

Stabilite du schema de Glimm Roe pour les systemes de lois de conservation

Yann Brenier

▶ **To cite this version:**

Yann Brenier. Stabilite du schema de Glimm Roe pour les systemes de lois de conservation. [Rapport de recherche] RR-0413, INRIA. 1985. inria-00076143

HAL Id: inria-00076143
https://inria.hal.science/inria-00076143

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA
CENTRE DE ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 413

STABILITÉ DU SCHÉMA DE GLIMM ROE POUR LES SYSTÈMES DE LOIS DE CONSERVATION

Yann BRENIER

Juin 1985

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tel.(3) 954 90 20

STABILITE DU SCHEMA DE GLIMM ROE
POUR LES SYSTEMES DE LOIS DE CONSERVATION

YANN BRENIER

Ce travail a été réalisé pour l'essentiel à l'Université de Californie, Los Angeles, sous contrat NASA NAS1-17070.

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

ABSTRACT

The Glimm Roe scheme for systems of conservation laws is introduced, as well as its large time step version in LeVeque's way.

In the case of strictly hyperbolic systems, the total variation stability of the scheme is established for small initial data under a stability condition much weaker than the usual Courant condition. Existence of weak solutions for strictly hyperbolic systems and small initial data is a consequence of this result.

RESUME

On introduit le schéma de Glimm Roe pour les systèmes de lois de conservation, ainsi que sa généralisation aux grands pas de temps à la façon de LeVeque. On établit la stabilité en variation totale du schéma sous l'hypothèses de stricte hyperbolicité, pour de petites données initiales et sous une condition de stabilité beaucoup plus faible que l'habituelle condition de Courant. L'existence de solutions faibles découle de ce résultat.

KEYWORDS : Conservation laws, Glimm's method.

MOTS CLES : Systèmes de lois de conservation, méthode de Glimm.

1. INTRODUCTION

Soit un système de lois de conservation :

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1.1}$$

où t est le temps, x la variable unidimensionnelle d'espace, u la variable d'état dans $\mathbb{R}^m$ et f une application régulière de $\mathbb{R}^m$ dans lui même satisfaisant la condition de stricte hyperbolicité suivante : pour tout état u , la matrice jacobienne f'(u) admet m valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_m(u)$. On s'intéresse à l'approximation des solutions faibles de (1.1), c'est-à-dire des fonctions mesurables bornées u(t,x) vérifiant :

$$\iint (u(t,x)\ \phi_t(t,x)+f(u(t,x))\ \phi_x(t,x))dtdx+ \int u_0(0,x)\phi(0,x)dx = 0 \tag{1.2}$$

pour toute fonction test $\phi(t,x)$ à support compact dans $[0,\infty[\times\mathbb{R}$, où la donnée initiale u_0 est supposée mesurable bornée.

Parmi les schémas utilisés pour ce type de problème, l'un des plus fameux est celui de Godounov (voir [6]). Rappelons en les idées essentielles : étant donné un pas de temps θ et une grille en espace de pas h,

a) on approche à chaque pas de temps la solution par une fonction constante par mailles ;

b) en chaque point de discontinuité, on résout le problème de Riemann local;

c) on juxtapose les solutions des problèmes de Riemann locaux; ce qui implique la limitation du pas de temps par la condition de Courant (CFL) ;

d) on projette sur la grille la solution ainsi obtenue, en en calculant dans chaque maille la valeur moyenne.

A partir de ce schéma fondamental, de nombreuses variantes (cf. [9]) que nous appelerons schéma du type Godounov, peuvent être construites en modifiant l'un des points a),b),c),d).

Citons pour le point a) le schéma MUSCL de Van Leer et ses succédanés, obtenus en remplaçant l'approximation constante par morceaux par une approximation polynomiale par morceaux, ce qui donne une plus grande précision.

On peut aussi modifier le point b) en résolvant le problème de Riemann de façon approchée, soit en le linéarisant (schéma de Roe [15]) soit en utilisant la solution multivoque fournie par la méthode des caractéristiques (schéma d'Osher [14]). De telles simplifications sont d'un très grand intérêt pratique.

En jouant sur le point c) LeVeque [10-11] a généralisé le schéma de Godounov de la façon suivante : plutôt que de se contenter de juxtaposer les solutions des problèmes de Riemann locaux, on peut les superposer, comme s'il s'agissait d'un problème linéaire à coefficients constants. Cette technique est très intéressante car elle permet de définir le schéma de Godounov et ses variantes pour des pas de temps arbitraires en ignorant la condition CFL et, en plus, elle réduit considérablement la diffusion numérique. Néammoins on note une perte de stablité et de précision lorsque les pas de temps deviennent trop grands.

Enfin pour le point d), citons le très important schéma de Glimm [5], pour lequel la projection sur la grille s'effectue, non pas en calculant la valeur moyenne sur chaque maille, mais en choisissant la valeur en un point choisi au hasard dans la maille. Cette idée a non seulement un intéret pratique (elle permet de pratiquement éliminer toute diffusion numérique, cf. [3,4]) mais un considérable intéret théorique, puisqu'elle a permis à Glimm d'obtenir l'un des très rares résultats d'existence pour les systèmes de lois de conservation, en montrant la stablité en variation totale du schéma, lorsque la donnée initiale u_0 est assez proche d'un état constant, et sa consistance avec la formulation faible (1.2). Ce résultat obtenu sous l'hypothèse de vraie non linéarité (voir [5]) a été prolongé par les travaux de Liu [13] et ceux de Goodman [7] et Schatzman [16-17].

Dans cet article, nous combinons les idées de Glimm, LeVeque et Roe, pour définir (sections 2,3,4) ce que nous appelons le schéma de Glimm Roe à grands pas de temps, nous prouvons sa stablité en variation totale lorsque la donnée initiale est assez proche d'un état constant (sections 5,6,7).

