

# Etude de la version "temps reel" d'un algorithme de bin-packing asymptotiquement optimal

Philippe Robert

► **To cite this version:**

Philippe Robert. Etude de la version "temps reel" d'un algorithme de bin-packing asymptotiquement optimal. RR-0444, INRIA. 1985. <inria-00076111>

**HAL Id: inria-00076111**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076111>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**IRIA**

**CENTRE DE ROCQUENCOURT**

Rapports de Recherche

N° 444

**ÉTUDE DE LA VERSION  
"TEMPS RÉEL"  
D'UN ALGORITHME  
DE BIN-PACKING  
ASYMPTOTIQUEMENT OPTIMAL**

**Philippe ROBERT**

**Septembre 1985**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105

78153 Le Chesnay Cedex

France

Tel: (3) 954 90 20

ETUDE DE LA VERSION "TEMPS REEL" D'UN ALGORITHME

DE BIN-PACKING ASYMPTOTIQUEMENT OPTIMAL

Philippe ROBERT

INRIA

Domaine de Voluceau - Rocquencourt

BP 105

78153 LE CHESNAY CEDEX

FRANCE

ABSTRACT

This paper is concerned with the "on line" version of a bin packing algorithm suggested by Knodel, Karp et al. A detailed analysis of the characteristic variable of this algorithm is provided, i.e., the number of remaining items whose size exceeds  $1/2$  when  $n$  items have been processed according to this algorithm. We use a stochastic framework, the size of each item is a random variable with density  $2p1_{[0,1/2]}(x)+2q1_{[1/2,1]}(x)$ .

RESUME

Nous nous intéressons à la version "temps réel" d'un algorithme de bin packing proposé et étudié par Knodel, Karp et al. Nous étudions en détail le comportement asymptotique du nombre de pièces de taille  $\geq 1/2$  qui restent à ranger quand  $n$  pièces ont été traitées suivant cet algorithme. Nous travaillons sur un modèle probabiliste, la taille des pièces est avec probabilité  $q$  [resp  $p$ ] une variable uniformément distribuée sur  $[0,1/2]$  (resp sur  $[1/2,1]$ ) avec  $p+q=1$ , ce qui permet pour  $p \neq q$  une dissymétrie en  $x=1/2$  pour la distribution de la taille des pièces.

Etude de la version "temps réel" d'un algorithme de bin-packing  
asymptotiquement optimal

INTRODUCTION

Le problème général des modèles de bin-packing est le suivant : on dispose de boîtes de taille 1 dans lesquelles on veut ranger  $n$  pièces de tailles respectives  $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$  et cela de façon optimale, i.e. trouver  $r \in \mathbb{N}$  aussi petit que possible tel qu'on ait une partition  $L_1, \dots, L_r$  de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  vérifiant  $[\forall i \in \{1, \dots, r\}, \sum_{x \in L_i} x \leq 1]$ .

La détermination d'un algorithme réalisant une utilisation optimale de l'espace de stockage (les boîtes) est un problème NP complet (voir [1] à ce sujet). Cette difficulté est contournée par l'utilisation d'algorithmes simples à décrire, s'approchant d'assez "près" du rangement optimal quand le nombre de pièces croît. Ce domaine est depuis longtemps l'objet de recherches intensives (voir [2] et [3] pour une description des algorithmes généralement utilisés), la plupart des résultats obtenus ayant pour cadre le "worst-case behaviour" : Si  $N_\theta(n)$  [resp.  $N_A(n)$ ] désigne le nombre de boîtes nécessaires pour ranger  $n$  pièces de tailles  $a_1, \dots, a_n$  de façon optimale [resp. en utilisant un algorithme A]. On étudie les valeurs de  $(a_i)$  pour lesquelles l'utilisation de A est la plus défavorable, i.e.

la quantité  $\limsup_n \left[ \sup_{a_1, \dots, a_n \in [0,1]} \frac{N_A(n)}{N_\theta(n)} \right]$ . Pour la plupart des algorithmes simples, des estimées précises du rapport  $\frac{N_A(n)}{N_\theta(n)}$  sont connues (cf. [3]).

