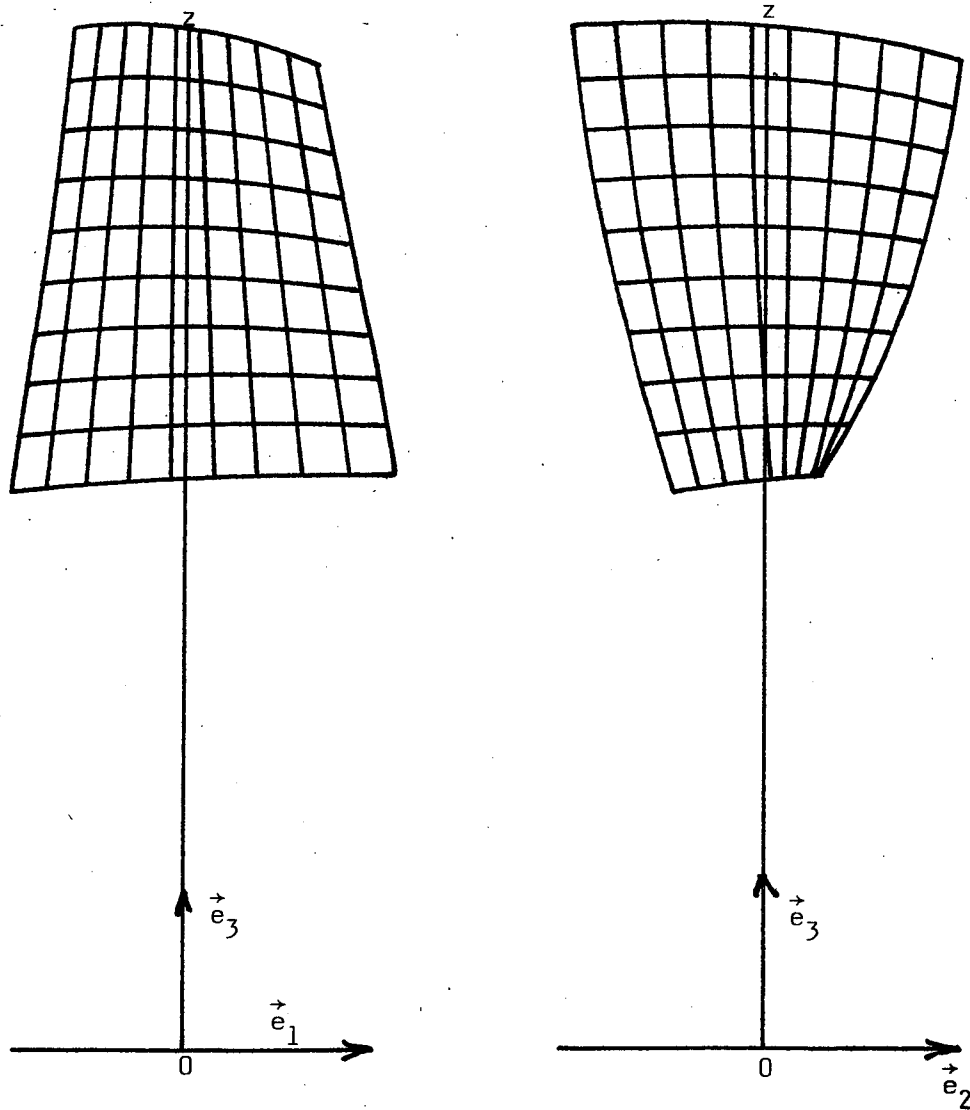


Figure 2.3.1 : Projections de la surface moyenne approchée

En pratique, au terme de ces différentes approximations, on dispose de la définition des applications approchées suivantes :

i)  $\vec{\phi}_{h\delta} : \Omega = [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathcal{J}_{h\delta}$  (surface moyenne) avec (voir BERNADOU-LALANNE [1985, relation (2.3.7)]) :

$$(2.3.1) \quad \vec{\phi}_{h\delta}(\xi^1, \xi^2) = \pi_{k^1, k^2} x^i(\xi^1, \xi^2) \vec{e}_i,$$

la base  $\vec{e}_i$  étant celle indiquée sur la Figure 2.2.1.

ii)  $e_{h\delta} : \Omega = [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  (épaisseur).

Dès lors, ce problème de pale entre exactement dans le cadre géométrique "classique" : un domaine de référence, une application (carte)  $\vec{\phi}$  définissant la surface moyenne, une fonction d'épaisseur.

### 3 - BIBLIOGRAPHIE

BERNADOU, M. ; LALANNE, B. [1985] : Sur l'approximation de coques minces par des méthodes "B-splines et éléments finis". 1ère partie : formulation du problème et estimations d'erreur. Rapport de Recherche INRIA.

... et bibliographie de ce travail.