Ces résultats sont obtenus sous la seule hypothèse de stricte hyperbolicité et pour une plage de pas de temps sensiblement plus large que celle autorisée par la condition CFL. Ainsi le résultat présente un double intérêt :
i) il justifie la technique de LeVeque dans le cas des systèmes
ii) il conduit à un résultat d'existence de solutions faibles pour les systèmes strictement hyperboliques lorsque les données initiales sont proches d'états constants. Sa faiblesse est de ne pas prendre en compte les conditions d'entropie qu'il faut ajouter à la formulation faible (1.1) pour éliminer les solutions faibles non physiques. En effet, à cause de la technique de Roe, le schéma n'est a priori pas consistant avec les conditions d'entropie usuelles (cf. [8-9]) et les solutions approchées peuvent converger vers des solutions faibles non physiques.

2. LE SCHEMA DE GLIMM

Pour simplifier la description, on suppose que les vitesses de propagation locale $|\lambda_k(u)|$ sont uniformément bornées par une constante finie C, et que les pas de temps et d'espace θ et h sont uniformes. On approche la solution de (1.1-2) au temps $t_n = n\theta$ par une fonction constante sur chaque maille :

$$u_n(x) = U^n_{i+1/2}, \text{ pour } x_i < x < x_{i+1}, \tag{2.1}$$

où

$$x_i = ih, \ i \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Il est alors possible de calculer exactement la solution au temps $t_{n+1} = t_n + \theta$ de (1.1), qu'on notera $\tilde{u}_n$ en partant de u_n comme donnée initiale au temps t_n, pourvu que les pas de temps et d'espace soient liés par la condition CFL :

$$C\theta \leq h/2. \tag{2.3}$$

et qu'on sache calculer pour chaque point de discontinuité x_i et chaque pas

de temps t_n, la solution $z_i^n(t,x)$ du problème de Riemann suivant :

(2.4a) $$z_t + f(z)_x = 0$$

(2.4b) $$z(0,x)=U_{i-1/2}^n \text{ si } x < x_i \; ; \; U_{i+1/2}^n \text{ si } x > x_i .$$

En effet $\mathfrak{a}_n$ est obtenu par simple juxtaposition des $z_i^n(\theta,x)$:

(2.5) $$\mathfrak{a}_n(x) = z_i^n(\theta,x) \quad \text{pour} \quad |x-x_i| < h/2.$$

Comme $\mathfrak{a}_n$ n'a aucune raison d'être constante sur les mailles, il faut la projeter sur la grille pour définir u_{n+1}, l'approximation de la solution au temps t_{n+1}. Pour cela, à chaque pas de temps, on choisit un nombre a_n dans $]0,1[$ de sorte que la suite des (a_n) soit équidistribuée. Ensuite, dans chaque maille, on pose :

(2.6) $$u_{n+1}(x) = U_{i+1/2}^{n+1} = \mathfrak{a}_n(x_i + a_n h) , \quad x_i < x < x_{i+1}, \; i \in Z.$$

ce qui définit le schéma de Glimm. Notons que le schéma de Godounov est défini par les mêmes formules, excepté (2.6), qu'on remplace par :

(2.7) $$u_{n+1}(x) = U_{i+1/2}^{n+1} = \int_0^1 \mathfrak{a}_n(x_i + ah)\,d\,a.$$

3. RESOLUTION DE PROBLEMES DE RIEMANN PAR LA METHODE DE ROE [15,9].

Pour définir le schéma de Glimm (ou de Godounov), il faut pouvoir calculer la solution du problème de Riemann

(3.1a) $$z_t + f(z)_x = 0,$$

(3.1b) $$z(0,x) = \begin{cases} u \text{ si } x < \bar{x} \\ v \text{ si } x > \bar{x} \end{cases}$$

pour tout point $\bar{x}$, et tout couple d'état (u,v). La solution de ce problème est facile à calculer dans de nombreux cas, soit analytiquement soit à l'aide de méthodes itératives simples. Il est néammoins parfois superflu de la calculer et préférable de se ramener à un problème plus simple que (3.1) (voir [8,9,14...]). La technique de Roe [15] est particulièrement intéressante. Elle consiste à remplacer l'équation non linéaire (3.1a) par l'équation linéaire à coefficients constants :

$$z_t + b.z_x = 0, \tag{3.2}$$

où b est une matrice d'ordre m à valeurs propres réelles distinctes, dépendant de u et v, b=b(u,v), vérifiant la propriété :

$$b(u,v)(v-u) = f(v)-f(u),\ b(u,u) = f'(u). \tag{3.3}$$

L'existence d'une telle matrice est discutée dans [9] et assurée lorsque u et v sont assez proches (voir section 5). Pour u,v fixés, on note $\lambda_k(u,v)$ la kième plus grande valeur propre de b(u,v) et $P_k(u,v)$ le projecteur propre correspondant, de sorte que :

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^m, \qquad p = \sum_{k=1}^{m} P_k(u,v).p \tag{3.4a}$$

$$b(u,v).p = \sum_k \lambda_k(u,v)P_k(u,v).p \tag{3.4b}$$

$$P_k(u,v).P_{k'}(u,v) = \delta_{kk'}\ P_k(u,v). \tag{3.4c}$$

La solution de (3.2), (3.1b) est explicitement donnée par :

$$z(t,x) = u + \sum_k P_k(u,v)(v-u)H(x-\bar{x}-t\ \lambda_k(u,v)) \tag{3.5}$$

où H est la fonction d'Heaviside. La structure de cette solution est très simple : la discontinuité initiale v-u est décomposée suivant les vecteurs propres de la matrice b(u,v) en m discontinuités élémentaires $P_k(u,v)(v-u)$ (chacune d'elle sera appelée onde k) se propageant à la vitesse $\lambda_k(u,v)$.

On peut noter par ailleurs que

$$\int_{\mathbb{R}} (z(t,x) - z(0,x))dx = -t \sum_k P_k(u,v)\ (v-u)\ \lambda_k(u,v)$$

et donc grace à (3.3) et (3.4b) :

$$\int_{\mathbb{R}} (z(t,x) - z(0,x))dx = -t(f(v) - f(u)) \tag{3.6}$$

Ainsi, à l'aide de la méthode de Roe, on peut définir le schéma de Glimm Roe, obtenu en remplaçant les solutions des problèmes de Riemann locaux exacts par celles de leurs approximations linéarisées. D'après [9], la propriété de conservation (3.6) est suffisante pour assurer la consistance du schéma avec la formulation faible (1.2). Par contre la consistance avec les conditions d'entropie est perdue a priori.