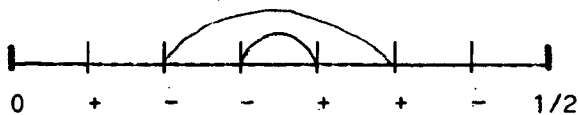
Récemment une partie des recherches s'est orientée vers l'étude probabiliste de ces algorithmes ("average case") : la taille des pièces a un comportement statistique connu, on suppose que  $a_1, \dots, a_n$  sont des variables aléatoires de même loi, le problème revient à étudier la loi de  $N_A(n)$  (en particulier la moyenne  $E(N_A(n))$  de  $N_A(n)$ ) pour un algorithme A donné. Les résultats dans ce sens concernent principalement le cas où les

pièces suivent une distribution uniforme sur un intervalle de  $[0,1]$  (voir à ce sujet les travaux de Coffman, Hofri, Karp, Karmakar et al, [2] pour la bibliographie).

Dans cet article, nous étudions la variante "temps réel" d'un algorithme simple proposé et étudié par [5] (voir aussi [4]). Par "temps réel" on entend la propriété qu'a un algorithme de ne pas remettre en cause le placement des pièces déjà insérées lors de l'adjonction d'une pièce supplémentaire.

Description de l'algorithme de [4]

L'algorithme de [5] se décrit de la façon suivante (en utilisant le formalisme de [4]) : Pour  $n$  pièces de tailles respectives  $a_1, \dots, a_n$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on attribue le signe  $-$  au point  $a_i$  si  $a_i \leq 1/2$  et le signe  $+$  au point  $1-a_i$  si  $a_i > 1/2$ . Si un  $-$  précède un  $+$  sur  $[0,1/2]$ , les deux pièces représentées par ces  $+$  et  $-$  peuvent donc être rangées dans une même boîte. On obtient ainsi une répartition de  $+$  et  $-$  sur l'intervalle  $[0,1/2]$ , on cherche le premier  $+$  à droite de 0 qu'on associe au premier  $-$  sur sa gauche, s'il en existe sinon on attribue à ce  $+$  une boîte pour lui seul. L'opération est effectuée en éliminant au fur et à mesure les  $+$  et  $-$  utilisés jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucun  $+$  sur  $[0,1/2]$ .



[5] suppose que les pièces sont des variables aléatoires uniformes sur  $[0,1]$ . Pour cet algorithme, il n'y a pas plus de deux pièces par boîte [ce qui en première approximation ne semble pas trop restrictif, la taille moyenne des pièces étant  $1/2$ ]. La variable importante de ce modèle sera donc le nombre de  $+$  qui n'ont pu être associés à un  $-$  (les  $-$  qui restent eux, peuvent être associés deux à deux).

[5] montre que ce nombre est de l'ordre de  $\sqrt{n}$  quand  $n$  pièces ont été rangées, ainsi le nombre de boîtes utilisées par cet algorithme sera  $\frac{n}{2} + \alpha_n$  (avec  $\alpha_n = o(n^{\epsilon+1/2})$  pour tout  $\epsilon > 0$ ). Il est facile de montrer que par un rangement optimal le nombre de boîtes nécessaire est au moins de l'ordre de  $n/2$ , ce qui justifie la dénomination "asymptotiquement optimal" de cet algorithme.

La variante "temps réel" de cet algorithme se définit comme suit :

si  $A_n$  est l'ensemble des + de  $[0, 1/2]$  qui n'ont pu être associés à un - quand  $\{a_1, \dots, a_n\}$  a été traité,

$$\bullet A_{n+1} = A_n \cup \{1 - a_{n+1}\} \quad \text{si } a_{n+1} \geq 1/2$$

$$\bullet A_{n+1} = A_n - \{t_1(a_{n+1})\} \quad \text{si } a_{n+1} < 1/2 \text{ et } t_1(a_{n+1}) \text{ est le 1er + à droite de } a_{n+1}$$

$$\bullet A_{n+1} = A_n \text{ si } a_{n+1} < 1/2 \text{ et s'il n'y a pas de + entre } a_{n+1} \text{ et } 1/2.$$

La taille des pièces est une variable aléatoire de densité  $d_p(x) = 2q \cdot 1_{[0, 1/2]}(x) + 2p \cdot 1_{[1/2, 1]}(x)$  avec  $p+q = 1$ . Une pièce donnée aura ainsi la probabilité  $p$  d'être un +, pour  $p=q$  ce sont les hypothèses de [4].

### Résultats

Nous étudions dans ce qui suit le comportement asymptotique du cardinal de  $A_n$  avec des pièces ayant la densité  $d_p$ , plus précisément si pour  $0 \leq a \leq b \leq 1/2$ ,  $|A_n[a, b]|$  désigne le nombre de + de l'intervalle  $[a, b]$  qui restent quand  $n$  pièces ont été traitées (les pièces de taille comprise entre  $1-b$  et  $1-a$  qui n'ont pu être rangées avec une autre pièce).

1) Si  $p \geq q$ , nous montrons  $|A_n[a, b]| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  presque sûrement pour  $a < b$

et que  $\frac{|A_n[a, b]|}{n}$  converge en moyenne vers  $2(p-q)(b-a)$ .

2) Si  $0 < p < q$  le phénomène est plus intéressant : pour  $0 < a < b \leq 1/2$  le nombre moyen de + dans  $[a, b]$ ,  $E[|A_n[a, b]|]$  tend vers  $\alpha \log(b/a)$  où  $\alpha$  est une constante finie  $\geq p/q-p$ . Si  $n + \tau_x^n$  désigne le numéro de la première pièce qui peut être associée avec une pièce de taille  $x \geq 1/2$  de numéro  $n$ , alors la moyenne  $E(\tau_x^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{p(1-x)} + 1$ . Au voisinage de 0, le comportement

est un peu surprenant, malgré la condition  $p < q$ ,  $|A_n[0, b]| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  presque sûrement, les pièces de taille voisine de 1 s'accumulent et cela avec un taux de convergence au moins de l'ordre de  $\frac{p}{q} \log(n)$ . Nous montrons au passage une propriété de régularité de ces + qui s'accumulent, cela nous permet de montrer que la taille moyenne de l'espace de stockage non utilisé par ces + est  $\alpha(1-e^{-1})$ . Dans ce cas la version "temps réel" de l'algorithme diffère notablement de la version initiale, puisque pour celle-ci en utilisant [4] il est facile de montrer que, pour des pièces de densité  $d_p$ ,  $|A_n[0, 1/2]|$  converge en loi vers une loi géométrique de paramètre  $p/q$ , et ainsi  $E(|A_n[0, 1/2]|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{q-p}$ . Ces résultats sont démontrés en utilisant

les propriétés de symétrie et de monotonie de cet algorithme.

### I - Le modèle mathématique

Nous supposons qu'une pièce arrive toutes les unités de temps, avec probabilité  $p$  c'est un +, [resp  $q$  un -], les + et - sont uniformément distribués sur  $[0, 1/2]$ , en normalisant nous prendrons l'intervalle  $[0, 1]$ . A  $t=0$  le modèle se décrit comme une répartition de + sur  $[0, 1]$ , i.e. une mesure  $N_0$  à valeurs entières portée par des points. A  $t=1$  un nouveau point de signe  $X_1$  est en  $L_1$  où  $L_1$  est une variable uniformément distribuée sur  $[0, 1]$  et  $X_1$  est telle que  $P[X_1=+] = p$ . Si  $X_1 = +$  la répartition compte un nouveau point en  $L_1$  sinon  $X_1 = -$  et ce - détruit le 1er + à sa droite (s'il y en a sinon le - disparaît). Ce mouvement se traduit donc par l'équation

$$N_1 = N_0 + 1_{\{X_1=+\}} \delta_{L_1} - 1_{\{X_1=-, N_0[L_1, 1] \neq 0\}} \delta_{t_1(L_1, N_0)}$$

avec

- $\delta_a$  : masse de dirac en a
- $N_0[a,b]$  : nombre de + entre a et b
- $t_1(x, N_0) = \inf\{y/N_0 \mid x, y\} \neq 0\}$  en convenant  $\inf\{\emptyset\} = 1$ .

Si  $(L_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont des suites de variables aléatoires i.i.d. indépendantes,  $L_1$  uniformément distribuée sur  $[0,1]$  et  $X_0$  de loi  $p\delta_+ + q\delta_-$ . En utilisant (\*) on obtient une suite de mesures ponctuelles  $(N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  représentant la répartition des + à  $t=n$ . Nous nous intéressons dans la suite au comportement asymptotique des  $N_n$ .

Toutes les variables aléatoires seront définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, A, P)$ ,  $\theta$  sera la translation de  $\Omega \rightarrow \Omega$  telle que  $(L_n, X_n)_{n \in \mathbb{Z}}(\theta(\omega)) = (L_{n+1}, X_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}(\omega)$ . Nous supposons que  $\theta$  est ergodique, ce qui est loisible en prenant par exemple pour  $(\Omega, A, P)$  l'espace naturel de la suite  $(L_n, X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Enfin  $E(\cdot)$  désignera l'espérance relativement à la probabilité  $P$ .