4. DEFINITION DU SCHEMA DE GLIMM ROE POUR DES PAS DE TEMPS ARBITRAIRES.

Jusqu'à présent on a limité le pas de temps par la condition CFL (2.3). On va maintenant utiliser la technique de superposition de LeVeque [10-11] afin de définir le schéma de Glimm Roe pour des pas de temps arbitraires. Auparavant, il nous faut introduire quelques hypothèse et notations. On suppose que la donnée initiale est constante au voisinage de $x=-\infty$, et pour alléger les notations que cette constante est nulle. Ainsi on peut considérer que pour chaque pas de temps la solution de (1.1) et son approximation u_n sont nulles au voisinage de $x=-\infty$.

Pour chaque point de discontinuité x_i, on définit :

$$U_i^n = (U_{i-1/2}^n, U_{i+1/2}^n) = (u_n(x_i-0), u_n(x_i+0)), \tag{4.1}$$

i.e. la paire constituée des états à gauche et à droite de la discontinuité. On introduit aussi le saut :

$$W_i^n = U_{i+1/2}^n - U_{i-1/2}^n = u_n(x_i+0) - u_n(x_i-0) \in \mathbb{R}^m \tag{4.2}$$

on note que (puisque u_n est nulle au voisinage de $-\infty$)

$$(4.3) \qquad U_i^n = \Big(\sum_{j<i} W_j^n, \sum_{j\le i} W_j^n \Big).$$

Passons maintenant à la résolution des problèmes de Riemann locaux par la méthode de Roe. Suivant (3.5), la solution z_j^n associée au point x_j au temps t_{n+1} est donnée par :

$$(4.4) \qquad z_j^n(\theta,x) = U_{j-1/2}^n + \sum_{k=1}^{m} P_k(U_j^n)\, W_j^n\, H(x - x_j - \theta\lambda_k(U_j^n))$$

Plutôt que de juxtaposer les $z_j^n(\theta,.)$, on les superpose à la manière de LeVeque (cf. [10-11]), ce qui permet de définir $\mathfrak{a}_n$ par :

$$(4.5) \qquad \mathfrak{a}_n(x) = \sum_{k,j} P_k(U_j^n)\, W_j^n\, H(x - x_j - \theta\lambda_k(U_j^n))$$

pour des pas de temps arbitraires. Cette formule équivaut à :

$$(4.6) \qquad \mathfrak{a}_n(x) = \sum_{k,j} W_{jk}^n\, H(x - \mathfrak{x}_{jk}^n)$$

où :

$$(4.6a) \qquad \mathfrak{x}_{jk}^n = x_j + \theta\lambda_k(U_j^n)$$

$$(4.6b) \qquad W_{jk}^n = P_k(U_j^n) W_j^n.$$

Notons que d'après (3.4a) pour chaque j :

$$(4.7) \qquad W_j^n = \sum_k W_{jk}^n$$

et que donc on peut écrire :

$$(4.8) \qquad u_n(x) = \sum_{j,k} W_{jk}^n\, H(x - x_j).$$

Par conséquent, on voit que $\mathfrak{a}_n$ se construit à partir de u_n en déplacant chaque onde élémentaire W_{jk}^n de x_j à $\mathfrak{x}_{jk}^n$. Enfin, pour achever la définition du schéma, il faut projeter $\mathfrak{a}_n$ sur la grille avec la technique de Glimm.

Pour cela, on a besoin de définir $\mathcal{U}_n$ en tout point et pour le faire on posera conventionnellement :

(4.9) $\qquad H(x) = 0 \quad si \quad x \leq 0;\ 1 \quad si \quad x > 0.$

En appliquant (2.6), on trouve donc :

(4.10) $\qquad u_{n+1}(x) = U^{n+1}_{i+1/2} = \mathcal{U}_n(x_i + a_n h), \qquad x_i < x < x_{i+1},$

soit :

(4.11) $\qquad u_{n+1}(x) = \sum_{j,k} W^n_{jk}\, H(x_i + a_n h - \mathfrak{x}^n_{jk}), \qquad x_i < x < x_{i+1}.$

ce qui définit l'approximation au temps t_{n+1}. On peut encore réécrire u_{n+1} sous une autre forme :

Proposition 1

Pour une donnée initiale nulle au voisinage de $-\infty$, le schéma de Glimm Roe à grands pas de temps est défini par :

(4.12) $\qquad u_{n+1}(x) = \sum_{j,k} W^n_{jk}\, H(x - x^n_{jk}),$

où W^n_{jk} est défini par l'intermédiaire de (4.1-2-6b) et x^n_{jk} par :

(4.13) $\qquad x^n_{jk} = hE(h^{-1}(x_j + \theta\lambda_k(U^n_j)) + 1 - a_n) \in hZ$

E désigne ici la partie entière :

(4.14) $\qquad E(x) = \ell \in Z \quad$ si et seulement si $\ell \leq x < \ell+1$

Démonstration.

Par définition (4.13), on a :

$$x^n_{jk} \leq \mathfrak{x}^n_{jk} + (1-a_n)h < x^n_{jk} + h \quad (\text{puisque : } \mathfrak{x}^n_{jk} = x_j + \theta\lambda_k(U^n_j))$$

et donc $-h+x^n_{jk} \leq x^n_{jk} - a_n h < x^n_{jk}$.

Il s'ensuit que $x_i > x^n_{jk} - a_n h$ n'a lieu que si $x_i \geq x^n_{jk}$ (puisque x_i et x^n_{jk} appartiennent tous deux à hZ). Donc, pour tout x tel que $x_i < x < x_{i+1}$, on a $x_i + a_n h - x^n_{jk} > 0$ si et seulement si $x - x^n_{jk} > 0$.

Ainsi on peut réécrire les définitions (4.9-11) comme suit :

$$u_{n+1}(x) = \sum_{j,k} W^n_{jk} H(x - x^n_{jk}), \qquad x_i < < x_{i+1},$$

c'est-à-dire exactement (4.12), ce qui achève la démonstration.

En regardant (4.8) et (4.12), on voit que le schéma est entièrement défini par le mouvement de chaque onde W^n_{jk} (définie par (4.6b)) de x_j à x^n_{jk}, qui sont tous deux des points du maillage. Cette construction est illustrée sur la figure 1. Chaque onde W^n_{jk} se déplace d'abord du point x_j au point $\bar{x}^n_{jk} = x_j + \theta\lambda_k(U^n_j)$, est ensuite translatée jusqu'à $\bar{x}^n_{jk} + (1-a_n)h$ et finalement rejoint le point du maillage x^n_{jk} situé immédiatement à gauche.

Pour la suite il est utile de remarquer les relations suivantes entre U^{n+1}_j, W^{n+1}_j et W^n_j. De (4.12), on tire :

$$W^{n+1}_j = \sum_{i,\ell} \{W^n_{i\ell}; x^n_{i\ell} = x_j\} \tag{4.16}$$

et de (4.3) :

$$U^{n+1}_j = \left(\sum_{i,\ell} \{W^n_{i\ell}; x^n_{i\ell} < x_j\}, \sum_{i,\ell} \{W^n_{i\ell}; x^n_{i\ell} \leq x_j\} \right) \tag{4.17}$$

il est aussi commode d'introduire la notation :

$$U^n_{i\ell} = U^{n+1}_j \quad \text{où } x_j = x^n_{i\ell}, \text{ i.e. } j = h^{-1} x^n_{i\ell} \tag{4.18}$$

et de noter que (d'après (4.3) et (4.7)):

$$U^n_j = \left(\sum_{i,\ell} \{W^n_{i\ell}; x_i < x_j\}, \sum_{i,\ell} \{W^n_{il}; x_i \leq x_j\} \right) \tag{4.19}$$

Ainsi on peut interpréter U^n_j (resp. U^n_{jk}) comme la paire d'états entourant l'onde W^n_{jk} au temps $t = \theta n$ (resp. $(n+1)\theta$). Cette interprétation sera utile pour la suite (section 6).

5. Stablité et convergence du schéma de Glimm Roe.

Dans cette section on va énoncer de manière précise les résultats de stabilité et de convergence qui seront établis dans les sections 6 et 7. On considère donc le système (1.1) et on se place au voisinage d'un état constant, qu'on prendra égal à 0 pour alléger les notations sans perte de généralité. On suppose f régulière (par exemple deux fois continûment différentiable) et on fait l'hypothèse de stricte hyperbolicité au point 0 :

(5.1) $f'(0)$ admet m valeurs propres réelles distinctes.

ceci entraine le résultat préliminaire suivant :

Proposition 2

Il existe une boule B dans $\mathbb{R}^m$, centrée en 0 et de rayon r, telle que, pour tout couple (u,v) d'états dans B, il existe une matrice (dite de Roe) b(u,v) vérifiant les propriétés suivantes :

i) $b(u,v)(v-u) = f(v)-f(u)$ et $b(u,u) = f'(u)$

ii) b(u,v) admet m valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1(u,v)<\ldots<\lambda_m(u,v)$ et m projecteurs propres associés $P_1(u,v),\ldots,P_m(u,v)$.

iii) il existe trois constantes K, K_1 et K_2 telles que : pour tous états u_1,v_1,u_2,v_2 dans B et tout p dans $\mathbb{R}^m$,

$$\sum_{k=1}^{m} \| P_k(u_1,v_1)p - P_k(u_2,v_2)p\| \leq K \| p\| (\| u_1-u_2\| + \| v_1-v_2\|) \tag{5.2}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \| P_k(u_1,v_1)p\| \leq K_1 \| p \| \tag{5.3}$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

$$|\lambda_k(u_1,v_1) - \lambda_k(u_2,v_2)| \leq K_2, \tag{5.4}$$

$$\lambda_k(u_1,v_1) < \lambda_{k+1}(u_2,v_2), \qquad k=1,\ldots,m-1. \tag{5.5}$$

Indiquons rapidement le sens de ces diverses propriétés. (5.2) et (5.3) signifient que les projecteurs $P_k(u,v)$ sont bornés et lipschitziens par rapport à leurs arguments u,v. (5.4) signifie que les différences des

valeurs propres sont uniformément bornées et (5.5) que les valeurs propres sont globalement séparées.

Nous ne démontrons pas ici ces résultats (qu'on peut d'ailleurs prendre comme hypothèses). Disons simplement que pour les déduire à partir de l'hypothèse (5.1), on peut poser :

$$b(u,v) = \int_0^1 f'(u+a.(v-u))da \tag{5.6}$$

et raisonner ensuite par continuité (on sait par exemple que l'ensemble des matrices réelles à valeurs propres réelles distinctes est ouvert).

Grace à la proposition 1, on va établir dans la section 6 le résultat suivant :

THEOREME 1 (stablité du schéma de Glimm Roe)

Soit u_0 une donnée initiale constante par morceaux :

$$u_0(x) = U^0_{i+1/2},\ x_i < x < x_{i+1},\ i \in Z, \tag{5.7}$$

nulle au voisinage de $-\infty$ et constante au voisinage de $+\infty$.
On suppose que le pas de temps est limité par la condition :

$$K_2\ \theta < h, \text{ où } h \text{ est le pas d'espace.} \tag{5.8}$$

Alors, si la variation totale de u_0 :

$$TV(u_0) = \sum_{i \in Z} \| U^0_{i+1/2} - U^0_{i-1/2} \| \tag{5.9}$$

est assez petite, i) on peut définir la solution u_n du schéma de Roe Glimm pour tous les pas de temps n et ii) la variation totale de u_n

$$TV(u_n) = \sum_{i \in Z} \| U^n_{i+1/2} - U^n_{i-1/2} \| \tag{5.10}$$

reste uniformément bornée par rapport à h.

On en déduit (en appliquant le théorème de Harten et Lax [8]) le résultat de convergence :

THEOREME 2

Soit $u(0,.)$ une donnée initiale nulle au voisinage de $-\infty$, constante au voisinage de $+\infty$. Si la variation totale de $u(0,.)$ est assez petite, alors sous l'hypothèse (5.1), le système (1.1) admet une solution faible au sens de (1.2), qu'on peut obtenir à l'aide du schéma de Glimm Roe, en faisant tendre h vers 0.

Remarques.