## II - Existence d'un état asymptotique

Si  $M$  et  $N$  sont des mesures ponctuelles sur  $[0,1]$  nous poserons, pour  $\omega \in \Omega$

$$T(N) = N + \mathbb{1}_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1} - \mathbb{1}_{\{X_1 = -, N[L_1, 1] \neq 0\}} \delta_{t_1(L_1, N)}$$

et  $N \ll M$  si pour tout  $a, b \in [0,1]$   $N[a,b] \leq M[a,b]$ .

### Lemme 1 (Propriété de monotonie du mouvement)

Si  $M$  et  $N$  sont deux mesures ponctuelles sur  $[0,1]$  telles que  $M \ll N$  alors  $T(M) \ll T(N)$

□ Si  $X_1 = +$ , c'est clair. Sinon  $X_1 = -$ , alors comme  $M \ll N$ ,  $t_1(L_1, M)$  est un point de  $N$  et  $L_1 \leq t_1(L_1, N) \leq t_1(L_1, M)$ . Ainsi quand  $t_1(L_1, N)$  et  $t_1(L_1, M)$  disparaissent respectivement des mesures  $M$  et  $N$  la relation  $\ll$  est conservée.

□



Définissons la suite de mesures ponctuelles aléatoires sur  $[0,1]$  par

$$N_0 \equiv 0 \text{ et } N_{n+1}(\theta(\omega)) = N_n(\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1}^{-1} \{X_1 = -, N_n[L_1, 1] \neq 0\} \delta_{t_1(L_1, N_n)}.$$

Comme  $N_1 \gg N_0 \equiv 0$ , par récurrence avec le lemme 1, on obtient  $N_n \ll N_{n+1}$ . La suite  $(N_n)_n$  est croissante pour la relation  $\ll$ .

Définissons  $N = \lim_n N_n$  par  $N[a, b] = \lim_n N_n[a, b]$  et  $t_D^n = \text{Sup}\{s/N_n[s, 1] \neq 0\}$  avec  $\text{sup}\{\emptyset\} = 0$ . La suite  $N_n$  étant croissante, pour  $x \in [0, 1]$  la suite  $(t_D^n)$  [resp  $(t_1(x, N_n))_n$ ] est croissante, [resp. décroissante].

Soit  $t_D = \lim_n t_D^n$  et  $t_1(x) = \lim_n t_1(x, N_n)$ . D'après l'égalité (\*)

$$(*) N_{n+1}(\theta(\omega)) = N_n(\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1}^{-1} \{X_1 = -, L_1 < t_D^n\} \delta_{t_1(L_1, N_n)}$$

en laissant  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$(**) N(\theta(\omega)) = N(\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1}^{-1} \{X_1 = -, L_1 < t_D\} \delta_{t_1(L_1)}$$

Remarque : La mesure  $N$  peut être éventuellement infinie sur certains intervalles de  $[0, 1]$ .

### III - Cas $p < q, p \neq 0$

#### Proposition 2

La mesure aléatoire  $N$  est P.p.s. ponctuelle de Radon sur  $]0, 1]$ , i.e.

$$\underline{\lim_n N_n[a, b] \in \mathbb{N} \text{ P.p.s. pour } 0 < a \leq b \leq 1.}$$

□ Soit  $a \in ]0, 1]$ , la propriété de croissance de  $N_n$  et la relation

$$N_{n+1}[a, 1](\theta(\omega)) = N_n[a, 1](\omega) + 1_{\{X_1 = +, L_1 \geq a\}}^{-1} \{X_1 = -, t_1(L_1, N_n) \geq a\}$$

nous assurent que l'ensemble  $A_a = \{\omega / \lim_n N_n[a, 1] = +\infty\}$  est invariant par la translation  $\theta$ . Par ergodicité de  $\theta$  on en déduit donc que  $P(A_a) = 0$  ou 1. Posons  $a_0 = \text{Sup}\{a / P(A_a) = 1\}$ .

Alors  $N[a, 1] = \lim_n N_n[a, 1] < +\infty$  P.p.s. pour  $a > a_0$  et  $N[a, 1] = +\infty$  P.p.s.  $a_0$  est donc P.p.s. un point d'accumulation de  $N$  si  $a_0 > 0$ .

$$N_{n+1}[0, a](\theta(\omega)) - N_n[0, a] = 1_{\{X_1 = +, L_1 \leq a\}}^{-1} 1_{\{X_1 = -, t_1(L_1, N_n) \leq a\}}$$

en intégrant, par invariance de  $\theta$  pour  $P$  et par croissance de  $N_n$

$$0 \leq E[N_{n+1}[0, a_0] - N_n[0, a_0]] = pa_0 - q P[t_1(L_1, N_n) \leq a_0]$$

Ainsi

$$pa_0 \geq q P[t_1(L_1, N_n) \leq a_0, L_1 < a_0]$$

Comme  $a_0$  est un point d'accumulation de  $N$  P.p.s., pour  $x < a_0$ ,  $t_1(x, N_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t_1(x, N) \leq a_0$ , on obtient donc

$$pa_0 \geq qa_0$$

ainsi  $a_0 = 0$ ,  $N$  est une mesure de Radon sur  $]0, 1]$   $\square$

Remarque : La proposition précédente s'étend au cas où la variable  $L_1$  est quelconque, seule l'indépendance de  $X_1$  et  $L_1$  est importante.

Proposition 3 (unicité de l'état stationnaire)

a) Si  $t_D(x) = \text{Sup}\{s < x / N[s, x] \neq 0\}$  pour  $x > 0$  ( $t_D(x)$  est le dernier point de  $N$  avant  $x$  alors  $E[t_D(x)] = \frac{px}{q}$

b)  $N$  est l'unique mesure ponctuelle aléatoire à valeurs entières de Radon sur  $]0, 1]$  vérifiant

$$(**) \quad N(\theta(\omega)) = N(\omega) + 1_{\{X = +\}} \delta_L^{-1} 1_{\{X = -, N[L, 1] \neq 0\}} \delta_{t_1(L, N)}$$

$\square$  a) La relation (\*\*) pour  $0 < y < x \leq 1$  nous donne

$$N[y, x](\theta(\omega)) - N[y, x](\omega) = 1_{\{X_1 = +, L_1 \in [y, x]\}}^{-1} 1_{\{X = -, t_D(y) \leq L_1 \leq t_D(x)\}}$$

en intégrant

$$0 = p(x-y) - qP[t_D(y) \leq L_1 \leq t_D(x)]$$

faisant  $y \rightarrow 0$  on obtient  $E[t_D(x)] = \frac{px}{q}$

b) Soit  $M$  une mesure ponctuelle de Radon sur  $]0, 1]$  vérifiant (\*\*), comme  $0 \ll M$ , par monotonie de  $T$ ,  $N_1 \ll M$ . Par récurrence  $N_n \ll M$  ainsi  $N \ll M$ , de cette relation nous déduisons pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $t_D(x) \leq t_D(x, M)$  or d'après a) (puisque seule la relation (\*\*) a été utilisée pour montrer a))  $E[t_D(x)] = \frac{px}{q} = E[t_D(x, M)]$ . Ainsi P.p.s.  $t_D(x) = t_D(x, M)$  pour tout  $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Donc P.p.s.  $N = M$ .  $\square$

Comportement de N en 0

La proposition suivante utilise une caractéristique importante de ce modèle : le mouvement des + de  $[0,x]$  se fait sans tenir compte des + de  $]x,1]$ .

Proposition 4 (Propriété d'homogénéité)

Si  $x \in ]0,1]$ ,  $(N[xy,x])_{y \in [0,1]}$  a même loi que  $(N[y,1])_{y \in [0,1]}$

□ Considérons le même modèle mais avec la suite  $(x_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , notons  $\hat{N}$  la mesure ponctuelle sur  $]0,x]$  associée à cette suite, la multiplication par  $x$  n'affectant pas l'ordre des points, pour  $y \in ]0,1]$   $\hat{N}[xy,x] = N[y,1]$ . D'autre part la mesure ponctuelle  $N$  restreinte à  $[0,x]$  vérifie l'équation (\*\*) pour la suite  $(L_n^{-1} \{L_n \leq x\}, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on en déduit d'après l'unicité de la solution de (\*\*) (proposition 3)

que  $N$ , restreint à  $[0,x]$  a même loi que  $\hat{N}$  ainsi

$$(N[xy,x])_{y \in [0,1]} \stackrel{\text{loi}}{=} (N[y,1])_{y \in [0,1]} \quad \square$$

La proposition 4 va nous permettre de montrer le corollaire suivant, un peu surprenant : malgré l'inégalité  $p[X_1=+] < p[X_1=-]$  une infinité de + s'accumulent en 0 :

Corollaire 5

a) 0 est un point d'accumulation de N

b) Si  $(t_n)_{n \geq 1}$  sont les points de N numérotés dans l'ordre décroissant,  $\bar{N} = \sum_{n \geq 1} \frac{\delta}{\log(1/t_n)}$  est un processus ponctuel stationnaire sur  $\mathbb{R}_+$ , i.e. toute translation  $\tau_x \bar{N}$  avec  $x \geq 0$  de  $\bar{N}$  a même loi que  $\bar{N}$ .

□ a) D'après la démonstration de la proposition 2, on a  $P[N[0,1]=+\infty] = 0$  ou 1. Si  $N[0,1] < +\infty$  P.p.s., d'après la proposition 4 pour  $y \in ]0,1[$ ,  $N[y^{n+1}, y^n]$  a même loi que  $N[y,1]$ . Comme  $N[0,1] < +\infty$ ,  $N[y^{n+1}, y^n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  P.p.s., donc  $N[y,1] = 0$  pour tout  $y \in ]0,1[$  ce qui est impossible puisque  $p > 0$ , on en déduit donc  $N[0,1] = +\infty$  P.p.s., 0 est un point d'accumulation de N.

b) La stationnarité de  $\bar{N}$  découle immédiatement de la proposition 4 : le translaté de  $\log(1/x)$  de  $\bar{N}$  :  $\tau_{\log(1/x)} \bar{N}$  a même loi que  $\bar{N}$  pour  $x \in [0,1]$ ,  $\bar{N}$  est un processus ponctuel stationnaire sur  $\mathbb{R}_+$ . □

Remarque Un calcul fastidieux en considérant le 1er point de  $\bar{N}$  nous montrerait que  $\bar{N}$  ne saurait être un processus de Poisson.

Proposition 6 (Un taux de convergence de  $E[N_n[0,1]]$  vers  $+\infty$ )

$$E[N_n[0,1]] \geq \frac{p}{q} \log(n) + p/q \left( \gamma - 1 - \frac{[\log(1+p) - p]}{p} \right) + \varepsilon(n)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler et  $\lim_n \varepsilon(n) = 0$

□ Si  $k < n$ ,  $X_k = +$ , ce + figurera à  $t=n$  dans la répartition de + si tous les - qui arrivent après  $t=1$  sont à un point d'abscisse  $> L_k$ . Ainsi

$$N_n[0,1] \geq \sum_{k=0}^n 1_{\{X_k = +, L_k < \text{Inf}\{L_i / X_i = -, k < i \leq n\}\}}$$

$$u_n = E[N_n[0,1]] \geq p \sum_{k=0}^n P[L_k < \text{Inf}\{L_i\}_{k < i \leq n, X_i = -}] = p \sum_{k=0}^n \int_0^1 dx P[x < \text{Inf}\{L_i\}_{k < i \leq n, X_i = -}]$$

$$u_n \geq p \sum_{k=0}^n \int_0^1 P[\text{Inf}\{L_i\}_{0 < i \leq k, X_i = -} \geq x] dx = p \sum_{k=1}^n \int_0^1 (p+q(1-x))^k dx. \text{ Donc}$$

$$u_n \geq \sum_{k=1}^n p/q \frac{1-p^k}{k+1} = p/q (H_n - 1) - p/q \sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k+1}$$

où  $H_n$  est la série harmonique, un résultat classique sur celle-ci nous donne la relation voulue. □

Proposition 7

$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[N_n[a,b]] = E[N[a,b]] = \alpha \log(b/a)$  pour  $0 < a < b \leq 1$  où  $\alpha$  est une constante telle

$$\text{que } \frac{p}{q-p} \leq \alpha < +\infty.$$

□ D'après le corollaire 5.b),  $\bar{N}$  est une mesure ponctuelle stationnaire en particulier  $E[\bar{N}[x,y]] = \alpha(y-x)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha$  est l'intensité du processus ponctuel stationnaire  $\bar{N}$ , on en déduit par définition de  $\bar{N}$ ,  $E[N[a,b]] = \alpha \log(b/a)$ .

$$\alpha \geq \frac{p}{1-2p}$$

Considérons le même mouvement sur le tore  $T_1$  (que nous identifierons à  $[0,1]$ ) : les + et - arrivent uniformément sur  $T_1$ , un - détruit le 1er + à sa droite (sur le tore), s'il y a au moins un + sur  $T_1$ , de la même façon que précédemment il existe un unique processus  $N^T$  ponctuel stationnaire sur  $T_1$  tel que

$$N^T(\theta(\omega)) = N^T(\omega) + 1_{\{X_1=+\}} \delta_{L_1}^{-1} \{X_1=-, N^T[0,1] \neq 0\} \delta_{t_1(L_1, N^T)}$$

en particulier

$$N^T[0,1](\theta(\omega)) = (N^T[0,1](\omega) + 1_{\{X_1=+\}}^{-1} \{X_1=-\})^+ \text{ (avec } a^+ = \text{Max}\{a, 0\})$$

En identifiant la loi des deux membres de l'expression précédente, on en déduit que  $N^T[0,1]$  suit une loi géométrique de paramètre  $p/q$ , on en déduit que  $N^T$  est d'intensité  $E[N^T[0,1]] = \frac{p}{1-2p}$ .

Par récurrence, il est clair que  $N_n^T \ll N_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ainsi  $N^T \ll N$ , en particulier  $N^T[x,1] \leq N[x,1]$ , en intégrant  $E[N^T[x,1]] \leq \alpha \log(1/x)$ , soit  $\alpha \geq \frac{1-x}{\log(1/x)} \frac{p}{1-2p}$ . Faisant  $x \rightarrow 1$  on obtient  $\alpha \geq \frac{p}{1-2p}$ .

Notons  $\tau_x$  la durée de vie d'un + résidant en  $x$ , i.e.

$$\tau_x = \inf \{k > 0 / X_k = -, t_1(L_k, N\theta^k) \geq x, L_k \leq x\}$$

Corollaire 8

$$E(\tau_x) = \frac{\alpha}{px} - 1$$

□ Si  $\phi_n(x, \omega)$  désigne le nombre de + présents à  $t=0$  et à  $t=n$  dans l'intervalle  $[x,1]$ , il est clair que  $\phi_n(x, \omega) \rightarrow 0$  P.p.s. et  $\phi_n(x, \omega) \leq N[x,1](\omega)$

$$N[x,1] \circ \theta^n = \phi_n(x, \omega) + \sum_1^n 1_{\{X_k=+, \tau_{L_k} \circ \theta^k \geq n-k, L_k \geq x\}}$$

en intégrant

$$-\alpha \log(x) = E[\phi_n(x, \omega)] + \sum_1^n p \int_x^1 P[\tau_u \geq n-k] du$$

faisant  $n \rightarrow +\infty$ , par convergence dominée on obtient

$$-\alpha \log(x) = p \int_x^1 (1 + E(\tau_u)) du$$

et donc  $E[\tau_x] = \frac{\alpha}{px} - 1$ . □

IV - Cas  $p \geq q$

Dans ce qui suit nous supposons  $\Omega = ([0,1] \times [0,1])^{\mathbb{Z}}$  et  $P$  est la mesure de Lebesgue produit. Pour  $\omega = (\ell_n, v_n)_n \in \Omega$ , nous poserons  $L_1(\omega) = \ell_1$ ,  $v_1(\omega) = v_1$  et  $\theta(\omega) = (\ell_{n+1}, v_{n+1})$ .

De cette façon pour  $p \in [0,1]$ ,  $(1_{\{v_k(\omega) \leq p\}})_k$  est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Définissons la suite  $(N_n^p)$  de mesures ponctuelles aléatoires par

- $N_0^p \equiv 0$
- $N_{n+1}^p(\omega) = N_n^p(\omega) + 1_{\{v_1 \leq p\}} \delta_{L_1}^{-1} 1_{\{v_1 > p, N_n^p[L_1, 1] \neq 0\}} \delta_{t_1}(L_1, N_n^p)$

Il est clair que pour  $p \in [0,1]$  fixé,  $(N_n^p)$  a même loi que  $(N_n)$  construit en II. L'avantage de considérer les  $(N_{n,p}^p)$  définis sur le même espace de probabilité, réside dans le lemme suivant :

Lemme 9

Si  $0 \leq p \leq p' \leq 1$ ,  $N_n^p \ll N_n^{p'}$

□ Si  $T_p$  est l'opérateur sur les mesures ponctuelles défini par

$$T_p(N) = N + 1_{\{v_1 \leq p\}} \delta_{L_1}^{-1} 1_{\{v_1 > p, N[L, 1] \neq 0\}} \delta_{t_1}(L_1, N)$$

le lemme 9 découle de la relation  $T_p(N) \ll T_{p'}(N)$ . □

La proposition suivante est intuitive : pour  $p \geq q$  les + remplissent tous les intervalles de  $[0,1]$  :

Proposition 10

Si  $p \geq q$ ,  $0 \leq a < b \leq 1$  alors  $\lim_n \frac{N_n^p[a,b]}{N_n^q[a,b]} = +\infty$  P.p.s.

□ Si  $p' < 1/2$ , d'après le lemme 8,  $N_n^{p'}[a,b] \leq N_n^p[a,b]$ , ainsi  $N_n^{p'}[a,b] \leq \lim_n \frac{N_n^p[a,b]}{N_n^{p'+1/2}[a,b]}$ . Il suffit de montrer  $\lim_n \frac{N_n^p[a,b]}{N_n^{p'+1/2}[a,b]} = +\infty$ .

Notons  $t_D^{p'}(x) = t_D(x, N^{p'})$ , comme  $p \rightarrow N^p$  est croissante, il en va de même pour  $p \rightarrow t_D^p(x)$ . D'après la proposition 3,  $E[t_D^{p'}(x)] = \frac{p'}{1-p'}$  x faisant  $p' \rightarrow 1/2$  donc  $E[t_D^{1/2}(x)] = x$ , comme  $t_D^{1/2} \leq x$  on en déduit que P.p.s. pour  $x \in ]0,1[ \in \mathbb{Q}$ ,  $t_D^{1/2}(x) = x$ , soit  $\lim_n \frac{N_n^p[a,b]}{N_n^{p'+1/2}[a,b]} = +\infty$  P.p.s. □

Nous terminons ce paragraphe par une loi des grands nombres : les + remplissent uniformément l'intervalle [0,1] avec l'intensité p-q :

Proposition 11 (Loi des grands nombres)

Si  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue à droite bornée

$$\frac{1}{n} N_n^p(f) = \frac{1}{n} \sum_{x, N_n^p\{x\} \neq 0} f(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} (p-q) \int_0^1 f(u) du$$

en particulier  $\frac{1}{n} N_n^p[a,b] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} (p-q)(b-a)$ .

□ En itérant l'équation (\*) de II on a

$$N_n^p(f) = \sum_{k=0}^n 1_{\{v_1, \theta^{-k} \leq p\}} f(L_1 \theta^{-k})$$

$$- \sum_{k=0}^n 1_{\{v_1, \theta^{-k} > p, L_1 \theta^{-k} < t_D(1, N_k^p \theta^{-k})\}} f(t_1(L_1 \theta^{-k}, N_k^p \theta^{-k}))$$

La loi classique des grands nombres nous donne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n 1_{\{v_1, \theta^{-k} \leq p\}} f(L_1 \theta^{-k}) - 1_{\{v_1, \theta^{-k} > p\}} f(L_1 \theta^{-k}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} (p-q) \int_0^1 f(u) du$$

Il suffit de montrer que

$$\Delta_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_0^n f(L_1 \theta^{-k}) - 1_{\{L_1 \theta^{-k} < t_D(1, N_k^p \theta^{-k})\}} f(t_1(L_1 \theta^{-k}, N_k^p \theta^{-k})) \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} 0$$

en intégrant, par indépendance de  $L_1 \theta^{-k}$  et  $N_k^p$ ,

$$E[|\Delta_n|] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n E \left[ \int_0^1 |f(x) - 1_{\{x < t_D(1, N_k^p \theta^{-k})\}} f(t_1(x, N_k^p \theta^{-k}))| dx \right]$$

d'après la proposition précédente  $t_D(x, N_k^p) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$  P.p.s., le théorème de convergence dominée et la continuité à droite de  $f$  nous permettent de conclure. □

REFERENCES

- [1] M.R. GAREY, D.S. JOHNSON  
"Computers and intractability : A guide to the theory of NP completeness".  
Freeman, San Fransisco, C.A. 1979.
  
- [2] E. G. COFFMAN, D.S. JOHNSON, M.R. GAREY  
"Approximation Algorithms for bin-packing - an updated Survey".
  
- [3] D.S. JOHNSON, A. DERMERS, J.D. ULLMANS, M.R. GAREY, R.L. GRAHAN  
"Worst-case performance bounds for simple one dimensional packing algorithms".  
S.I.A.M. Journal of Comp. Vol. 3, n° 4, p299-325, 1974.
  
- [4] R. KARP, M. LUBY, A. MARCHETTI-SPACCAMELA  
"A probabilistic analysis of multidimensional bin-packing problems".  
Proc. Symp. on Math. Foundations of Computer Science, 1984.
  
- [5] W. KNODEL  
"A bin-packing algorithm with complexity  $o(n \log(n))$  and performance 1 in the stochastic limit".  
Proc. 10th Symp. on Math. Foundations of Computer Science, 1981.

Imprimé en France

par

**l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique**