1) La condition de stabilité (5.8) est beaucoup plus large que l'habituelle condition CFL. Dans le cas linéaire $f(u)=b.u$ (où b est une matrice constante) par exemple, on a $b(u,v)=b$ et la constante K_2 est nulle. Le schéma est alors inconditionnellement stable.

2) La démonstration du théorème 1 sera donnée dans les sections 6 et 7, et celle du théorème 2 sera omise, car il s'agit d'une simple adaptation du théorème de Harten et Lax.

6. CROISSANCE DE LA VARIATION TOTALE DES SOLUTIONS DU SCHEMA DE GLIMM ROE.

Supposons construite au pas de temps n l'approximation u_n et supposons qu'elle prend toutes ses valeurs dans la boule B, centrée en 0 et de rayon r. On définit (avec les notations de la section 4) la variation totale modifiée L_n par :

$$L_n = \sum_{j,k} e^n_{jk} \qquad (j \in Z, k = 1,\ldots,m) \tag{6.1}$$

où :

$$e^n_{jk} = \| W^n_{jk} \| = \| P_k(U^n_j) W^n_j \| \tag{6.2}$$

est, en termes imagés, la "force" de l'onde W^n_{jk}. L_n différe quelque peu de la variation totale donnée par :

$$TV(u_n) = \sum_j \| W^n_j \| \tag{6.3}$$

En fait, on a :

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j,k} \| P_k(U^n_j) W^n_j \| \leq K_1 \sum_j \| W^n_j \| && \text{(d'après (5.3))} \\ &= K_1 TV(u_n) = K_1 \sum_j \| \sum_k P_k(U^n_j) W^n_j \| && \text{(d'après (3.4a))} \\ &\leq K_1 \sum_{j,k} \| P_k(U^n_j) W^n_j \| = K_1 L_n, \end{aligned}$$

et donc :

$$L_n \leq K_1 TV(u_n) \leq K_1 L_n. \tag{6.4}$$

Supposons que L_n est borné par r, rayon de la boule B. Comme les sommes figurant à droite de l'équation (4.17) sont bornées par L_n, elles le sont donc aussi par r et ce fait u_{n+1} prend forcément ses valeurs dans la boule B. On peut donc utiliser les propriétés (5.2...5) dans la suite.

Tâchons maintenant d'estimer L_{n+1} à partir de L_n. On a :

$$L_{n+1} = \sum_{j,k} \| P_k(U_j^{n+1})\ W_j^{n+1} \|$$

et donc par (4.16), à l'aide de l'inégalité du triangle :

$$L_{n+1} \leq \sum_{j,k,i,\ell} \{ \| P_k(U_j^{n+1})\ W_{i\ell}^n \| ;\ x_{i\ell}^n = x_j \} \tag{6.5}$$

Avec la notation (4.18), on peut réécrire (6.5) :

$$L_{n+1} \leq \sum_{k,i,\ell} \| P_k(U_{i\ell}^n)\ W_{i\ell}^n \| \tag{6.6}$$

ce qui suggère d'introduire la variation "intermédiaire" :

$$\tilde{L}_n = \sum_{k,i,\ell} \| P_k(U_i^n)\ W_{i\ell}^n \| \tag{6.7}$$

et de la comparer avec L_n et L_{n+1}. A cause de (5.2), on a :

$$\| L_{n+1} - \tilde{L}_n \| \leq K\ E_n \tag{6.8}$$

où on pose :

$$E_n = \sum_{i,\ell} \| W_{i\ell}^n \|\ \| U_{il}^n - U_i^n \| = \sum_{i\ell} e_{i\ell}^n\ \| U_{i\ell}^n - U_i^n \| \tag{6.9}$$

avec la notation $\| U \| = \| U_1 \| + \| U_2 \|$ pour $U = (U_1, U_2)$.
De (4.17-18-19), on déduit :

$$\|U_{il}^n - U_i^n\| \leq \sum_{jk} \|W_{jk}^n\| \, d_{il jk}^n = \sum_{jk} e_{jk}^n \, d_{il jk}^n \tag{6.10}$$

où :

$$d_{il jk}^n = \begin{cases} 2 \text{ si } x_i < x_j \text{ et } x_{il}^n > x_{jk}^n \\ 2 \text{ si } x_i > x_j \text{ et } x_{il}^n < x_{jk}^n \\ 1 \text{ si } x_i = x_j \text{ et } x_{il}^n \neq x_{jk}^n \\ 1 \text{ si } x_i \neq x_j \text{ et } x_{il}^n = x_{jk}^n \\ 0 \text{ autrement.} \end{cases} \tag{6.11}$$

Donc (par (6.9))

$$E_n \leq \sum_{i,l,j,k} e_{il}^n \, e_{jk}^n \, d_{il jk}^n = D_n \qquad \text{(définition)} \tag{6.12}$$

et (par (6.8)) :

$$\|L_{n+1} - \Sigma_n\| \leq KD_n \tag{6.13}$$

En termes imagés, on appelle D_n "énergie d'interaction", i.e. le produit pondéré par 2 (resp. 1) des "forces" des ondes ayant interagi par croisement (resp. coalescence). Retournons maintenant à Σ_n qui est défini par (6.7). De (4.6b), on tire :

$$\Sigma_n = \sum_{kil} \|P_k(U_i^n) \, P_l(U_i^n) \, W_i^n\|$$

et il découle de (3.4c) qu'en fait :

$$\Sigma_n = \sum_{il} \|P_l(U_i^n) \, W_i^n\| = \sum_{il} e_{il}^n = L_n \tag{6.14}$$

Finalement, en combinant (6.13) et (6.14), on obtient :

Proposition 3

Si u_n est à valeurs dans la boule B et si L_n est bornée par r, alors u_{n+1} prend ses valeurs dans B et on a l'estimation :

(6.15) $$L_{n+1} \leq L_n + KD_n.$$

où D_n est défini par (6.11-12)

7. DECROISSANCE DU POTENTIEL D'INTERACTIONS ET STABILITE DU SCHEMA.

Comme dans le théorème de Glimm, on va compenser la croissance de la variation par la décroissance d'un potentiel d'interactions qu'on définit comme suit :

$$Q_n = \sum_{i\ell jk} e^n_{i\ell}\, e^n_{jk}\, q^n_{i\ell jk} \tag{7.1}$$

où

$$q^n_{i\ell jk} = \chi_{\ell k}(x_i, x_j) = \begin{cases} 2 \text{ si } x_i < x_j \text{ et } \ell > k \\ 2 \text{ si } x_i > x_j \text{ et } \ell < k \\ 1 \text{ si } x_i = x_j \text{ et } \ell \neq k \\ 1 \text{ si } x_i \neq x_j \text{ et } \ell = k \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \tag{7.2}$$

On introduit aussi le potentiel "intermédiaire" :

$$\tilde{Q}_n = \sum_{i\ell jk} e^n_{i\ell}\, e^n_{jk}\, \tilde{q}^n_{i\ell jk} \tag{7.3}$$

où :

$$\tilde{q}^n_{i\ell jk} = \chi_{\ell k}(x^n_{i\ell}, x^n_{jk}) = \begin{cases} 2 \text{ si } x^n_{i\ell} < x^n_{jk} \text{ et } \ell > k \\ 2 \text{ si } x^n_{i\ell} > x^n_{jk} \text{ et } \ell < k \\ 1 \text{ si } x^n_{i\ell} = x^n_{jk} \text{ et } \ell \neq k \\ 1 \text{ si } x^n_{i\ell} \neq x^n_{jk} \text{ et } \ell = k \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \tag{7.4}$$

On peut estimer Q_{n+1} à partir de $\tilde{Q}_n$:

Proposition 4

Dans les conditions de la proposition 3, on a :

$$Q_{n+1} \leq \tilde{Q}_n + 4KK_1 L_n D_n \tag{7.5}$$

Démonstration.

Pour le prouver, on utilise d'abord (7.1) pour écrire Q_{n+1} :

$$Q_{n+1} = \sum_{i\ell jk} \| P_\ell(U_i^{n+1}) W_i^{n+1} \| \| P_k(U_j^{n+1}) W_j^{n+1} \| q_{i\ell jk}^{n+1}$$

ensuite, comme on l'avait fait pour L_{n+1}, on se sert de (4.16) et (4.18) pour obtenir :

$$Q_{n+1} \leq \sum_{\substack{i\ell jk \\ i'\ell'j'k'}} \| P_\ell(U_{i'\ell'}^n) W_{i'\ell'}^n \| \| P_k(U_{j'k'}^n) W_{j'k'}^n \| q_{i\ell jk}^{n+1} \alpha_i^{i'\ell'} \alpha_j^{j'k'}$$

où $$\alpha_i^{i'\ell'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{i'\ell'}^n = x_i \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Notons que d'après (7.2-4)

$$q_{i\ell jk}^{n+1} \alpha_i^{i'\ell'} \alpha_j^{j'k'} = \chi_{\ell k}(x_{i'\ell'}, x_{j'k'}) \alpha_i^{i'\ell'} \alpha_j^{j'k'} \tag{7.6}$$

et donc :

$$Q_{n+1} \leq \sum_{\ell k i'\ell' j'k'} \| P_\ell(U_{i'\ell'}^n) W_{i'\ell'}^n \| \| P_k(U_{j'k'}^n) W_{j'k'}^n \| \chi_{\ell k}(x_{i'\ell'}, x_{j'k'}) \tag{7.7}$$

Par ailleurs on peut réécrire $\tilde{Q}_n$:

$$(7.8) \qquad \tilde{Q}_n = \sum_{\ell k i' \ell' j' k'} \| P_\ell(U^n_{i'}) W^n_{i',\ell'} \| \, \| P_k(U^n_{j'}) W^n_{j',k'} \| \, \chi_{\ell k}(x_{i',\ell'}, x_{j',k'})$$

en utilisant (7.3),(6.2) et (3.4c) et en notant que dans la somme les termes pour lesquels $\ell \neq \ell'$ ou $k \neq k'$ sont nuls. Comme on a le même coefficient $\chi_{\ell k}(x_{i',\ell'}, x_{j',k'})$ dans (7.7) et (7.8) et qu'il est, par définition (7.4), toujours borné par 2, on trouve :

$$(7.9) \qquad |Q_{n+1} - \tilde{Q}_n| \leq 2 \sum_{\ell k i' \ell' j' k'} \{ \| P_\ell(U^n_{i',\ell'}) W^n_{i',\ell'} \| \, \| P_k(U^n_{j',k'}) W^n_{j',k'} \| - \| P_\ell(U^n_{i'}) W^n_{i',\ell'} \| \, \| P_k(U^n_{j'}) W^n_{j',k'} \| \}$$

Par conséquent, de (5.2), on tire :

$$|Q_{n+1} - \tilde{Q}_n| \leq 2K \sum \{ \| U^n_{i',\ell'} - U^n_{i'} \| \cdot \| W^n_{i',\ell'} \| \, \| P_k(U^n_{j',k'}) W^n_{j',k'} \| + \| P_\ell(U^n_{i'}) W^n_{i',\ell'} \| \, \| U^n_{j',k'} - U^n_{j'} \| \, \| W^n_{j',k'} \| \}$$

et par (5.3)

$$(7.10) \qquad |Q_{n+1} - \tilde{Q}_n| \leq 4KK_1 \sum_{i\ell jk} \| U^n_{i\ell} - U^n_i \| \, \| W^n_{i\ell} \| \, \| W^n_{jk} \|$$

(après avoir changé les indices)

$$= 4KK_1 L_n E_n \text{ (par définition (6.1),(6.9))}$$

$$\leq 4KK_1 L_n D_n \text{ (par (6.12))}.$$

Ainsi, on a bien prouvé (7.5) et donc estimé la croissance de Q_{n+1} par rapport à $\tilde{Q}_n$. On va maintenant montré qu'en fait $\tilde{Q}_n$ n'est rien d'autre que $Q_n - D_n$. Plus précisément, on a :

Proposition 5

Dans les conditions de la proposition 3, les configurations suivantes sont impossibles :

$$x_i < x_j \ , \ x^n_{i\ell} \geq x^n_{jk} \quad \text{et} \quad \ell < k$$

$$x_i < x_j \ , \ x^n_{i\ell} > x^n_{jk} \quad \text{et} \quad \ell = k \tag{7.11}$$

$$x_i = x_j \ , \ x^n_{i\ell} < x^n_{jk} \quad \text{et} \quad \ell \geq k$$

De ce fait on a (avec les définitions (6.11),(7.2),(7.4)):

$$q^n_{i\ell jk} = q^n_{i\ell jk} - d^n_{i\ell jk} \tag{7.12}$$

et par conséquent :

$$\tilde{Q}_n = Q_n - D_n . \tag{7.13}$$

Démonstration.

Dire que (7.11) est impossible revient à dire que i) une onde de la famille ℓ ne peut dépasser une onde de la famille k si $\ell<k$ ii) deux ondes de même famille ne peuvent de croiser. Le premier point est garanti par la propriété de séparation globale des ondes (5.5), le second par (5.4) et la limitation du pas de temps (5.8), qui interdit précisément le croisement d'ondes de même famille dans la durée d'un pas de temps. On peut voir sur la figure 2 quels types d'interaction sont permis ou interdits. Ainsi (7.11) est bien impossible.

Passons à la démonstration de (7.12), en considérant toutes les configurations possibles, en tenant compte de ce que (7.11) est impossible et en utilisant les définitions (6.11), (7.2) et (7.4).

Pour alléger les notations on pose $A = q^n_{i\ell jk} - q^n_{i\ell jk} + d^n_{i\ell jk}$

cas 1) $x_i < x_j$ et $x^n_{i\ell} < x^n_{jk}$

$$A = q^n_{i\ell jk} - q^n_{i\ell jk} + d^n_{i\ell jk} = \begin{cases} 0 & -0 & +0 \\ 1 & -1 & +0 \\ 2 & -2 & +0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell<k \\ 0 & \text{si } \ell=k \\ 0 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

cas 2) $x_i < x_j$ et $x^n_{i\ell} = x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 1 & -0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ 1 & -2 & +1 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si } \ell<k \\ 0 & \text{si } \ell=k \\ 0 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

le cas $\ell<k$, contenu dans (7.11) est impossible.

cas 3) $x_i < x_j$ et $x^n_{i\ell} > x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 2 & -0 & +2 \\ 1 & -1 & +2 \\ 0 & -2 & +2 \end{cases} = \begin{cases} 4 & \text{si } \ell<k \\ 2 & \text{si } \ell=k \\ 0 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

les cas $\ell<k$ et $\ell=k$ font partie de (7.11) et sont interdits.

cas 4) $x_i = x_j$ et $x^n_{i\ell} < x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 0 & -1 & +1 \\ 1 & -0 & +1 \\ 2 & -1 & +1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell<k \\ 2 & \text{si } \ell=k \\ 2 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

les cas $\ell=k$ et $\ell>k$ font partie de (7.11) et sont interdits.

cas 5) $x_i = x_j$ et $x^n_{i\ell} = x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 1 & -1 & +0 \\ 0 & -0 & +0 \\ 1 & -1 & +0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell<k \\ 0 & \text{si } \ell=k \\ 0 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

cas 6) $x_i = x_j$ et $x^n_{i\ell} > x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 2 & -1 & +1 \\ 1 & -0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si } \ell<k \\ 2 & \text{si } \ell=k \\ 0 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

les cas $\ell<k$ et $\ell=k$ font partie de (7.11) et sont interdits.

cas 7) $x_i > x_j$ et $x^n_{i\ell} < x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 0 & -2 & +2 \\ 1 & -1 & +2 \\ 2 & -0 & +2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell<k \\ 2 & \text{si } \ell=k \\ 4 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

les cas $\ell>k$ et $\ell=k$ font partie de (7.11) et sont interdits.

cas 8) $x_i > x_j$ et $x^n_{i\ell} = x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 1 & -2 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ 1 & -0 & +1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell<k \\ 0 & \text{si } \ell=k \\ 2 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

le cas $\ell>k$ fait partie de (7.11) et est interdit.

cas 9) $x_i > x_j$ et $x^n_{i\ell} > x^n_{jk}$

$$A = \begin{cases} 2 & -2 & +0 \\ 1 & -1 & +0 \\ 0 & -0 & +0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell<k \\ 0 & \text{si } \ell=k \\ 0 & \text{si } \ell>k \end{cases}$$

Ainsi A vaut 0 dans tous les cas admissibles, ce qui prouve (7.12) et par conséquent (7.13). La démonstration de la proposition 5 est ainsi achevée. En rassemblant les résultats des propositions 3,4,5 on voit que pour tout coefficient $\alpha>0$, on a l'estimation :

$$L_{n+1} + \alpha Q_{n+1} \leq L_n + KD_n + \alpha\tilde{Q}_n + 4\alpha KK_1 L_n D_n$$

(d'après (6.15) et (7.5))

$$= L_n + KD_n + \alpha Q_n - \alpha D_n + 4\alpha KK_1 L_n D_n \quad (\text{d'après (7.13)})$$

$$= L_n + \alpha Q_n - \alpha\left(1 - \frac{K}{\alpha} - 4KK_1 L_n\right) D_n$$

et en particulier pour $\alpha = 2K$:

(7.14) $$L_{n+1} + 2KQ_{n+1} \leq L_n + 2KQ_n - 2K(1/2 - 4KK_1 L_n) D_n$$

Supposons que $L_n + 2KQ_n$ soit borné par $(8KK_1)^{-1}$, alors on déduit de (7.14) que :

$$L_{n+1} + 2KQ_{n+1} \leq L_n + 2KQ_n$$

En supposant de plus que $L_n + 2KQ_n$ est borné par r, on a finalement :

Proposition 6

Si $L_n + 2KQ_n$ est majoré par $\min(r,(8KK_1)^{-1})$, alors u_{n+1} prend ses valeurs dans B et on a l'estimation :

$$(7.15) \qquad L_{n+1} \leq L_{n+1} + 2KQ_{n+1} \leq L_n + 2KQ_n \leq \min(r,(8KK_1)^{-1})$$

Ceci montre la stabilité du schéma en variation totale. Il est maintenant possible de prouver le théorème 1. On note que d'après les définitions (7.1-2), on a, pour n=0, $Q_0 \leq 2L_0^2$ et d'après (6.4), $L_0 \leq K_1 V_0$, où V_0 est la variation totale $TV(u_0)$ de la donnée initiale. Il suffit donc que :

$$(7.16) \qquad K_1 V_0 + 4KK_1^2 V_0^2 \leq \min(r,(8KK_1)^{-1})$$

pour que le schéma soit bien défini et stable en variation totale, ce qui achève la démonstration.

REFERENCES

[1] Y. Brenier, Averaged Multivalued Solutions for scalar conservation laws, SIAM J. on Numer. Anal., in press.

[2] Y. Brenier, Averaged Multivalued Solutions and time discretization for conservation laws, to appear in the proceedings of the SIAM-AMS conference on large scale computations, San Diego, La Jolla, July 1983.

[3] A. Chorin, Random choice solution of hyperbolic systems, J. Comput. Phys. 22 (1976) 517.

[4] P. Collela, Glimm's method for gas dynamics, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 3 (1982) 76.

[5] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 697.

[6] S. K. Godunov, Finite Difference Methods for numerical computations of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics, Mat. Sb. 47 (1959) 271.

[7] J. Goodman, Initial Boundary Value Problems for hyperbolic systems of conservation laws, Ph.D dissertation, University of California, Berekeley 1982.

[8] A. Harten, P.D. Lax, A Random Choice finite difference scheme for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Numer. Anal. 18 (1981) 289.

[9] A. Harten, P.D. Lax, B. Van Leer, On Upstream Differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, SIAM Review, 25 (1983) 35.

[10] R. J. LeVeque, Convergence of a large time step generalization of Godunov's method for conservation laws, to appear in Comm. Pure Appl. Math .

[11] R. J. LeVeque, A large time step generalization of Godunov's method for systems of conservation laws, to appear.

[12] T. P. Liu, The deterministic version of the Glimm scheme, Comm. Math. Phys. 57(1977) 135.

[13] T. P. Liu, Admissible Solutions of hyperbolic conservation laws, Memoirs of the AMS, 240 (1981).

[14] S. Osher, Riemann solvers, the Entropy Condition, and Difference Approximation, SIAM Journal on Numer. Anal., 21 (1984) 217.

[15] P. L. Roe, Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, J. Comput. Phys., 43 (1981) 357.

[16] M. Schatzman, Forctionnelle de Glimm Continue, C. R. Adad. Sci. Paris, 291 (1980) A519.

[17] M. Schatzman, Continuous Glimm's functional, to appear.

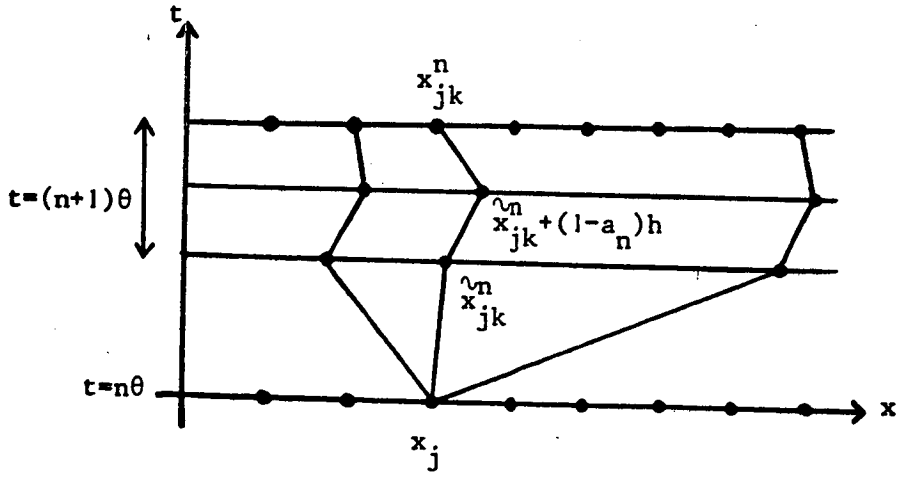


Figure 1 : déplacements des ondes élémentaires.

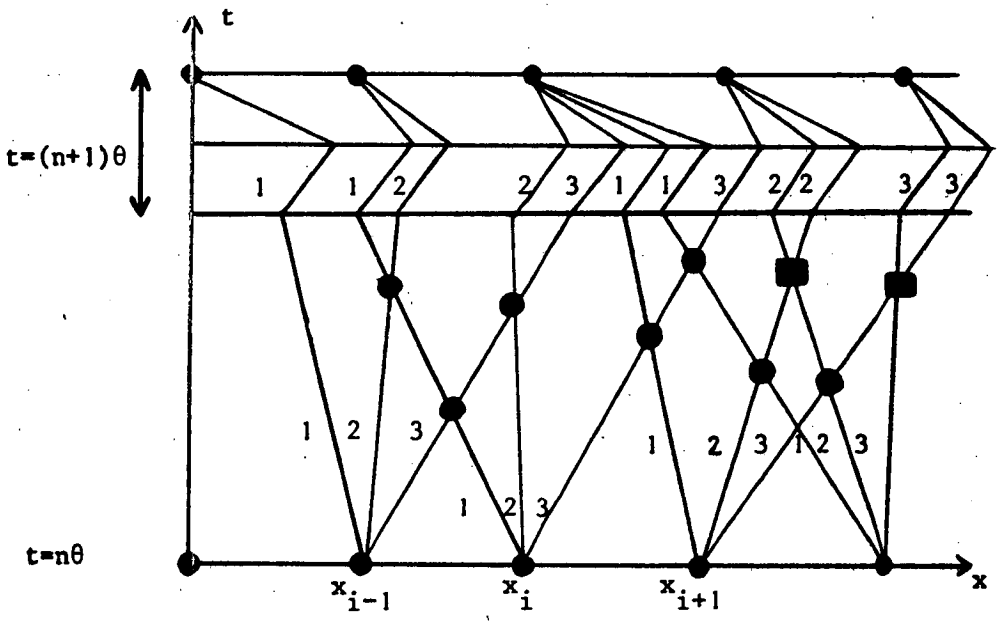


Figure 2 : interactions d'ondes élémentaires.

■ interaction interdite par la condition de stabilité.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique