



HAL
open science

Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets

Guy Cohen, P. Moller, Jean-Pierre Quadrat, M. Viot

► **To cite this version:**

Guy Cohen, P. Moller, Jean-Pierre Quadrat, M. Viot. Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets. [Rapport de recherche] RR-0362, INRIA. 1985. inria-00076194

HAL Id: inria-00076194

<https://inria.hal.science/inria-00076194>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 362

**UNE THÉORIE LINÉAIRE
DES SYSTÈMES
À ÉVÉNEMENTS DISCRETS**

**Guy COHEN
Pierre MOLLER
Jean-Pierre QUADRAT
Michel VIOT**

Janvier 1985

UNE THEORIE LINEAIRE DES SYSTEMES A
EVENEMENTS DISCRETS

G. COHEN, P. MOLLER, J.P. QUADRAT, M. VIOT

INRIA
Domaine de Voluceau
BP 105
Rocquencourt
78153 LE CHESNAY Cédex
FRANCE



UNE THEORIE LINEAIRE DES SYSTEMES

A EVENEMENTS DISCRETS

G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, M. Viot

Résumé :

On étudie les systèmes à événements discrets, en utilisant la structure algébrique $(\mathbb{R}, \max, +)$ qui est un demi-corps absorbant. Il est possible de faire une théorie linéaire dans cette algèbre des systèmes dynamiques modélisables par des graphes à événements (sous classe des réseaux de Petri). Une notion de fonction de transfert est introduite qui permet de manipuler aisément les suites des instants auxquels a lieu un événement particulier du système : c'est la série rationnelle en une indéterminée sur cette structure algébrique, dont les coefficients forment la suite de ces instants. La propriété d'absorption du max, permet d'aller plus loin dans les calculs que dans l'étude des séries rationnelles sur un demi-anneau général.

L'étude de la notion de module sur cette structure, essentielle pour les problèmes de réalisation minimale, est abordée.

Un exemple d'application potentielle à la microprogrammation est donné.

Nous pensons que cette structure algébrique est aux systèmes dans lequel plusieurs processeurs fonctionnent en parallèle et partagent des ressources communes, ce qu'est l'algèbre de Boole à la logique.

Abstract :

"The study discrete-event systems using the algebraic structure $(\mathbb{R}, \max, +)$ which is an absorbing-semi-field.

Using this algebra, we can propose a linear of those dynamic systems, which can be modeled by decision-free-Petri-net. A transfer function is introduced which is a useful tool to manipulate the sequence of times at which particular events of the system take place, that is the rational series with one formal parameter on this algebraic structure, the coefficients being the times of this sequence. The absorbing property of the max allows more complete computation than in the case of rational series on a general semi-ring.

The study of the notion of module on this structure, which is an important notion for the realization problem is started.

An example of potential applications to microprogramming is given.

We think that this algebraic structure is as important for concurrent systems as the boolean algebra is for logic.

Ce travail a été fait dans le cadre du contrat du CNET n° 83 5B-059 PAA. Il a été également supporté par le contrat ADI. Il est la reproduction d'une publication CNET.

INTRODUCTION.

Etude des systèmes à événements discrets par une théorie des systèmes linéaires dans l'algèbre des dioides $(\mathbb{R}, \max, +)$. Utilisation dans l'étude de systèmes informatiques.

0.1. Introduction. Situation du sujet.

La théorie des systèmes classique, et particulièrement la théorie des systèmes linéaires, a montré son utilité dans l'analyse de nombreux processus dynamiques continus et de leur optimisation. Il est certes difficile de donner une définition rigoureuse de la notion de "processus continu" surtout lorsque le temps peut prendre des valeurs discrètes (systèmes échantillonnés) voire les états eux-mêmes évoluent dans un espace discret (chaînes de Markov, encore que les probabilités soient elles à valeurs continues). Corrélativement, il est aussi difficile de définir avec précision ce que nous entendons par "système à événements discrets". Pour nous risquer dans une tentative de définition, nous dirons qu'il s'agit de systèmes dont on n'a pas besoin d'observer l'évolution continûment (ou à tous les tops d'une horloge régulière) mais seulement lorsqu'il se passe un événement "intéressant" (pour le problème posé, ce qui ne signifie pas qu'il se passe rien en dehors de ces instants particuliers). La "dynamique" du système correspond donc à l'enchaînement de ces dates particulières et aux lois mathématiques qui régissent cet enchaînement.

En dehors de la simulation appelée précisément "simulation par événements", il y a assez peu d'outils mathématiques qui ont été développés pour étudier ces systèmes. On peut citer les réseaux de Petri temporisés qui sont des outils de description de systèmes où le déclenchement d'un événement suppose la réunion de conditions logiques, généralement la fin d'autres événements (avec indication de la durée de ces événements pour les réseaux temporisés). Le conditionnement du début d'événements (ou de "tâches") par la fin d'autres événements est la situation la plus répandue pour les systèmes à événements discrets. On en trouve des exemples multiples en particulier dans le domaine des systèmes de production ou dans les systèmes informatiques. En dehors des problèmes de validation logique (détection d'"étreinte fatale" du type : la fin de A conditionne le début de B dont la fin conditionne le début

de A, ce qui revient à détecter la présence de circuit dans un graphe de précédence), la question essentielle pour ces systèmes est l'évaluation des performances (qui se mesure généralement en termes du nombre d'événements d'un type donné se produisant dans un laps de temps donné) voire de l'optimisation de ces performances en agissant :

- sur la conception ou l'agencement du système ;
- la capacité des moyens matériels mis en oeuvre (durée des tâches liée à la performance des "machines" ou serveurs" et à leur nombre, nombre de "clients" présents simultanément dans le système-problèmes de capacités des stocks et/ou du réseau de transport ...)
- l'ordonnancement des tâches c'est-à-dire l'action sur le graphe de précédence, là où cette action est logiquement possible.

Nous avons déjà cité la simulation et les réseaux de Petri temporisés comme moyens d'étude de systèmes à événements discrets. En tant que moyen d'évaluation de performances et a fortiori pour l'optimisation, la simulation est un moyen assez lourd surtout en raison de son aspect "boite noire" : on définit des paramètres et on obtient un résultat, mais généralement avec assez peu de compréhension analytique de la façon dont les résultats dépendent des valeurs des paramètres. L'utilisation des réseaux de Petri comme outil d'évaluation de performance nous est apparu dans un article de Ramamoorthy et Ho [10] et par certains aspects les résultats obtenus sont comparables à ceux qui seront décrits plus loin par une approche plus algébrique. Une troisième voie d'approche est constituée par les modèles du type "réseaux de files d'attente" lorsque le système à événements discrets peut aussi être vu sous cet angle. Il existe un certain nombre de résultats théoriques dans cette approche (Jackson) mais dans un cadre probabiliste et avec des hypothèses généralement irréalistes. Il existe aussi un certain nombre de techniques heuristiques dérivées des résultats théoriques, notamment les approches "Operational Analysis" (Denning et Buzen [8]) et "Mean Value Analysis" (Cavaillé et Dubois [5]).

A la suite de travaux récents motivés par des recherches sur la modélisation des ateliers flexibles (Cohen Dubois, Quadrat et Viot [2]), s'appuyant eux-mêmes sur la théorie algébrique des dioïdes (Gondran et Minoux [9], Cunnigham-Green [7]), il est apparu qu'il était peut être possible de

développer une théorie des systèmes "linéaires" (au sens de l'algèbre des dioïdes) dont l'embryon déjà existant présente de grandes analogies de forme avec la théorie classique des systèmes linéaires continus. Ces premiers résultats qui s'inscrivent dans un contexte déterministe et pour des systèmes stationnaires (invariants dans le temps) ouvrent l'espoir de pouvoir développer cette théorie pour l'appliquer à l'étude des systèmes informatiques notamment. L'intérêt de cette nouvelle approche est à notre avis non seulement d'être un autre outil pour évaluer les performances à un coût (en temps de calcul) relativement intéressant par rapport aux autres moyens actuellement disponibles, mais aussi et surtout, par sa nature algébrique, de se prêter au calcul non pas seulement numérique mais formel, d'où la possibilité de démontrer mathématiquement des résultats qui ont pu faire par ailleurs l'objet de constatations expérimentales, et de développer des algorithmes pour optimiser ces systèmes, ou au moins certaines des variables de décision à notre disposition (les décisions de type nettement combinatoire tel l'ordonnancement des tâches semblent échapper au champ des possibilités, mais on peut espérer pour elles le développement d'heuristiques d'autant meilleures que la compréhension analytique est plus profonde).

Dans la suite, nous décrirons rapidement les résultats déjà obtenus pour les Ateliers Flexibles dans le cadre d'un contrat de recherche d'un an, financé par l'Agence de l'Informatique, au profit de 3 organismes : l'INRIA, le Centre d'Automatique et Informatique de l'ENS des Mines de Paris (CAI-ENSMP, Fontainebleau) et le CERT/DERA de l'ONERA (Toulouse). On montrera en particulier l'impact sur la compréhension du fonctionnement de ces systèmes.

On discutera ensuite des possibilités d'applications de cette théorie naissante aux systèmes informatiques (nous gardons volontairement ici cette terminologie très générale qui deviendra plus précise à ce moment-là).

On exposera ensuite les problèmes qui ont été abordés au cours d'une étude préliminaire de neuf mois, qui a permis de mettre en évidence les possibilités de développement d'une théorie des systèmes linéaires dans le cas du dioïde $(\mathbf{R}, \max, +)$, ainsi que les problèmes théoriques posés par cette algèbre.

0.2. Ateliers Flexibles et théorie des dioïdes.

Comme dans un système informatique, les tâches concurrentes représentées dans un atelier flexible par la production simultanée de plusieurs types de pièces se partagent les ressources disponibles : machines, palettes ou chariots véhiculant les pièces, aires de stockage, réseau de transport ... Si l'on a choisi un ordre de passage des pièces sur les machines, la date de début de passage d'une pièce sur une machine dépend de la date de fin de passage sur la machine précédente pour la même pièce (augmentée éventuellement d'un temps de transport) et de la date de fin de passage de la pièce qui précède la pièce considérée (augmentée éventuellement d'un temps de changement d'outil). On voit donc apparaître une opération de maximisation sur deux dates. Les dates de fin se calculant à partir des dates de début augmentées d'une durée que nous supposons ici connue (hypothèse déterministe) on voit apparaître une seconde opération : l'addition. On aura :

$$x = \max(y + t_1, z + t_2)$$

qui s'écrit encore sous forme "linéaire" :

$$x = t_1 * y \oplus t_2 * z$$

avec les notations du dioïde $(R, \max, +)$.

Supposons que l'on veuille produire simultanément 3 types de pièces dans la proportions 3.2.1. On appellera "séquence de base" le plus petit ensemble constitué de pièces de type A, B, C en proportions égales à celles désirées : ici on aura AAABBC. Ces proportions ou ratios de production pourront résulter d'un modèle de gestion de l'atelier en termes de flots de pièces de divers types traversant l'atelier, intégrant des informations en temps réel sur l'état des stocks de pièces produites l'état du parc de machines... voire des informations prévisionnelles (pannes futures, demande future ...) dans un cadre stochastique. A ce niveau, on peut prendre en compte la charge moyenne de chaque machine calculable à partir des flots et des ratios de production. On peut donc déterminer les machines qui seront saturées du moins théoriquement car le modèle ignore à ce niveau les phénomènes de synchronisation qui peuvent provoquer l'attente "oisive" des machines réputées saturées, ce qui se traduira par la non réalisation des flots souhaités.

On appelle ordonnancement l'ordre de passage de la séquence de base sur chaque machine (en supposant l'ordre de parcours des machines fixé). Cet ordonnancement est défini à une permutation circulaire près, car la séquence de base est supposée se reproduire "indéfiniment" (*). Cette notion d'ordonnancement a à l'évidence une influence sur les phénomènes de synchronisation, mais elle est transparente au niveau d'un modèle en termes de flot.

Grâce à l'introduction du formalisme des dioïdes on a pu mettre les équations décrivant le fonctionnement d'un atelier dans les conditions ci-dessus sous la forme d'équations récurrentes "linéaires" et :

- . montrer l'existence d'un régime "permanent" (en fait périodique) associé à la valeur propre (unique) de la matrice de récurrence ;
- . analyser la façon dont les conditions initiales du système récurrent sont projetées sur un vecteur propre de la matrice ou d'une puissance de la matrice (la puissance est appelée cyclicité) ainsi que la structure de cet ensemble de vecteurs propres (projecteurs spectraux) ;
- . utiliser l'algorithme de Karp pour calculer de façon efficace la valeur de la valeur propre (associée à un taux de production) ;
- . Montrer que pour un atelier du type "flowshop", il est toujours possible de saturer effectivement la machine la plus chargée, quel que soit l'ordonnancement choisi a priori, pourvu qu'un nombre suffisant de pièces soit constamment présent dans l'atelier ; cependant ce nombre minimum de pièces nécessaire à la réalisation du flot maximal est lui-même une fonction de l'ordonnancement. On a donc là un résultat important de découplage du problème de flot (gestion de niveau haut) et du problème d'ordonnancement (gestion du niveau bas) ;

(*) par introduction d'une nouvelle pièce lorsqu'une pièce quitte l'atelier.

. imaginer un algorithme pour déterminer ce nombre minimum de pièce permettant d'atteindre la production maximale (à ordonnancement fixé). Cet algorithme est lié de très près à la façon dont les cycles critiques s'établissent, ou encore au calcul des vecteur propres (ce dernier résultat n'est pas inclus dans la référence [5]).

A l'issue de cette étude qui constitue une justification a posteriori de plusieurs tentatives de hiérarchisation du problème de gestion dans ses aspects macroscopiques (flots) et microscopiques (ordonnancement), une question importante qui n'a pu être totalement résolue est la question de l'ordonnancement "optimal". Du moins un sens plus précis a pu être donné à cette notion puisqu'il s'agit non pas d'améliorer un flot de production, mais de réduire le volume de certains moyens à mettre en oeuvre pour assurer le flot maximal.

0.3. Applications potentielles aux systèmes informatiques.

A priori, tout système informatique, du plus microscopique au plus macroscopique, met en jeu des phénomènes de concurrence entre tâches partageant des ressources communes et/ou des phénomènes de synchronisation. Ainsi, au niveau des réseaux d'ordinateurs ou pour des architectures plus microscopiques où apparaît entre autres la notion de bus, le réseau de communication est l'une des ressources partagées du système. Dans une machine multiprocesseur destinée à exécuter des algorithmes parallèles, certaines ressources peuvent être communes (accès à une mémoire commune, à un multiplieur flottant câblé...) et certaines contraintes de synchronisation à certaines étapes de calcul peuvent exister.

Dans la plupart de ces systèmes se posent des problèmes de conception ou d'architecture, et des problèmes de gestion à temps réel ou de protocoles. On cherche à évaluer ces deux niveaux de décision en face d'une ou plusieurs fonctions (ou ensembles de tâches) à assurer. S'agissant de gros systèmes (réseaux d'ordinateurs) la définition des tâches et de leur durée doit être assez large et une approche stochastique peut être un moyen d'évaluer des performances "en moyenne". Mais, par exemple en microinformatique, il est envisageable de "dédier" (ou consacrer) toute l'architecture à une classe bien délimitée de tâches, par exemple un algorithme de traitement du signal du type transformée de Fourier rapide. L'un des problèmes qui se pose est

d'optimiser le flot d'informations traitées sous la contrainte d'une surface maximale de silicium disponible pour implanter l'Unité Arithmétique et Logique, des circuits spécialisés (multiplieurs ou autres), des buffers ou pipe-line, etc...

Dans cette situation, on est peut-être plus près du cadre d'hypothèses adoptées pour la modélisation des ateliers flexibles : cadre déterministe et stationnaire, car on peut connaître assez précisément le temps de propagation de l'information à travers les divers circuits élémentaires constitutifs et la répétitivité des tâches justifie les évaluations en régime permanent.

Il nous est assez difficile aujourd'hui de délimiter le champ d'applications possible dans le domaine de l'informatique, mais l'ampleur des travaux déjà consacrés à l'évaluation de performances dans ces systèmes (au niveau des réseaux, de l'exécution de programmes parallèles ou de la microprogrammation) laisse à penser qu'il existe certainement des possibilités. C'est l'objet de l'étude préliminaire de mieux préciser ce champ et les chances de progrès associées à l'introduction du nouvel outil algébrique brièvement décrit ci-dessus.

0.4. Etude préliminaire.

Trois directions de recherche ont été abordées au cours d'une phase exploratoire qui s'est déroulée d'octobre 1983 à Juin 1984. Seul le dioïde $(R, \max, +)$ a été étudié.

. On a établi le lien existant avec les réseaux de Petri, et la méthode de traduction d'un formalisme à l'autre. Cela a permis d'aborder comme exemple l'étude d'une instruction microprogrammée du processeur 6502.

. On a introduit la notion de système linéaire dans cette algèbre, pour laquelle ont été introduits des outils analogues à ceux utilisés dans la théorie usuelle : représentation externe par des séries formelles, représentation interne, réponse impulsionnelle, espace d'état. Des notions d'observabilité, commandabilité et de représentation interne minimale sont proposées.

. Il est vite apparu nécessaire de définir rigoureusement les objets algébriques introduits, car leurs propriétés sont différentes de l'algèbre usuelle. On a abordé de manière systématique l'étude de l'algèbre linéaire du dioïde $(R, \max, +)$, avec l'introduction d'une notion abstraite analogue à celle d'espace vectoriel, ce qui a permis de donner un cadre aux calculs effectués.

Quelques problèmes fondamentaux d'algèbre linéaire ont été mis en évidence, qui demandent à être résolus avant que l'étude des systèmes puisse être abordée en toute rigueur.

I. DESCRIPTION DE L'ALGÈBRE UTILISÉE.

1.1. Généralités.

On appelle dioïde (ou semi-anneau) tout ensemble K muni de deux lois de composition internes T et $*$ associatives telles que

T est commutative

$*$ est distributive par rapport à T .

On omettra souvent le signe $*$ comme on le fait habituellement pour la multiplication.

Exemples : tous les anneaux sont des dioïdes. Pour tout groupe G muni d'un ordre total compatible avec la loi de groupe $*$, l'opération T définie par $aTb = \max(a,b)$ définit une structure de dioïde.

L'étude des dioïdes permet de traduire nombre de problèmes de théories des graphes en problèmes algébriques, grâce au calcul matriciel que l'on peut définir à partir d'un dioïde. On obtient des résultats intéressants lorsque la loi T est telle que :

$$\forall(a,b) aTb \in \{a,b\}$$

C'est pourquoi il est utile de faire la remarque suivante :

Proposition 1 : Si $(K,T,*)$ est un dioïde tel que $\forall(a,b) \in \{a,b\}$, alors la relation $(a \geq b \Leftrightarrow aTb = a)$ définit un ordre total sur K , avec lequel $*$ est compatible.

Démonstration :

Cette relation est bien définie pour tout couple (a,b) : il suffit de calculer aTb .

Elle est réflexive car nécessairement $aTa = a$ pour tout a ; donc $a \geq a$.

Elle est transitive : si $a \geq b$ et $b \geq c$ alors $aTb = a$, $bTc = b$ donc

$$\begin{aligned} aTc &= (aTb)Tc \\ &= aT(bTc) \text{ (associativité)} \\ &= aTb = a \text{ donc } a \geq c \end{aligned}$$

Elle est antisymétrique : si $a \geq b$ et $b \geq a$ alors $aTb = a = bTa = b$.

Dans ce cas, on peut compléter K par un élément minimal ϵ , qui sera élément neutre pour T , et absorbant pour $*$.

On obtient des propriétés supplémentaires si $*$ est une loi de groupe : tout élément (sauf ϵ) possède un symétrique.

\mathbb{R}^2 muni de l'addition vectorielle usuelle (qui joue le rôle de $*$), du max de l'ordre lexicographique (qui joue le rôle de T) et d'un minimum ϵ , est un exemple qui montre que la classe des groupes ordonnés contient des objets très complexes. L'étude de l'exemple précédent peut avoir des applications à l'informatique : calcul avec des suites de données hiérarchisées.

Dans cette étude préliminaire, nous nous limiterons à l'étude de la structure définie comme suit :

Définition : On appelle diofde réel croissant (DRC) la structure algébrique définie par :

- $\mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$ avec $\epsilon = -\infty$ muni des opérations :
- T est le maximum pour l'ordre usuel
- $*$ est l'addition usuelle.

Remarque : Cette structure est isomorphe à :

- \mathbb{R}_+ muni du max et de la multiplication usuelle.
- $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni du min usuel et de l'addition.
- $]0, +\infty]$ muni du min et de la multiplication.

Notations : Dans la suite, nous manipulerons essentiellement des maximums et nous adopterons les notations suivantes :

T sera notée \oplus : $a \oplus b = \max(a,b)$

* sera notée \cdot : $a \cdot b = a + b$ ou simplement $a b$

Nous appellerons représentation additive de DRC $(\mathbb{R} \cup \{\epsilon\}, \max, +)$.

Nous appellerons représentation multiplicative $(\mathbb{R}_+, \max, \times)$.

Si nécessaire, nous préciserons quelle représentation est utilisée dans les exemples.

La représentation multiplicative offre l'avantage de restreindre les risques d'erreurs dues aux notations car \cdot désigne la "vraie" multiplication. Néanmoins, c'est la représentation additive qui est la plus utile dans les applications. Dans ce cas, attention : $1 \cdot x > x$! Pour éviter ce genre d'erreurs, nous noterons : ϵ l'élément neutre (minimal) de \oplus ; $-\infty$ ou 0 selon le cas ; e l'élément neutre de \cdot ; 0 ou 1 selon le cas.

Nous compléterons éventuellement $(\mathbb{R}, \max, +)$ et $(\mathbb{R}_+, \max, \times)$ par un élément noté $+\infty$ pour lequel sont définies les opérations :

$$\begin{array}{ll} \forall \lambda \in \text{DRC} \cup \{+\infty\} & \lambda \oplus +\infty = +\infty \\ \forall \lambda \in \text{DRC} \setminus \{\epsilon\} & \lambda \cdot +\infty = +\infty \\ & \epsilon \cdot +\infty = \epsilon \end{array}$$

La première règle signifie que $\forall \lambda \neq +\infty, \lambda < +\infty$.

Les opérations \oplus et \cdot conservent leurs propriétés combinatoires lorsqu'on introduit $+\infty$.

1.2. Problèmes de calcul.

Dans cette algèbre, les difficultés proviennent essentiellement du fait que $a \oplus b = a \oplus c$ n'entraîne pas $b = c$. Cette égalité a lieu si $b = c$ ou ($a \geq b$ et $a \geq c$). La forme générale des équations du premier degré s'écrit :

$$a \cdot x \oplus b = a' \cdot x \oplus b'$$

Elle admet une solution unique si :

$$a > a' \text{ et } b' > b \quad x = \frac{b'}{a}$$

$$a < a' \text{ et } b' < b \quad x \leq \frac{b}{a}$$

Elle a une infinité de solutions dans les cas :

$$a = a' \quad x \geq \frac{b \oplus b'}{a}$$

$$b = b' \quad x \geq \frac{b}{a \oplus a'}$$

Il n'y a pas de solution dans les autres cas.

Pour faire les calculs, il suffit, chaque fois que l'on peut comparer deux termes dans une max-somme, de supprimer le plus petit. Ceci est valable même lorsque les termes ne sont pas du même côté de l'égalité.

Exemple : (représentation multiplicative)

$$(x \oplus e)^3 \oplus 5x \oplus 48 \oplus 12 \oplus 3x = 2x \oplus 4(x \oplus e)^2 \oplus 15$$

$$\Leftrightarrow (x \oplus e)^3 \oplus 5x \oplus 48 = 4(x \oplus e)^2 \oplus 2x \oplus 15$$

$$\Leftrightarrow (x \oplus e)^3 \oplus 5x \oplus 48 = 4(x \oplus e)^2$$

Il faut que $4(x \oplus e) \geq 48$, donc $x \oplus e \geq 12$ donc $x \geq 12$. Dans ce cas,

$$5x \geq 60 \geq 48, \quad (x \oplus e)^3 \geq (x \oplus e)^2 \cdot 4 \geq 5x$$

donc l'égalité devient $(x \oplus e)^3 = 4(x \oplus e)^2$

donc $x \oplus e = 4 \quad x = 4 < 12$

il n'y a pas de solution.

Symétrisation de la loi \oplus .

Pour accroître les possibilités de calcul, on peut vouloir étendre DRC de manière à introduire un signe "moins" noté \ominus qui signifie : $a \ominus b = c \Leftrightarrow a = b \oplus c$.

Pour cela, il faut définir sur DRC^2 une relation d'équivalence telle que $(a,b) \equiv (c,d) \implies a \oplus d = b \oplus c$.

b et d jouent le rôle de "parties négatives". Si on transforme cette implication en équivalence pour définir \equiv , on n'obtient pas une relation d'équivalence ; on aurait en effet $(3,2) \equiv (3,3)$, $(2,3) \equiv (3,3)$, mais $(3,2) \not\equiv (2,3)$.

Pour contourner cette difficulté, il faut définir \equiv par :

$$(a,b) \equiv (c,d) \iff \begin{aligned} & a \oplus d = b \oplus c \text{ et} \\ & ((a > b \text{ et } c > d) \text{ ou } (a < b \text{ et } c < d)) \\ & \text{ou } a = b = c = d. \end{aligned}$$

Ce qui revient à définir trois types de classes :

$$\begin{aligned} (a,a) &\equiv (a,a) && \forall a \in DRC \\ \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \equiv (a,c) \\ (b,a) \equiv (c,a) \end{array} \right. &&& \forall b < a \quad \forall c < a. \end{aligned}$$

Cela donne bien un dioïde qui est une extension de DRC , mais cela n'améliore pas la résolution de l'équation du premier degré. De plus, on a perdu le lien entre \oplus et un ordre total, or cet ordre total est fondamental pour la résolution des problèmes que nous aborderons. Cette symétrisation n'a donc aucun intérêt.

1.3. Calcul matriciel.

On définit des matrices auxquelles on applique le calcul matriciel usuel : si A et B sont deux matrices à éléments dans DRC , $C = A * B$ est définie par :

$$c_{ij} = \sum_k \oplus a_{ik} * b_{kj} = \text{Max}_k (a_{ik} + b_{kj})$$

A la matrice (n,n) A, on associe le graphe $G = (E,V)$ de sommets $E = \{1,2,\dots,n\}$, d'arcs V d'origine i et d'extrémités j si $a_{ij} \neq \epsilon$, de poids a_{ij} .

Alors, si l'on désigne par $A^k = AA \dots A$ k fois, l'élément A_{ij}^k a pour valeur le chemin de poids maximum joignant i à j constitué de K arcs adjacents du graphe G.

Notations : On notera $M_{(n,p)}^{(DRC)}$ ou simplement $M_{(n,p)}$, l'ensemble des matrices à coefficients dans DRC, de n lignes sur p colonnes. On notera \oplus la max-addition terme à terme des matrices. La multiplication par un scalaire sera notée $\lambda.C$: $(\lambda.C)_{ij} = \lambda.c_{ij}$.

Propriété : $(M_{(n,n)}^{(DRC)}, \oplus, *)$ est un dioïde. La multiplication entre matrices n'est pas commutative.

Notation : On notera $E = \begin{bmatrix} e & & & \epsilon \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ \epsilon & & & e \end{bmatrix}$

en précisant si nécessaire : $E_n \in M_{(n,n)}$.

Equations linéaires et affines : La forme la plus générale s'écrit :

$$A \times \oplus B = A' \times \oplus B'.$$

Il n'y a pas de méthode générale de résolution des systèmes de cette forme. Notons que les règles de simplification exposées plus haut permettent en général de les résoudre facilement.

Il y a un cas particulier important où le système est facilement résolu :

Théorème :

A est une matrice carrée.

1° - L'écriture $A^* = E \oplus A \oplus \dots \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n \oplus \dots$ a un sens si et seulement si tous les circuits de A sont de poids inférieur ou égal à e.

2° - Si A^* existe, le système $X = AX \oplus B$ admet $X = A^* B$ comme solution. De plus, cette solution est unique si tous les circuits de A sont de poids strictement inférieur à e.

Démonstration : cf. M. GONDRAN & M. MINOUX [9] ou Rapport de Recherche INRIA n° 191 [2].

Remarque : On peut étendre la définition de A^* à toutes les matrices, en introduisant des coefficients égaux à $+\infty$. L'équation $X = AX \oplus B$ a alors des solutions dont certaines coordonnées sont égales à $+\infty$.

On considérera alors que la solution est :

$$X = A^* B$$

Il peut y avoir d'autres solutions de $X = AX \oplus B$, comportant de nombreuses coordonnées égales à $+\infty$ celles-ci n'ont aucun intérêt. Par exemple, si A est fortement connexe, $X = (+\infty, +\infty, \dots, +\infty)$ est solution de $X = AX \oplus B$, alors qu'il peut y avoir des solutions finies qui sont celles que l'on recherche.

1.4. Calcul formel et fonctions polynomes.

1.4.1. Généralités.

Dans DRC, le calcul formel pose des problèmes liés au fait qu'il n'y a pas identité entre les fonctions polynômes et les polynômes formels : considérons l'exemple suivant, dans $(\mathbb{R}, \max, +)$

$$P(\lambda) = (e/6) \oplus 3\lambda \oplus (e/8)\lambda^2 \oplus 1 \lambda^3$$

Si on considère $P(\lambda)$ comme fonction de λ , pour les opérations usuelles, $P(\lambda)$ s'écrit :

$$P(\lambda) = \max (-6, \lambda+3, 2\lambda-8, 3\lambda+1)$$

$P(\lambda)$ est l'enveloppe supérieure d'une famille de droites :

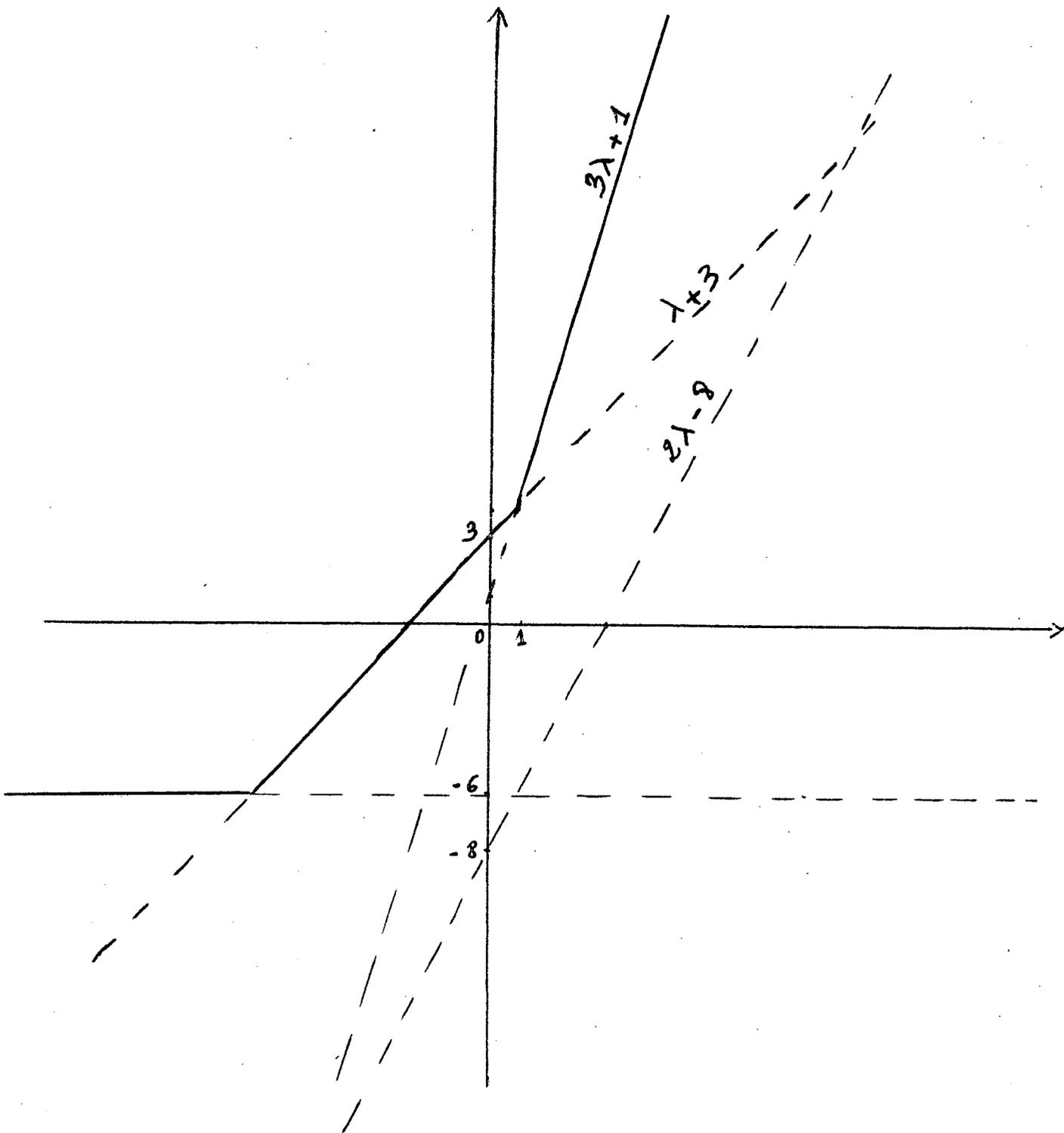


Figure 1.

On constate que certains monômes sont strictement dominés par l'enveloppe convexe. En tant que fonction :

$$P(\lambda) = (e/6) \oplus 3\lambda \oplus 1\lambda^3$$

Il n'y a pas unité de l'écriture de la fonction $P(\lambda)$, comme polynôme.

Nous étudierons plus loin les polynômes formels. Puis, au Chapitre III, nous étudierons la géométrie de l'espace des fonctions polynômes, ainsi que les polynômes formels.

1.4.2. Extension de la notion de fonction polynôme.

En représentation additive, une fonction polynôme est l'enveloppe supérieure d'une famille de droites, dont les pentes sont des entiers naturels.

Si $\lambda \neq \varepsilon$, λ^{-n} est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en prenant $\lambda^0 = e$, on définit λ^q pour $q \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \neq \varepsilon$.

Les polynômes sur DRC peuvent être un outil d'étude en analyse convexe, si on définit λ^r pour r réel quelconque. On peut définir λ^r à partir du calcul multiplicatif usuel dans $(\mathbb{R}_+, \max, \times)$. On pourrait alors manipuler des enveloppes convexes de droites quelconques. Ce serait particulièrement intéressant, si on pouvait utiliser des méthodes d'algèbre linéaire sur DRC.

Hélas, la définition de λ^p pour p quelconque varie selon la représentation de DRC : pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, dans $(\mathbb{R}, \max, +)$ $\lambda^p = p^\lambda$ alors que cette égalité est fautive dans $(\mathbb{R}_+, \max, \times)$.

D'autre part, nous verrons dans la partie consacrée à l'algèbre linéaire que l'espace des fonctions polynômes à une structure particulièrement complexe.

L'étude des enveloppes convexes de familles de droites quelconques à l'aide de cette algèbre mérite d'être entreprise (*), néanmoins, nous nous limiterons ici au cas des puissances entières.

(*) elle a été abordée par R.A. Cunnighame-Green.

Définition : Nous appellerons fonction monôme une fonction de $DRC \setminus \{\epsilon\}$ dans DRC de la forme : $\lambda \rightarrow a\lambda^n$, $a \in DRC$, $n \in \mathbb{Z}$.

Nous appellerons fonction polynôme une fonction qui est la max-somme d'un nombre fini de monômes.

Propriété : Toute fonction polynôme admet une écriture unique (canonique) comme somme de fonctions monômes, qui soit minimale au sens de la cardinalité.

Démonstration : il suffit de conserver les monômes qui réalisent le maximum sur au moins un intervalle, pour obtenir l'écriture canonique.

Remarque 1 : En représentation multiplicative, on manipule les courbes $(x \rightarrow x^p, p \in \mathbb{Z})$ définies au sens de la multiplication usuelle.

Remarque 2 : Une fonction polynôme possède plusieurs écritures. Nous verrons au chapitre III qu'au sens de l'algèbre linéaire, si on considère les $x \rightarrow x^p$ comme des générateurs de l'espace des fonctions polynômes, les coordonnées canoniques sont obtenues en maximisant tous les coefficients :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p(f/x^n) \cdot x^n$$

où pour tout n , $p(f/x^n) = \max \{k \in DRC / kx^n \leq f(x)\}$. Cela ne correspond pas à la forme minimale introduite précédemment, et qui semble la plus naturelle. Remarquons que dans la formule ci-dessus, il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non absorbants ; les termes de plus haut et plus bas degrés coïncident avec ceux de l'écriture minimale, car ce sont eux qui déterminent les comportements de f en ϵ et en $+\infty$.

L'utilité de l'écriture minimale est restreinte du fait qu'elle n'est pas conservé lorsqu'on max-additionne des polynômes :

$$p(\lambda) = 3\lambda \oplus 4\lambda^2$$

$$q(\lambda) = (e/5)\lambda \oplus 2\lambda^2 \oplus 6\lambda^3$$

sont donnés sous forme minimale mais :

$$(p \oplus q)(\lambda) = 3\lambda \oplus 4\lambda^2 \oplus 6\lambda^3$$

n'est pas obtenu sous sa forme minimale qui est

$$(p \oplus q)(\lambda) = 3\lambda \oplus 6\lambda^3$$

1.4.5. Fonctions. Fractions rationnelles.

Si P et Q sont deux fonctions polynômes telles que $Q(\lambda) \neq \varepsilon$ pour $\lambda \neq \varepsilon$. On définit une fonction de DRC* dans DRC par : $\lambda \mapsto P(\lambda)/Q(\lambda)$.

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & P(\lambda)/Q(\lambda) = P'(\lambda)/Q'(\lambda) & \text{(égalité entre fonctions)} \\ \text{alors} & P(\lambda).Q'(\lambda) = P'(\lambda).Q(\lambda) \end{array}$$

C'est une égalité entre fonctions, qui ne permet pas l'identification terme à terme des coefficients.

Il peut être intéressant d'étudier le lien entre ces fractions et les fonctions polynômes généralisées précédemment définies, ce qui revient à chercher une décomposition en éléments simples de ces fractions.

Nous n'avons pas approfondi cette question, car l'étude des systèmes sur DRC utilise des polynômes formels, dont les propriétés sont différentes de celles des fonctions. Celles-ci n'auront d'utilité que lorsque seront étudiés des systèmes avec paramètres.

Remarque : munis des opérations :

$$(f \oplus g)(\lambda) = f(\lambda) \oplus g(\lambda)$$

$$(f.g)(\lambda) = f(\lambda).g(\lambda)$$

Les espaces suivants sont des dioïdes :

- les fonctions polynômes à puissances positives
- les fonctions polynômes à puissances entières
- les fonctions fractions rationnelles.

1.4.6. Identité remarquable.

On considère les écritures comme fonction de deux variables :

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n \quad \text{si } n \geq 0.$$

1.4.7. Polynômes formels.

On peut proposer plusieurs définitions des polynômes formels :

- une définition d'esprit "algèbre linéaire" en les identifiant à des suites presque identiques à ϵ point de vue qui sera pris au Chapitre III.
- on peut considérer l'algèbre obtenue en étendant les opérations de $DRC \cup \{z\}$ où z est une variable formelle.

On définit ainsi un nouveau diofde des polynômes formels, à puissances entières positives.

On obtient les puissance entières quelconques en complétant $DRC \cup \{z, z^{-1}\}$.

Ces polynômes ont une écriture unique, au contraire des fonctions polynômes.

Etudions les problèmes de divisibilité. La construction usuelle des fractions rationnelles ne s'applique pas, car on ne définit pas une relation d'équivalence par :

$$(P, Q) \equiv (P', Q') \quad \text{si} \quad PQ' = P'Q$$

En effet, pour cette relation, en représentation multiplicative :

$$(5z^2 \oplus 6z, 5z^2 \oplus 6z) \equiv (e, e)$$

et $(3z^3 \oplus z^2 \oplus 4z, 3z^2 \oplus 4z) \equiv (5z^2 \oplus 6z, 5z^2 \oplus 6z)$.

mais on n'a pas $(2z^3 \oplus z^2 \oplus 4z, 3z^2 \oplus 4z) \equiv (e, e)$.

La relation n'est pas transitive.

D'autre part, il n'y a pas de division euclidienne ni de division selon les puissances croissantes sous leur forme usuelle. L'absence de cette dernière rend impossible l'identification des réponses impulsionnelles à des fractions rationnelles, comme en Automatique usuelle.

Considérons l'exemple suivant, en représentation multiplicative :

$$\text{Si } P = 3z \oplus 2z^2 \oplus 4z^5$$

$$\text{et } Q = 6z \oplus 2z^3$$

il n'existe pas de couple de polynôme (S,R) tels que :

(les égalités ont lieu entre écritures formelles)

$$P = QS \oplus R \quad \text{avec} \quad d^{\circ}R < d^{\circ}Q \quad (\text{division euclidienne})$$

$$\text{où} \quad P = QS \oplus R \quad \text{avec} \quad d^{\circ}R > d^{\circ}Q \quad (\text{puissances croissantes})$$

Démonstration : Cas de la division euclidienne :

$$\text{Si} \quad P = QS \oplus R$$

comme $d^{\circ}R < d^{\circ}Q < d^{\circ}P$, le terme de plus haut degré de P provient du produit QS. Considérons le terme de plus haut degré de S. C'est nécessairement $4z^5/2z^3 = 2z$. Donc le produit QS est, terme à terme, supérieur ou égal à $2z Q = 4z^5 \oplus 12z^2$. Or, le terme en z^2 de P est $2z^2$, qui est inférieur à $12z^2$. L'égalité $P = QS \oplus R$ avec $d^{\circ}R < d^{\circ}Q$ est donc impossible.

Un raisonnement analogue s'applique dans le cas de la division selon les puissances croissantes. Il faut, dans ce cas, considérer les termes de plus bas degré de P, Q et S.

1.4.8. Identités remarquables. Cas formel.

On a alors, si on considère le polynôme en X et Y comme écriture formelle :

$$(X \oplus Y)^n = \sum_{i=1}^n X^i \cdot Y^{n-i}$$

Si on considère le polynôme en X, lorsque λ est un paramètre :

$$(X \oplus \lambda)^n = \sum_{i=1}^n X^i \cdot \lambda^{n-i}$$

1.4.9. Calcul matriciel.

On peut évidemment définir un calcul matriciel pour des coefficients appartenant aux dioïdes précédemment définis.

- fonctions polynômes ; fonctions fractions rationnelles.
- polynômes formels ; fractions formelles.

II . DIOIDE ET RESEAUX DE PETRI

2.1. Application à l'étude des réseaux de Pétri.

L'algèbre usuelle apporte peu de résultats pour l'étude des réseaux de Pétri : il est facile de compter les jetons, ce qui conduit à des équations linéaires de conservation des jetons, mais il est impossible de décrire simplement les contraintes de synchronisation modélisées par ces réseaux.

Nous montrerons qu'il est possible de décrire ces contraintes, dans le cas des réseaux temporisés, pourvu que l'on s'intéresse aux dates des événements. Pour une classe de réseaux de Pétri, les graphes d'événements, on obtient une représentation de l'évolution du réseau par un système dynamique discret, linéaire dans l'algèbre $(\mathbb{R}, \max, +)$.

Dans la suite, $R = (P, T, \gamma)$ représentera un réseau de Petri dont :

P est l'ensemble des places

T est l'ensemble des transitions

γ le graphe.

On notera :

$\gamma^-(p)$ l'ensemble des transitions en amont d'une place p

$\gamma^+(p)$ l'ensemble des transitions en aval de p .

$\gamma^-(t)$ l'ensemble des places en amont d'une transition t .

$\gamma^+(t)$ l'ensemble des places en aval d'une transition t .

On notera :

$$r : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$$

l'application d'incidence avant (Pré) qui au couple (p, t) associe le nombre de jetons "consommés" dans la place p par une occurrence de la transition t .

$$s : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$$

l'application d'incidence arrière (Post) qui au couple (p, t) associe le nombre de jetons apportés à p par une occurrence de t .

On notera M_0 le marquage initial.

2.1.1. Description algébrique usuelle d'un réseau de Petri.

D'habitude, la notion d'état est associée au marquage du réseau ; l'espace des marquages accessibles tient lieu d'espace d'états.

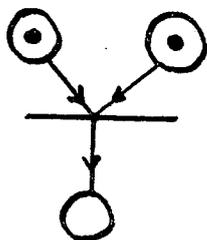
Les transitions sont représentées par des opérateurs faisant circuler les jetons. Cette circulation est décrite par un calcul linéaire dans $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, pourvu que l'on connaisse la séquence d'occurrence des transitions, en supposant que celle-ci soit possible :

$$\forall p \quad M(p) = M_0(p) + \sum_{t_\ell} [\text{Post}(p, t_\ell) - \text{Pre}(p, t_\ell)]$$

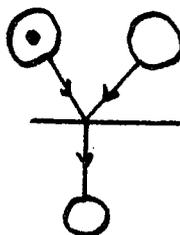
où $\{t_\ell\}$ désigne la suite de transitions considérée. Cette équation donne lieu à une égalité matricielle lorsque l'on considère le marquage global du réseau.

Par contre, il est impossible de décrire, par un opérateur simple, l'application qui à un marquage donné associe l'ensemble des transitions possibles. Hélas, l'algèbre $(\mathbb{R}, \max, +)$ n'apporte aucune solution nouvelle à ce problème.

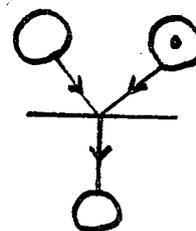
Ce problème semble fondamentalement non linéaire : l'idée de linéarité est associée à celle de "superposition des états". Ce principe ne s'applique pas si l'on considère le marquage comme l'état d'un réseau :



(1)



(2)



(3)

Le marquage (1) est intuitivement la superposition des marquages (2) et (3). Or, dans le cas (1), la transition est possible, alors qu'elle ne l'est ni dans le cas (2), ni dans le cas (3). Il n'y a pas "superposition" des transitions possibles associée à la superposition des marquages.

2.1.2. Réseaux temporisés.

Etudions les dates des événements suivants :

- arrivées des jetons dans les places
- sorties des jetons hors des places
- début des occurrences des transitions
- fin des occurrences des transitions

Pour cela, il faut imposer des contraintes de temps sur le graphe ; deux règles sont envisageables :

- il s'écoule un temps fixé entre le début et la fin de l'occurrence d'une transition. On note $\delta(t)$ ce temps pour $t \in T$.
- tout jeton doit séjourner un temps minimal $\delta(p)$ dans une place P .

La dissymétrie des définitions provient du rôle des places et transitions dans les modélisations :

- les places représentent des stocks
- les transitions représentent des actions.

Nous étudierons le cas général pour conclure quels types de réseaux se prêtent à une modélisation par un calcul linéaire dans $(\mathbb{R}, \max, +)$.

A toute transition t on associe deux suites de réels indicées par \mathbb{N} :

$(X_t^{(n)})$ désigne la date du début de la n -ième occurrence de t

$(Y_t^{(n)})$ désigne la date de la fin de la n -ième occurrence de t .

A toute place p , on associe :

$(V_t^{(n)})$ date de la n -ième arrivée d'un jeton dans p .

$(W_t^{(n)})$ date de la n -ième sortie d'un jeton hors de p .

On prendra :

$$X_t^{(0)} = Y_t^{(0)} = -\infty \quad \forall t \in T$$

$$V_p^{(0)} = W_p^{(0)} = -\infty \quad \forall p \in P$$

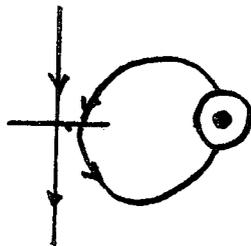
Si la place p est occupée initialement par $M_0(p)$ jetons alors :

$$V_p^{(1)} = \dots = V_p^{(M_0(p))} = -\infty.$$

Si par exemple, une place reçoit simultanément 4 jetons à une date d , après en avoir reçu 15 précédemment, on aura :

$$V_p^{(16)} = V_p^{(17)} = V_p^{(18)} = V_p^{(19)} = d.$$

Il est inutile de supposer qu'une transition en cours doit s'achever avant de pouvoir débiter à nouveau. Une telle contrainte est représentée par une boucle :



Le temps de séjour dans la place correspond au temps de "recyclage" de la transition.

Le fonctionnement du réseau sera décrit par les suites de vecteurs :

$$(X^{(n)}) \quad (Y^{(n)}) \quad (V^{(n)}) \quad (W^{(n)})$$

Rappelons que l'indice de suite n est pas une échelle de temps mais un indice de comptage propre à chaque transition et à chaque place.

2.1.3. Contraintes de temps.

Celles-ci sont de 4 types :

a) - Contraintes de temporisation :

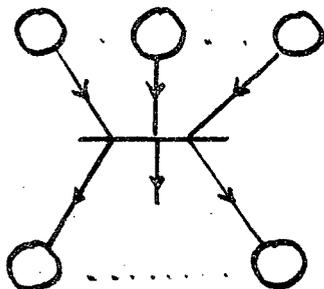
(+ désigne ici l'addition usuelle)

$$(1) \quad \forall t \in T, \forall n \quad Y_t^{(n)} = X_t^{(n)} + \delta(t)$$

$$(2) \quad \forall p \in P, \forall n > M_0(p) \quad W_p^{(n)} \geq V_p^{(n-M_0(p))} + \delta(p)$$

L'équation (2) exprime que pour que le n-ième jeton puisse quitter la place p, il faut que celle-ci en ait reçue au moins $n - M_0(p)$ et que ces jetons aient séjourné au moins $\delta(p)$ dans le place p.

b) - Contraintes de synchronisation :



$\gamma^-(t)$

$\gamma^+(t)$

$$X_t^{(n)} \geq \max_{p \in \gamma^-(t)} W_p^{(n.r(t,p))}$$

il y a au moins $n.r(t,p)$ jetons sortis de chaque place p en amont de t, lors de la n-ième occurrence de celle-ci.

On ne peut pas préciser ce résultat sans hypothèse supplémentaire.

Si t est en conflit structurel avec une autre transition t', c'est-à-dire s'il existe une place $p \in \gamma^-(t) \cap \gamma^-(t')$, on ne peut pas associer explicitement le nombre d'occurrences de t au nombre de jetons ayant quitté p, sans connaître la séquence des occurrences de t et t'.

Il s'agit d'un problème d'indigage de suites, qui se pose même s'il n'y a pas de conflit effectif, c'est-à-dire même si t et t' ne sont jamais possibles simultanément.

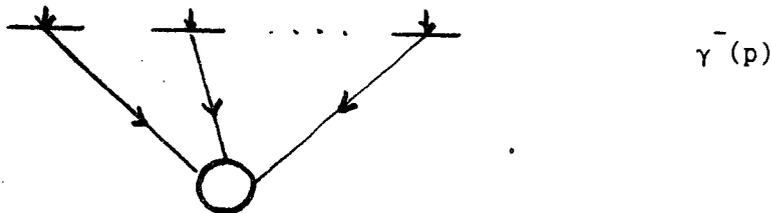
S'il n'y a pas de conflit structurel, on obtient des équations explicites :

$$\forall p \in \gamma^{-1}(t) \quad X_t^{(n)} = W_p^{((n-1).r(p,t)+1)} = \dots = W_p^{(n.r(p,t))}$$

ce qui signifie que $r(p,t)$ jetons franchissent la transition t à l'instant $X_t^{(n)}$. Si de plus, on suppose qu'une transition a lieu dès que tous les jetons nécessaires sont disponibles, alors, c'est le dernier jeton disponible qui conditionne la date de l'occurrence de la transition donc :

$$X_t^{(n)} = \max_{p \in \gamma^{-1}(t)} (V^{(n.r(p,t) - M_0(p))} + \delta(p))$$

c) - Arrivée des jetons dans les places :



Plusieurs séquences d'occurrence de transitions dans $\gamma^{-1}(p)$ peuvent apporter n jetons en p . Parmi celles-ci, il faut considérer la première qui apporte au moins n jetons.

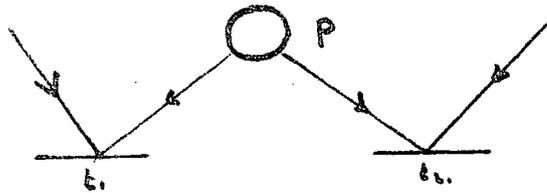
$$V_p^{(n)} = \min_{\alpha(t)} \{ \max_{t \in \gamma^{-1}(p)} Y_t^{(\alpha(t))} / \sum_{t \in \gamma^{-1}(p)} \alpha(t) \cdot s(t,p) \geq n \}$$

Si chaque transition t de $\gamma^{-1}(p)$ a lieu $\alpha(t)$ fois. Le nombre de jetons produit, qui est $\sum \alpha(t) \cdot s(t,p)$ doit être supérieur ou égal à n . Pour une fonction $\alpha : \gamma^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{N}$ donnée, l'événement "chaque transition t a eu lieu $\alpha(t)$ fois", s'il est possible, a lieu à la date $\max_{t \in \gamma^{-1}(p)} (Y_t^{(\alpha(t))})$.

Parmi tous les événements, définis pour les différentes fonctions α telles que $\sum \alpha(t) \cdot S(t,p) \geq n$, c'est celui qui a lieu le plus tôt qui correspond effectivement à l'arrivée du n-ième jeton dans la place p. Donc :

$$V_p^{(n)} = \underset{\alpha \in N^{\gamma^-(p)} / \sum \alpha(t) \cdot s(t,p) \geq n}{\text{Min}} \left(\underset{t \in \gamma^-(p)}{\text{Max}} \gamma_t^{\alpha(t)} \right)$$

d) - Conflit structurel :



Le même raisonnement permet d'affirmer que :

$$W_p^{(n)} = \underset{\alpha \in N^{\gamma^+(p)} / \sum \alpha(t) \cdot r(t,p) \geq n}{\text{Min}} \left(\underset{t \in \gamma^+(p)}{\text{Max}} \chi_t^{\alpha(t)} \right)$$

2.1.4. Conclusion sur le cas général.

Ces inéquations sont vérifiées pour toutes les séquences de transitions admissibles. Cela peut diminuer le nombre de variables nécessaires dans une simulation, mais il est évidemment impossible de décrire l'évolution de manière déterministe.

Pour cela, il faut imposer une règle de fonctionnement du type "déclenchement au plus tôt des transitions".

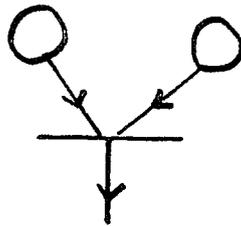
Il faut qu'il n'y ait aucun conflit structurel entre transitions, l'absence de conflits effectifs pouvant difficilement être prévue à l'avance.

Dans les équations que l'on obtient alors, les jetons du marquage initial correspondent à des retards dans l'indiçage des suites, c'est-à-dire à des décalages d'indices.

D'autre part, les valuations multiples sur les arcs induisent des décalages croissants d'indices. Il est donc indispensable de considérer des réseaux dont les arcs soient monovalués (c'est-à-dire $r(t,p) = 1$ et $s(t,p) = 1$ pour tous les couples (t,p) pour lesquels ces fonctions sont définies).

On obtient alors les équations suivantes :

- Condition de début de transition :

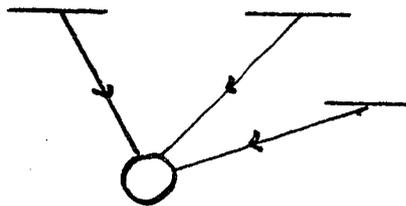


$\gamma^-(t)$

$$X_t^{(n)} = \max_{p \in \gamma^-(t)} (V_p^{(n-M_o(p))} \otimes \delta(p))$$

équation linéaire au sens (max,+)

- Arrivée des jetons dans les places :



$\gamma^-(p)$

$$V_p^{(n)} = \min_{\alpha(t)} \{ \max_{t \in \gamma^-(p)} Y_t^{(\alpha(t))} / \sum_{t \in \gamma^-(p)} \alpha(t) \geq n \}$$

Cette équation n'est pas linéaire dans (R, \max, t) ; de plus, le calcul de $V_p^{(n)}$ utilise tout le passé par une sorte de convolution. Cela provient du fait qu'une telle figure fait augmenter le nombre de jetons dans le réseau, donc les retards.

Pour obtenir un modèle linéaire au sens de $(R, \max, +)$, il faut que chaque place soit liée à au plus une transition en amont et au plus une transition en aval.

Le réseau de Petri est alors un graphe d'événements.

2.1.5. Mise en équation d'un graphe d'événements.

Nous avons vu que l'algèbre $(R, \max, +)$ peut donner un modèle "linéaire" de l'évolution d'un réseau de Petri, si celui-ci est un graphe d'événements temporisé. Pour clarifier les idées, nous allons reprendre la mise en équation dans ce cas.

Définition : (G.W. BRAMS [1])

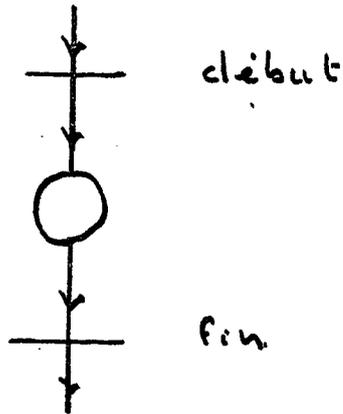
Un graphe d'événements est un réseau de Petri tel que chaque place est reliée à exactement une transition en entrée et une transition en sortie par des arcs de valeurs 1.

Règle de fonctionnement : Pour avoir un modèle déterministe, il faut imposer la règle de fonctionnement suivante : **Toute transition a lieu dès que les conditions nécessaires sont satisfaites.** Rappelons que pour un graphe d'événements, il n'y a jamais de "conflit structurel", donc jamais de choix à faire entre plusieurs possibilités.

Temporisation : Dans le cadre d'un graphe d'événements, seuls sont à étudier les réseaux P-temporisés (CHRETIENNE [3]) : à chaque place est associée une durée minimale de séjour des marques.

En effet, la durée de fonctionnement d'une transition peut être ajoutée aux places en aval de cette transition. Il n'y a pas d'ambiguïté puisque toute place suit une unique transition.

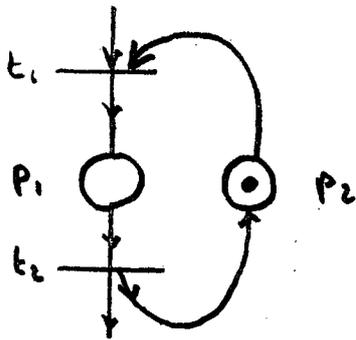
Si l'on désire observer l'événement représenté par une transition non-instantanée, il suffit de remplacer celle-ci par une place encadrée par deux transitions qui représenteront le début et la fin de l'événement :



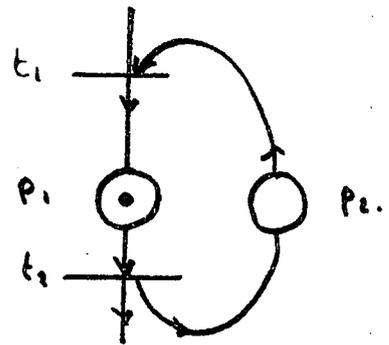
La présence du jeton dans la place signifie que l'événement est en cours.

Les transitions seront donc toutes instantanées. Il n'y a pas de problème pour décider si un jeton peut franchir une transition avant la fin du passage du jeton précédent.

La "saturation" d'une transition peut être modélisée par une boucle du type :



t_1 peut avoir lieu



t_1 ne pourra avoir lieu qu'après t_2 .

On peut associer :

- à P_1 une durée de fonctionnement
- à P_2 une durée de recyclage.

Le réseau reste un graphe d'événements.

Variables d'état. Mise en équation :

Soit $T = \{1, 2, \dots, d\}$ l'ensemble des transitions d'un graphe d'événements ; $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ l'ensemble de ses places et M_0 le marquage initial.

La durée minimale de séjour dans une place est donnée par la fonction :

$$p_i \rightarrow \delta(p_i).$$

On décrira le fonctionnement du réseau par les dates d'occurrence des transitions : $X_i^{(n)}$ sera la date de la n-ième occurrence de la transition i .

Cette n-ième occurrence peut avoir lieu dès la n-ième arrivée d'un jeton dans chacune des places $p \in \gamma^-(i)$. Chaque place $p \in \gamma^-(i)$ aura donc reçu $n - M_0(p)$ jetons de la transition $j(p) = \gamma^-(p)$ (une seule transition en amont d'une place).

Donc, les X_i sont liés aux $X_{j(p)}$ par la relation :

$$X_i^{(n)} = \text{Max} \{X_{j(p)}^{n-M_0(p)} + \delta(p) \mid p \in \gamma^-(i), j(p) = \gamma^-(p)\}$$

Introduisons la fonction :

$$a_\ell(j, i) = \max \{ \delta(p) : p \in \gamma^-(i), j = \gamma^-(p), M_0(p) = \ell \}$$

ε si l'ensemble des contraintes est vide.

Le système (2.1) peut se réécrire :

$$X_i^{(n)} = \max_{\ell, j} \{X_j^{(n-\ell)} + a_{\ell}(j, i)\}$$

ce qui donne dans le dioïde $(\mathbb{R}, \max, +)$ le système récurrent matriciel :

$$X^{(n)} = X^{(n)} A_0 \otimes \dots \otimes X^{(n-k)} A_k$$

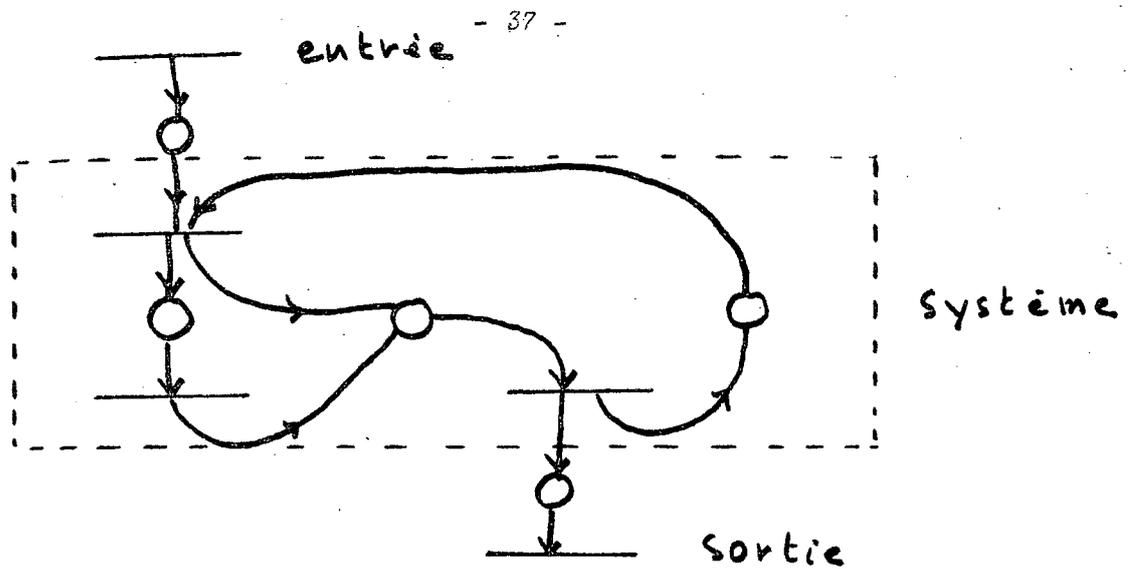
avec :

- . x vecteur ligne (x_1, \dots, x_d) .
- . le retard maximal k étant donné par le marquage initial maximum des places (nombre de jetons maximum dans une place dans le marquage initial).
- . le graphe d'événements est "vivant" si et seulement si tout circuit contient au moins un jeton dans le marquage initial. Ce qui implique que la matrice A_0 est sans circuit.
- . les conditions initiales peuvent être données a priori, ou considérées comme "libres" : $x^{(0)} = x^{(-1)} = \dots = x^{(-n)} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$.

2.1.6. Réseaux avec entrées et sorties :

On peut considérer que le réseau reçoit certains jetons de l'extérieur et en produit d'autres. Par exemple, on peut l'étudier comme un sous-graphe extrait d'un graphe d'événements.

Par souci d'homogénéité des notations, on considèrera que les entrées sont des transtions qui alimentent une place qui sert de stock ; les sorties sont des transitions.



On considérera :

- les dates d'arrivées des jetons en entrée.
- les dates de sortie des jetons.

Il suffit de reprendre la mise en équation du réseau en séparant les places internes des places d'entrée, et en ajoutant les équations déterminant les dates de sortie.

On obtient un système de la forme :

$$x^n = x_n^A_0 + x^{n-1} A_1 \oplus \dots \oplus x^{n-k} A_k \oplus u_n^B_0 \oplus \dots \oplus u_{n-l}^B_l$$

$$y^n = x^n C_0 \oplus \dots \oplus x^{n-r} C_r$$

où (x^n) est la suite des dates de transitions internes.

(u^n) est la suite des dates d'entrées de jetons.

(y^n) est la suite des dates de sorties de jetons.

A_i est donnée par les places internes occupées par i jetons initialement.

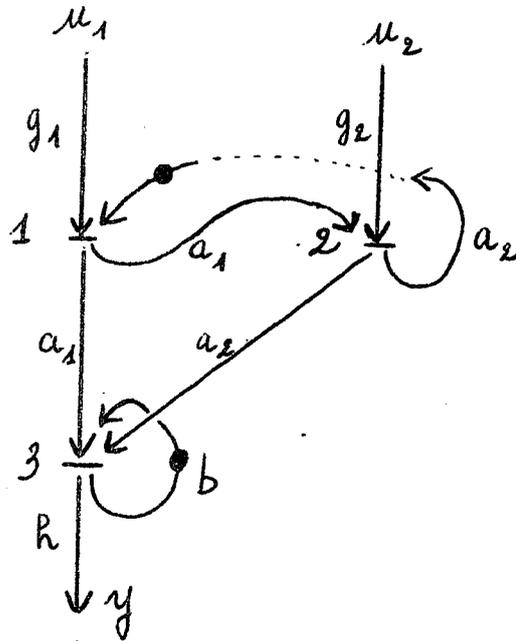
B_i dépend des stocks d'entrée occupés par i jetons initialement.

C_i dépend des places de sortie occupées initialement par i jetons.

En général, compte tenu du rôle des entrées et des sorties, seuls subsistent les termes G_0 et H_0 car les places d'entrée et de sortie sont vides.

2.1.7. Mise en équation.

Exemple 1 :



- deux entrées u_1, u_2
- trois états internes x_1, x_2, x_3
- une sortie y
- deux arcs marqués $2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$.

Si $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$,

$$(1) \quad \begin{cases} x^{n+1} = x^n A_0 \oplus x^n A_1 \oplus u^{n+1} B \\ y^{n+1} = x^{n+1} C \end{cases}$$

avec ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} \epsilon & a_1 & a_1 \\ \epsilon & \epsilon & a_2 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ a_2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} g_1 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & g_2 & \epsilon \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ h \end{bmatrix}$$

Comme la matrice A_0 est sans circuit, le système (1) s'écrit encore :

$$x^{n+1} = x^n A_1 A_0^* \oplus u^{n+1} B A_0^*$$

$$y^{n+1} = x^{n+1} C$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} \epsilon & a_1 & a_1 & a_2 \\ \epsilon & \epsilon & & a_2 \\ \epsilon & \epsilon & & \epsilon \end{bmatrix}$$

Dans $A_1 A_0^*$ il ne reste que deux lignes non identiques à ϵ : celles correspondant aux sommets origine d'un arc marqué.

Cette remarque permet de réduire la dimension des états internes à 2 :

$$\bar{x}^n = (x_2^n, x_3^n)$$

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n \bar{A}_1 \oplus u^{n+1} \bar{B}$$

$$y^{n+1} = \bar{x}^{n+1} \bar{C}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 a_2^2 \\ \epsilon & b \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} a_1 g_1 & a_1 a_2 g_1 \\ g_2 & a_2 g_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ h \end{bmatrix}$$

2.1.8. Valeurs propres généralisées.

Considérons un faisceau de matrices $d \times d$:

$$A_z = A_0 \oplus z^{-1} A_1 \oplus \dots \oplus z^{-k} A_k$$

A_0 sans circuit

A ce faisceau est associé un réseau de Petri comportant d transitions (au plus), avec un arc (i,j) de marque r , si $(A_r)_{ij} \neq \epsilon$, $r=1, \dots, k$. Et réciproquement.

Définition : λ est valeur propre généralisée (à gauche) du faisceau A_z si il existe un vecteur ligne x non identique à ϵ tel que $x A_\lambda = x$.

Théorème : Il y a équivalence entre :

1° - λ est valeur propre généralisée à gauche de A_z

2° - λ est valeur propre généralisée à gauche de

$$\bar{A}_z = z^{-1} A_1 A_0^* + \dots + z^{-k} A_k A_0^*$$

3° - λ est valeur propre à gauche de la matrice :

$$\begin{bmatrix} A_1 A_0^* & E & & \epsilon \\ & \epsilon & E & \\ & & & E \\ A_k A_0^* & & & \epsilon \end{bmatrix}$$

(par abus de notations, ϵ désigne aussi un bloc-matrice de dimensions quelconques, nul).

Démonstration immédiate.

Théorème :

Le nombre de valeurs propres généralisées (à gauche et à droite) est égal au nombre de composantes fortement connexes (non dégénérées) de A_z . La valeur propre associée à une composante connexe est égale au minimum des z tel que tous les circuits de cette composante soient de poids négatif ou nul.

Démonstration :

Lorsque A_Z est fortement connexe :

$$\lambda = \max_{\gamma} \frac{w(\gamma)}{n(\gamma)}$$

γ circuit du réseau de Petri associé à A_Z

$w(\gamma)$ poids de ce circuit

$n(\gamma)$ nombre de jetons de ce circuit

L'unicité de λ s'obtient alors comme pour une matrice fortement connexe (cf. [2]).

Le cas générique du cas général est celui de deux composantes fortement connexes :

$$A_Z = \begin{bmatrix} A_Z^{11} & A_Z^{12} \\ \varepsilon & A_Z^{22} \end{bmatrix}$$

A_Z^{11} fortement connexe de valeur propre λ_1 , $A_Z^{12} \neq \varepsilon$,

A_Z^{22} fortement connexe de valeur propre λ_2 .

On démontre alors le résultat suivant :

	v.p. à gauche	v.p. à droite
si $\lambda_1 > \lambda_2$	λ_1 et λ_2	λ_1
si $\lambda_1 < \lambda_2$	λ_2	λ_1 et λ_2

Nous nous limiterons à la première ligne du tableau. Soient x_1, x_2, p_1 tels que :

$$x_1 A_{\lambda_1}^{11} = x_1$$

$$x_2 A_{\lambda_2}^{22} = x_2$$

$$A_{\lambda_1}^{11} p_1 = p_1$$

Les vecteurs (ϵ, x_2) et (p_1, ϵ) vérifient :

$$(\epsilon, x_2) A_{\lambda_2} = (\epsilon, x_2)$$

$$A_{\lambda_1} (p_1, \epsilon) = (p_1, \epsilon)$$

Soit maintenant un vecteur de la forme (x_1, y) :

$$(x_1, y) A_{\lambda_1} = (x_1 A_{\lambda_1}^{11}, x_1 A_{\lambda_1}^{12} \oplus y A_{\lambda_1}^{22})$$

Pour que $x_1 A_{\lambda_1}^{12} \oplus y A_{\lambda_1}^{22} = y$, il suffit que $y = x_1 A_{\lambda_1}^{12} (A_{\lambda_1}^{22})^*$.

Ce qui est possible car $\lambda_1 > \lambda_2$ entraîne que tous les circuits de $A_{\lambda_1}^{22}$ sont de poids strictement négatifs.

Le fait que λ_1 et λ_2 sont les seules v.p. possibles est facile à vérifier.

Exemple 1 :

$$A_z = \begin{bmatrix} \epsilon & a_1 & a_1 \\ z^{-1} a_2 & \epsilon & a_2 \\ \epsilon & \epsilon & z^{-1} b \end{bmatrix}$$

Deux composantes connexes, donc deux v.p. :

$$\lambda_1 = a_1 a_2, \quad \lambda_2 = b$$

Pour l'état réduit \bar{x} , on trouve :

$$\bar{A}_z = \begin{bmatrix} z^{-1}a_1a_2 & z^{-1}a_1a_2 \\ \varepsilon & z^{-1}b \end{bmatrix}$$

ce qui donne bien le même résultat $\lambda_1 = a_1a_2$, $\lambda_2 = b$.

2.1.9. Réponse périodique.

Le but général de ce n° serait le suivant : étant donné un système ARMA matriciel,

$$x^{n+1} = x^{n+1}A_0 \oplus x^nA_1 \oplus \dots \oplus x^{n-k}A_k \oplus U^{n+1}B$$

$$y^{n+1} = x^{n+1}C$$

si les entrées u sont périodiques de période ω , alors les sorties y seront après un régime transitoire éventuel, également périodiques, de période :

- ω si ω est plus grand que la plus grande valeur propre généralisée à gauche du faisceau A_z .

- la plus grande valeur propre à gauche dans le cas contraire, en supposant (pour simplifier) qu'il existe un chemin joignant la composante connexe associée à la plus grande v.p. et chaque sortie.

Nous nous limiterons en fait à vérifier ce résultat sur deux exemples.

Exemple 1 : On reprend le système d'équations (1). En passant aux transformées en z :

$$U(z) = \sum_n z^{-n} u^n$$

$$X(z) = \sum_n z^{-n} x^n$$

$$Y(z) = \sum_n z^{-n} y^n$$

on obtient les relations (générales) :

$$X(z) = X(z)A_z \oplus U(z)B$$

$$Y(z) = X(z) C.$$

D'où :

$$(2) \quad Y(z) = U(z) B A_z^* C.$$

Dans notre cas :

$$A_z = \begin{bmatrix} \epsilon & a_1 & a_1 \\ z^{-1}a_2 & \epsilon & a_2 \\ \epsilon & \epsilon & z^{-1}b \end{bmatrix}$$

$$A_z^* = \begin{bmatrix} (z^{-1}a_1a_2)^* & a_1(z^{-1}a_1a_2)^* & a_1a_2[z^{-1}(a_1a_2 \oplus b)]^* \\ z^{-1}a_2(z^{-1}a_1a_2)^* & (z^{-1}a_1a_2)^* & a_2[z^{-1}(a_1a_2 \oplus b)]^* \\ \epsilon & \epsilon & (z^{-1}b)^* \end{bmatrix}$$

d'où :

$$(3) \quad Y(z) = U_1(z)g_1 a_1a_2 [z^{-1}(a_1a_2 \oplus b)]^* \oplus U_2(z)g_2a_2 [z^{-1}(a_1a_2 \oplus b)]^* h$$

Supposer les entrées périodiques de période ω entraîne que :

$$U_1(z) = k_1(\omega z^{-1})^*$$

$$U_2(z) = k_2(\omega z^{-1})^*$$

En reportant dans (3) et utilisant la relation générale $a^* b^* = (a \oplus b)^*$, il vient :

$$(4) \quad Y(z) = [z^{-1}(a_1 a_2 \oplus b \oplus \omega)]^* (k_1 g_1 a_1 a_2^h \oplus k_2 g_2 a_2^h)$$

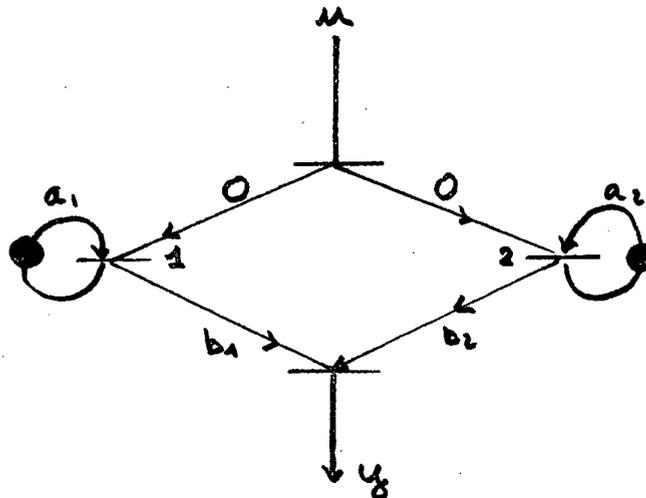
La relation (4) indique que la sortie y :

- est périodique de période $a_1 a_2 \oplus b \oplus \omega$, sans régime transitoire.

- le coefficient $k_1 g_1 a_1 a_2^h + k_2 g_2 a_2^h$ permet de calculer le "déphasage" entre les jetons d'entrée et de sortie (il s'agit formellement plutôt d'un "gain" qui "multiplie" la réponse périodique).

Un calcul analogue sur l'état réduit donnerait le même résultat.

Exemple 2 : Il a pour but de mettre en évidence l'existence d'un régime transitoire.



$$x^{n+1} = x^n A_1 \oplus u^{n+1} B$$

$$y^{n+1} = x^{n+1} C$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & \epsilon \\ \epsilon & a_2 \end{bmatrix}$$

$$B = (\epsilon, \epsilon)$$

$$C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{D'après (2) : } Y(z) = U(z) B A_1^* C$$

avec

$$A_z^* = \begin{bmatrix} (a_1 z^{-1})^* & \epsilon \\ \epsilon & (a_2 z^{-1})^* \end{bmatrix}$$

d'où $Y(z) = U(z) [b_1 (a_1 z^{-1})^* \oplus b_2 (a_2 z^{-1})^*]$.

Et pour $U(z) = (\omega z^{-1})^*$

$$Y(z) = b_1 [(a_1 \oplus \omega) z^{-1}]^* \oplus b_2 [(a_2 \oplus \omega) z^{-1}]^* .$$

Introduisons les hypothèses supplémentaires : $a_1 > a_2$, $a_1 b_1 < a_2 b_2$.

a) - si $\omega > a_1$, $Y(z) = (\omega z^{-1})^* b_2$.

- . pas de régime transitoire
- . déphasage b_2

b) - si $\omega < a_2$, $Y(z) = b_1 (a_1 z^{-1})^* \oplus b_2 (a_2 z^{-1})^*$. Soit n_0 le plus petit instant où $b_1 a_1^n \geq b_2 a_2^n$ alors :

$$Y(z) = b_2 \oplus b_2 a_2 z^{-1} \oplus \dots \oplus b_2 a_2^{n_0-1} z^{-n_0+1} \oplus b_1 (a_1 z^{-1})^*$$

. un régime transitoire de longueur n_0 où les sorties apparaissent avec la période a_2 .

. puis pour $n \geq n_0$, le régime périodique de période a_1 .

c) - si $a_2 < \omega < a_1$, $Y(z) = b_1 (a_1 z^{-1})^* \oplus b_2 (\omega z^{-1})^*$

Cas similaire à b) en remplaçant a_2 par ω .

2.1.10. Stabilité du système libre.

Le but de n^0 est d'étudier le comportement asymptotique du système libre :

$$x_{n+1} = x_{n+1}^0 A \oplus x_n^1 A \oplus \dots \oplus x_{n-k}^k A .$$

Compte tenu du caractère absorbant de l'addition, cela revient à entreprendre une étude analogue à celle du §2.1.9 dans le cas limite où tous les jetons d'entrée seraient disponibles à l'instant 0 (entrée de période 0).

Etant donné un faisceau $A_Z = A_0 \oplus z^{-1}A_1 \oplus \dots \oplus z^{-k}A_k$, A_0 sans circuit, $A_Z^{11}, \dots, A_Z^{rr}$, l'ensemble de ses composantes fortement connexes, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, les v.p. associées à ces composantes, nous appellerons circuit critique, un circuit γ_i de A_Z^{ii} , comportant δ_i jetons et tel que :

$$\frac{w(\gamma_i)}{\delta_i} = \max_{\gamma \in A_Z^{ii}} \frac{w(\gamma)}{n(\gamma)} = \lambda_i$$

Par la suite, nous ferons l'hypothèse simplificatrice :

- (5) $\forall i = 1, \dots, r$, il existe un seul circuit critique (γ_i, δ_i) dans A_Z^{ii} .

Théorème :

Sous l'hypothèse (5) et si A_Z est fortement connexe, la solution de

$$x_{n+1} = x_{n+1} A_0 \oplus x_n A_1 \oplus \dots \oplus x_{n-k} A_k$$

vérifie à partir d'un certain rang n_0 :

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_{n+\delta} = \lambda^\delta x_n$$

λ v.p. de A_Z

δ nombre de jetons du circuit critique.

Démonstration : En posant $X_n = (x_n, \dots, x_{n-k})$ le problème revient à étudier le système, $X_{n+1} = X_n A$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 A_0^* & E & & \\ & \epsilon & E & \epsilon \\ & & & E \\ A_k A_0^* & & & \epsilon \end{bmatrix}$$

avec A matrice fortement connexe de v.p. λ et ne comportant qu'un circuit critique de longueur δ . Le résultat découle donc de [2].

Théorème :

Sous l'hypothèse (10.1) et si :

$$A_Z = \begin{bmatrix} A_Z^{11} & A_Z^{12} \\ \epsilon & A_Z^{22} \end{bmatrix}$$

$A_Z^{12} \neq \epsilon$
 λ_i v.p. de A_Z^{ii}
 δ_i nb de jetons du circuit critique, $i=1,2$.

La solution $x_n = (x_n^1, x_n^2)$ de :

$$x_{n+1} = x_{n+1} A_0 \otimes \dots \otimes x_{n-k} A_k, \quad x_0^1 \neq \epsilon$$

vérifie à partir d'un certain rang n_0 :

a) - $n \geq n_0$, $\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow x_{n+\delta} = \lambda_1^\delta x_n$

$$\delta = \text{p.p.c.m.}(\delta_1, \delta_2).$$

b) - $n \geq n_0$, $\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow$

$$x_{n+\delta_1}^1 = \lambda_1^{\delta_1} x_n^1$$

$$x_{n+\delta_2}^2 = \lambda_1^{\delta_2} x_n^2.$$

Démonstration : Comme précédemment, le problème revient à étudier la cyclicité des puissances d'une matrice A qui est maintenant de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ \epsilon & A^{22} \end{bmatrix}$$

A^{11} de v.p. λ_1 et de cyclicité δ_1
 A^{22} de v.p. λ_2 et de cyclicité δ_2

On peut toujours supposer $\delta_1 = \delta_2 = 1$ (considérer si nécessaire A^δ).
 Dans ce cas, A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{bmatrix} (A^{11})^n & B^n \\ \epsilon & (A^{22})^n \end{bmatrix}$$

avec :

$$B^{n+1} = (A^{11})^n A^{12} \oplus (A^{11})^{n-1} A^{12} A^{22} \oplus \dots \oplus A^{11} A^{12} (A^{22})^{n-1} \oplus A^{12} (A^{22})^n$$

Compte tenu des absorptions, on obtient pour n suffisamment grand :

a) - si $\lambda_1 > \lambda_2$:

$$B^{n+1} = (A^{11})^n (A^{12}) [\lambda_1^{-1} A^{22}]^*$$

b) - si $\lambda_1 < \lambda_2$:

$$B^{n+1} = [\lambda_2^{-1} A^{11}]^* (A^{12}) (A^{22})^n$$

d'où le résultat.

Remarque : Le cas $\lambda_1 < \lambda_2$, correspond à une désynchronisation des états internes du système, ce qui à notre avis correspond à une notion d'instabilité.

Définition : Le système libre

$$x_{n+1} = x_{n+1} A_0 \oplus x_n A_1 \oplus \dots \oplus x_{n-k} A_k$$

A_0 sans circuit

est stable, si il existe λ tel que pour toute condition initiale dont aucune coordonnée n'est égale à ϵ et toute composante i :

$$\lim_n (x_n^i)^{1/n} = \lambda$$

(les suites x_n^i ont même direction asymptotique).

Le résultat suivant est alors immédiat :

Théorème :

Il y a équivalence entre :

- 1) - Le système libre est stable
- 2) - Il existe λ, δ tel que pour toute condition initiale

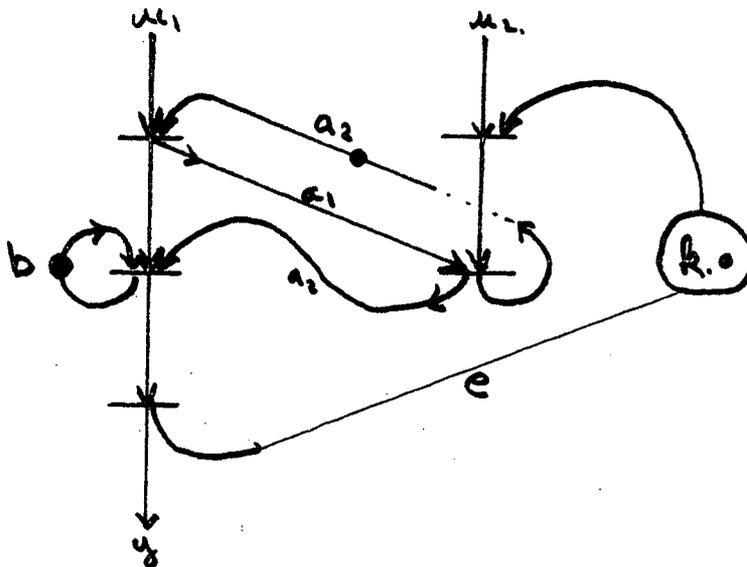
$$n \geq n_0 \Rightarrow x_{n+\delta} = \lambda^\delta x_n$$

- 3) - Les composantes connexes initiales du faisceau ont toutes la même valeur propre égale à la plus grande valeur propre du faisceau.

Remarque : Dans un système stable, tous les états internes se synchronisent (après un régime transitoire) sur la période (δ, λ^δ) . Et il n'y a pas accumulation de jetons à l'intérieur du système.

2.1.11. Stabilisation par retour.

Si on revient à l'exemple 1 avec $b > a_1 a_2$, ce réseau est instable. Par contre, un retour (un arc marqué) de la sortie sur l'entrée 2 le rend fortement connexe, donc stable.



Cette possibilité de stabilisation repose de façon générale, sur les notions de controllabilité et d'observabilité suivantes :

- controlable : si toute composante connexe est reliée à une entrée par un chemin dans le réseau ;
- observable : si toute composante connexe est reliée à une sortie par un chemin.

Un système controlable et observable peut donc être rendu stable par retour des sorties. Si on augmente la marque des arcs de retour, la performance du système bouclé (la valeur propre), va certainement être la plus grande valeur propre du système initial. Par contre, le nombre de jetons d'entrée présent dans le système va augmenter avec la marque de ces arcs de retour : on accroît ainsi le déphasage entre entrée-sortie. Un problème naturel est donc de trouver les marques minimales des arcs de retour qui assurent la performance optimale du système bouclé.

Indiquons sur l'exemple 1 une méthode de résolution de ce problème : Si k est le nombre de jetons de l'arc de retour, le faisceau associé au système bouclé devient :

$$A_z(k) = \begin{bmatrix} \epsilon & a_1 & a_1 \\ z^{-1}a_2 & \epsilon & a_2 \\ \epsilon & z^{-k}hg_2 & z^{-1}b \end{bmatrix}$$

Il s'agit de trouver le minimum des k tel que la v.p. $\lambda(k)$ de $A_z(k)$ soit égale à b (dans l'hypothèse $b > a_1 a_2$). Pour cela, il suffit d'étudier les poids moyens des circuits empruntant l'arc de retour :

$$a_2 hg_2 < b^k, \quad a_1 a_2 hg_2 < b^{k+1}$$

Comme $b > a_1 a_2$ il reste seulement la contrainte

$$a_2 hg_2 < b^k$$

Et k est le plus petit entier réalisant cette contrainte.

III - ETUDE D'UNE STRUCTURE ALGEBRIQUE ABSTRAITE. LES MODULOIDES.

3.1. Nécessité d'une structure abstraite.

Nous avons montré une application du calcul matriciel sur DRC. Celui-ci n'est possible que si les objets étudiés sont donnés à priori sous forme de tableaux à coefficients dans DRC.

Un premier problème est de déterminer si les objets sur lesquels sont définies des règles de calcul, peuvent être représentées par des matrices sur DRC.

L'étude précédente a permis d'introduire des objets qui ne sont pas des matrices et qui sont pourtant munis de règles de calcul identiques (par exemple : les suites).

Considérons le problème suivant, particulièrement important dans l'étude des suites : on peut vouloir identifier les suites ayant le même comportement asymptotique. Pour cela, on peut définir la relation suivante :

$$(u_n) R (v_n) \Leftrightarrow \text{il existe } N \text{ tel que } \forall n > N \quad u_n = v_n$$

Il est clair que R est une relation d'équivalence. D'autre part, si $(u_n) R (v_n)$ et $(u'_n) R (v'_n)$ alors $(u_n \oplus u'_n) R (u_n \oplus v'_n)$ et $(\lambda u_n) R (\lambda v_n)$.

La relation R est compatible avec les opérations. On peut donc définir des opérations sur les classes d'équivalence par :

$$\text{classe de } (u_n + v_n) \stackrel{\Delta}{=} \text{classe de } (u_n) \oplus \text{classe de } (v_n)$$

$$\text{classe de } (\lambda u_n) \stackrel{\Delta}{=} \lambda \cdot \text{classe de } (u_n).$$

L'espace quotient est pourvu d'une structure algébrique, mais il est difficile de décrire ses éléments de manière univoque par des tableaux ou suites de scalaires.

Une difficulté de même nature apparaît lorsqu'on définit une relation R' sur des matrices par :

a et b étant des matrices de même dimension, on pose :

$$a R' b \Leftrightarrow A.a = A.b \quad (\text{où } A \text{ est une matrice})$$

Là aussi, on peut définir des opérations sur l'espace quotient.

Il est donc indispensable de définir une structure algébrique abstraite, qui prolonge le calcul matriciel, et qui permette de formaliser les problèmes précédents.

3.2. Définitions des modulofdes, premières propriétés.

3.2.1. Définition.

On appellera modulofde réel croissant (MRC) un ensemble E muni de :

- une loi interne T, associative, commutative.
- une loi externe *, de DRC x E dans E

vérifiant les conditions :

a) - E possède un élément neutre $\bar{\varepsilon}$ pour la loi T

b) - $\forall x \in E \quad e * x = x$

c) - $\forall (x, y) \in E^2$

$$\lambda * (xTy) = (\lambda * x) T(\lambda * y)$$

$$\forall \lambda \in \text{DRC}$$

d) - $\forall \lambda \in E$

$$(\lambda \oplus \mu) * x = (\lambda * x) T(\mu * x)$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \text{DRC}^2$$

e) - $\forall \lambda \in E$

$$(\lambda \cdot \mu) * x = \lambda * (\mu * x)$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \text{DRC}^2$$

f) - $\forall x \in E$

il existe $\lambda \in \text{DRC}$ tq $(\lambda * y)Tx \neq x$

$$\forall y \in E \quad y \neq \bar{\varepsilon}$$

Remarques :

- la propriété d permet de faire l'abus de notations :

$$x \top y = x \oplus y \quad \text{pour } (x,y) \in E^2$$

- la propriété e permet de faire l'abus de notation :

$$\lambda * x = \lambda .x = \lambda x \quad \text{pour } \lambda \in \text{DRC}, x \in E.$$

Nous emploierons ces notations dans la suite.

On appellera scalaire un élément de DRC et vecteur un élément de E.
On appellera $\bar{\epsilon}$ élément absorbant ou minimal de E (justifications plus loin).
On notera $E^* = E \setminus \{\bar{\epsilon}\}$.

3.2.2. Propriétés liées à l'existence d'un ordre partiel.

Propriété : Si E est un moduloïde, tout élément de E est idempotent par la loi \oplus

Démonstration : $\forall x \in E$

$$x = e . x = (e \oplus e)x = x \oplus x$$

Cela permet de faire la définition suivante :

Théorème et définition : on définit une relation d'ordre sur E par :
 $x \geq y$ dans E ssi $x \oplus y = x$.

Démonstration : $x \oplus x = x$ donc $x \geq x$

$$x \geq y \text{ et } y \geq x \Rightarrow x \oplus y = x = y \oplus x = y$$

$$\begin{aligned} x \geq y \text{ et } y \geq z &\Rightarrow x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y = x \\ &= (x \oplus y) \oplus z = x \oplus z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \oplus z = x \Rightarrow x \geq z.$$

Propriété : Les opérations \oplus et $*$ sont compatibles avec cet ordre, c'est-à-dire :

$$(x,y) \in E^2, \lambda \in D, \quad x \geq y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$$

$$(x,y,z) \in E^3, \quad x \geq y \Rightarrow x \oplus z \geq y \oplus z$$

Remarque : Cet ordre est partiel en général.

Propriété : Pour $(x,y) \in E^2$
 $x \oplus y$ est le plus petit majorant de $\{x,y\}$ pour l'ordre sur E .

Démonstration : si $a \geq x$ et $a \geq y$ alors

$$a \oplus y \geq x \oplus y \quad \text{or } a \oplus y = a \quad \text{donc } a \geq x \oplus y$$

donc, tout majorant commun à x et y est majorant de $x \oplus y$. Or $x \oplus y$ est un tel majorant commun, donc c'est le plus petit.

Remarque : Cela justifie l'abus de notation $x T y = x \oplus y$ car T réalise l'analogue d'un max (opération \oplus) pour l'ordre partiel.

3.2.3. Exemples fondamentaux.

- DRC est un moduloïde réel croissant.

- DRC^n , DRC^N , DRC^Z , munis des structures précédemment introduites sont des moduloïdes réels croissants.

- $M_{n,p}^{(DRC)}$ = {matrices $n \times p$ à coefficients dans DRC} est un moduloïde réel croissant.

Considérons R^2 muni des opérations : $x T y$ réalise le max de (x,y) pour l'ordre lexicographique. $\lambda * x$ est défini par : si $x = (a,b)$,
 $\lambda . x = (\lambda+a, \lambda+b)$.

Cette structure vérifie toutes les conditions pour être un moduloïde sauf la propriété f.

$$\forall \lambda \in \text{DRC} \quad \lambda \cdot (\varepsilon, e) = (\varepsilon, \lambda) < (e, e)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot (\varepsilon, e) \text{ T } (e, e) = (e, e)$$

Nous verrons plus loin l'importance de cette propriété **f** pour la démonstration des règles de calcul élémentaires, qui ne sont pas valable pour cet exemple-ci, bien qu'il ait toutes les propriétés "combinatoires" des moduloïdes.

3.2.4. Règles de calcul.

<u>Propriété</u> :	$\forall \lambda \in \text{DRC}^*$	$\lambda \cdot \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$
	$\forall x \in E$	$\varepsilon \cdot x = \bar{\varepsilon}$

Démonstration : si $\lambda \neq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \forall x \quad \lambda \cdot \left(\frac{e}{\lambda} x \oplus \bar{\varepsilon} \right) &= x \oplus \lambda \bar{\varepsilon} \\ &= \lambda \cdot \left(\frac{e}{\lambda} x \right) = x. \end{aligned}$$

donc, si $\lambda \neq \varepsilon$, $\lambda \cdot \bar{\varepsilon}$ est élément neutre pour \oplus dans E , or cet élément neutre est nécessairement unique : il suffit de considérer $\lambda \bar{\varepsilon} \oplus \bar{\varepsilon} = \lambda \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$.

Le cas $\lambda = \varepsilon$ résulte de la suite :

x étant fixé dans E :

$$(\varepsilon \oplus e) x = ex = x$$

donc, pour tout λ de DRC

$$\lambda (\varepsilon x) \oplus x = (\lambda \varepsilon \oplus e)x = (\varepsilon \oplus e)x = x.$$

D'après la Propriété f, nécessairement $\varepsilon x = \bar{\varepsilon}$.

Propriétés :

- $\lambda \in \text{DRC}, (x,y) \in \mathbb{E}^2 \quad \lambda x = \lambda y \Rightarrow \quad \lambda = \varepsilon \quad \text{ou} \quad x = y$

- $\lambda \cdot x = \bar{\varepsilon} \Rightarrow \lambda = \varepsilon \text{ ou } x = \bar{\varepsilon}$

- $\lambda x = \mu x \Rightarrow \lambda = \mu \text{ ou } x = \bar{\varepsilon}.$

Démonstration : Tout cela résulte de l'existence d'un inverse pour la loi "multiplicative" dans DRC. Seule la démonstration du dernier point est délicate : supposons $\lambda > \mu$ et $\lambda x = \mu x$, alors $\lambda^{-1} \mu < \varepsilon$ et

$$x = (\lambda^{-1} \mu)x = (\lambda^{-1} \mu)^n x$$

Or, pour tout θ de DRC, il existe un n tel que $(\lambda^{-1} \mu)^n < \theta^{-1}$ (n'oublions pas que DRC est \mathbb{R} muni de son ordre usuel et de l'addition !) donc :

$$\theta x \oplus x = \theta((\lambda^{-1} \mu)^n \cdot x) \oplus x$$

or $\theta(\lambda^{-1} \mu)^n < \varepsilon$ donc

$$\theta x \oplus x = x \text{ ceci pour tout } \theta$$

D'après la Propriété f, nécessairement $x = \bar{\varepsilon}$. Donc :

si $\lambda x = \mu x \quad x = \bar{\varepsilon} \text{ ou } \lambda = \mu.$

3.2.5. Ordre strict sur E.

Notation : on notera $x > y$ si $x \geq y$ et $x \neq y$. La propriété f s'écrit alors :

$$\forall x, \forall y \neq \bar{\varepsilon}, \text{ il existe } \lambda \in \text{DRC}$$

tel que $\lambda y \oplus x > x.$

Attention : Cela ne signifie pas que $\lambda y > x$, mais :

$$\lambda y \oplus x > x \Leftrightarrow \text{non } (x > \lambda y)$$

Le caractère archimédien de \mathbb{R} se retrouve dans E . Il n'y a pas d'autre "minimum local" que $\bar{\varepsilon}$ dans E . On comprend alors l'importance de cet axiome puisque toutes les opérations internes découlent des relations d'ordre.

Propriétés :

$$- \lambda \neq \varepsilon, (x, y) \in E^2 \quad x > y \Rightarrow \lambda x > \lambda y$$

$$- (\lambda, \mu) \in \text{DRC}^2, \quad x \in E \quad x \neq \bar{\varepsilon}$$

$$\lambda > \mu \Rightarrow \lambda x > \mu x$$

- il est faux que

$$x > y \Rightarrow x \oplus z > y \oplus z$$

(attention à la confusion due aux notations).

3.2.6. Sommations multiples et séries.

Il peut être utile de distinguer les sommations multiples de scalaires de celles de "vecteurs". En effet, dans le premier cas, le résultat est toujours égal à l'un des termes, ce qui est faux pour les vecteurs.

S'il n'y a pas de risque de confusion, nous emploierons indifféremment le signe Σ . Si une précision s'avère utile, une somme de scalaires sera notée Σ_{Max} .

La notion de série nécessite la définition de la convergence d'une suite, donc d'une topologie. C'est certainement un problème qu'il faut étudier, néanmoins, nous ne l'aborderons pas dans cette étude préalable.

3.2.7. Moduloïde "adjoint".

R.A. Cunnighame-Green a étudié les calculs matriciels sur DRC en introduisant des opérations "adjointes" dans lesquelles le "max est remplacé par le "min". Peut-on étendre cette notion de calcul adjoint au cadre abstrait que nous avons défini ?

Nous avons montré l'existence d'un ordre partiel sur E tel que $x \oplus y$ réalise le plus petit majorant de $\{x,y\}$. De même, on peut montrer que $\{x,y\}$ admet un plus grand minorant : en effet, si a et b sont deux minorants extrêmes pour l'ordre partiel, alors $a \oplus b$ est lui-même un minorant de $\{x,y\}$ plus grand que ceux-ci. Il n'y a donc qu'un seul minorant extrême. On notera celui-ci $x \ominus y$ et il est facile de constater qu'on a défini une opération interne qui joue le rôle de l'adjointe de \oplus , ce qui rejoint la théorie de R.A. Cunnighame-Green.

Néanmoins, $(E, \ominus, *)$ n'est pas un moduloïde réel croissant car $(\lambda \oplus \mu).x \neq \lambda x \oplus \mu x$. Il faut remplacer le max dans les scalaires par un min, or cela revient à changer la représentation au DRC qui sert d'ensemble de scalaires : $(R, \max, +)$ est remplacé par $(R, \min, +)$. Or, nous avons pris le parti de considérer que ces deux ensembles représentent le même objet algébrique. Il serait donc maladroit de manipuler ses deux représentations algébriques.

Pour contourner cette difficulté, il suffit d'introduire une autre multiplication scalaire \times vecteur et un élément $\hat{\epsilon}$ qui remplace $\bar{\epsilon}$; nous définirons $*$ ' par :

$$\lambda *' x = \frac{1}{\lambda} * x \quad \text{si } \lambda \neq \epsilon.$$

$$\epsilon *' x = \hat{\epsilon} \quad \text{si } x \neq \bar{\epsilon}$$

$E^* \cup \{\hat{\epsilon}\}$ muni de \ominus' et $*$ ' est un moduloïde réel croissant.

Cette structure adjointe est différente de celle étudiée par R.A. Cunnighame-Green. L'utilisation de ces espaces adjoints n'a pas semblé indispensable dans cette étude préalable, aussi a-t-elle été laissée en suspens.

3.2.8. Sous-moduloïde.

E un moduloïde réel croissant, F une partie de E .

Définition :

F est un sous-moduloïde de E si :

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad x \oplus y \in F$$

$$\forall \lambda \in \text{DRC}, \quad \forall x \in F, \quad \lambda x \in F.$$

Remarque : F muni des restrictions de \oplus et $*$ est lui-même un moduloïde réel croissant.

Propriété : si F et G sont des sous-moduloïdes de E , $F \cap G$ est un sous-moduloïde de E .

Remarque : Ce n'est pas vrai pour $F \cup G$. La propriété précédente permet d'introduire la définition suivante :

Définition : Si A est une partie d'un moduloïde E , on appellera sous-moduloïde engendré par A , noté $\text{STAB}(A)$, le plus petit sous-moduloïde de E contenant A .

On notera $F \oplus G = \text{STAB}(F \cup G)$, le sous-moduloïde somme des sous-moduloïdes F et G .

3.2.9. Applications compatibles.

E et F sont deux moduloïdes réels croissants. f une application de E dans F .

Définition : f est compatible (avec la structure de Moduloïde). Si

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Par abus de langage, on pourra parler d'application linéaire ou max-linéaire (au sens de DRC), mais il vaut mieux éviter de créer une confusion avec les opérateurs linéaires usuels, car cela nuirait à la compréhension de cette étude.

Propriétés :

Si f est compatible, de E dans F :

- f est croissante pour l'ordre partiel sur E .
- si $E = \text{DRC}^n$ et $F = \text{DRC}^p$ munis de la topologie usuelle de l'ordre sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p , f est continue pour ces topologies.
- $f(\bar{\epsilon}) = \bar{\epsilon}$
- l'image de f est un sous-moduloïde de l'espace F .
- l'image réciproque de $\bar{\epsilon}$ est un sous-moduloïde de E , en général réduit à $\{\bar{\epsilon}\}$.

3.2.10. Structure produit. Espace des suites.

E et F sont deux moduloïdes réels croissants :

Définition et propriété :

Sur $E \times F$ on définit une structure de moduloïde réel croissant par les opérations :

$$(x, y) \oplus (x', y') \stackrel{\Delta}{=} (x \oplus x', y \oplus y')$$

$$\lambda * (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Exemples : $\text{DRC}^2 = \text{DRC} \times \text{DRC}$
 $\text{DRC}^n = \text{DRC}^{n-1} \times \text{DRC}$

Définition et Propriété :

On définit une structure de moduloïde réel croissant sur $E^{\mathbb{N}}$ ou $E^{\mathbb{Z}}$ par :

$$(u_n) \oplus (v_n) \stackrel{\Delta}{=} (u_n \oplus v_n)$$

$$\lambda * (u_n) = (\lambda u_n)$$

Propriété :

L'espace des suites à valeur dans un moduloïde E , qui sont croissantes, pour l'ordre défini sur E , forment un sous-moduloïde de l'espace des suites.

Remarque :

Ce résultat est important car l'étude des phénomènes temporels et de leur synchronisation, telle que nous l'avons abordé avec les réseaux de Petri, amène à considérer exclusivement des suites croissantes.

Nous étudierons en détail les divers espaces de suites, à la fin de cette partie théorique.

3.2.11. Structure quotient.

Définition :

On appellera relation d'équivalence compatible avec la structure de moduloïde réel croissant une relation R telle que :

- si xRy alors, $\forall z (x \oplus z) R (y \oplus z)$
- si xRy alors, $\forall \lambda \in \text{DRC}, (\lambda x) R (\lambda y)$

Propriété : si f est une application compatible de E dans F , alors la relation définie sur E .

$x R y$ ssi $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence compatible.

Définition :

Soit \hat{E} l'espace des classes d'équivalence pour une relation compatible définie sur E . Sur \hat{E} , on définit :

- une loi interne \oplus : $\hat{x} \oplus \hat{y} = (\hat{x \oplus y})$
- une loi externe $*$: $\lambda * \hat{x} = (\widehat{\lambda x})$

Les définitions sont indépendantes du choix des représentants x de \hat{x} et y de \hat{y} .

Dans la suite, on identifiera les notations $\oplus = \oplus$ et $*$ = .

Problème :

Avec $\bar{\varepsilon} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon}$, muni de ces opérations, \hat{E} vérifie évidemment toutes les conditions pour être un moduloïde sauf la propriété f . Celle-ci ne semble pas une conséquence immédiate. Nous n'avons pas pu la démontrer, ni trouver de contre-exemple.

Le problème de l'espace quotient des suites qui ont même comportement asymptotique n'est donc pas résolu.

Propriété :

Si la relation s'écrit $x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ où f est une application compatible de E dans un moduloïde, alors l'espace quotient est un moduloïde.

Démonstration : \hat{x} et \hat{y} sont donnés par leurs représentants x et y . Si $\hat{y} \neq \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon}$ alors $f(y) \neq \bar{\varepsilon}$ donc

il existe λ tel que $\lambda f(y) \oplus f(x) \neq f(x)$

$f(\lambda y \oplus x) \neq f(x)$

$\lambda y \oplus x \neq \hat{x}$ la propriété f est vérifiée.

Remarque :

Ce résultat est en fait une trivialité, puisque si l'espace quotient est un moduloïde, l'injection canonique est une application compatible.

3.2.12. Familles de vecteurs, dépendance, redondance.

Définition : On appellera combinaison max-linéaire d'une famille finie de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ une écriture de la forme $\Sigma \lambda_i v_i$ ou $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{DRC}^n$ sont appelés coefficients.

Remarque :

On peut étendre cette définition aux familles infinies, lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non absorbants. Cela exclut les "véritables" séries, dont l'étude n'apporte rien au problème qui nous intéresse : trouver une famille génératrice finie.

Définition : E est un moduloïde.

Une famille F est dite génératrice de E si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison max-linéaire de vecteurs de F , c'est-à-dire :

$$E = \text{STAB}(F)$$

Remarque 1 :

Dans le cas d'une famille infinie, à priori, il ne faut considérer que les vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire finie des générateurs. Mais cette définition est peu commode pour l'étude des suites, aussi nous utiliserons dans ce cas des combinaisons infinies.

Cependant, certaines conséquences sont différentes selon la définition adoptée. Il faudra considérer les deux cas dans une étude approfondie.

Remarque 2 : Dans l'étude des moduloïdes, il faut oublier toutes les propriétés de cardinalité des familles génératrices, notamment, il faut oublier l'idée intuitive selon laquelle "plus un espace est grand, au sens de l'inclusion, plus le nombre de générateurs nécessaires pour le définir augmente".

Exemple 1 : dans DRC^2

$(\varepsilon, \varepsilon)$ et $(\varepsilon, \varepsilon)$ sont générateurs. Si on considère le sous-moduloïde de DRC^2 constitué des couples (x, y) tels que $(x \neq \varepsilon$ et $y \neq \varepsilon)$ complétés par $(\varepsilon, \varepsilon)$ c'est-à-dire "l'intérieur" de DRC^2 lorsqu'on le représente comme le premier quadrant de R^2 euclidien. Ce sous-moduloïde n'admet aucune famille génératrice finie.

Privé de $(\varepsilon, \varepsilon)$ ce sous-espace est ouvert pour la topologie usuelle ce qui semble lié au résultat précédent. Il semble donc utile de définir une topologie sur les moduloïdes, compatible avec leur structure et leur représentations éventuelles dans R^n .

Exemple 2 : dans DRC^3 , engendré par $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$.
(Nous travaillons ici avec la représentation multiplicative).

Considérons le sous-moduloïde engendré par $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, c'est-à-dire DRC^3 privé d'un cône de section carrée s'appuyant sur la droite $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$. Ce sous-moduloïde est fermé, et strictement inclus dans DRC^3 , or il n'admet pas de famille génératrice de moins de 4 éléments.

Définition : Famille indépendante.

On dit qu'une famille de vecteurs est indépendant ssi pour toute partition de la famille en 2 parties A et B, $STAB(A) \cap STAB(B) = \{\bar{\varepsilon}\}$. Ce $\bar{\varepsilon}$ est le seul vecteur qui s'obtienne comme combinaison max-linéaire de chacune des sous-familles.

Il s'agit de la définition proposée par Gondran-Minoux et par R.A. Cunninghame-Green. Dans le cas de DRC^n , ils ont mis en évidence des tests de dépendance :

- le bidéterminant
- le permanent

Propriété : dans DRC^n , une famille indépendante compte au plus n vecteurs.

Démonstration : montrons que toute famille de n+1 vecteurs de DRC^n est dépendante.

Il suffit de plonger ces $n+1$ vecteurs dans DRC^{n+1} en leur ajoutant une coordonnée égale à ε .

La règle du bidéterminant permet d'affirmer que cette famille est dépendante dans DRC^{n+1} .

Il en résulte que les n premières coordonnées (c'est-à-dire les vecteurs initiaux) sont dépendants dans DRC^n .

Définition : famille redondante.

Une famille est redondante si l'un des vecteurs est combinaison max-linéaire des autres.

Proposition :

- Toute famille redondante est dépendante.
- Toute famille indépendante est non redondante.

Définitions : Un moduloïde est de type fini s'il possède une famille génératrice finie.

- on appellera rang d'une famille le cardinal le plus grand, des familles non redondantes extraites.

- on appellera sous-rang d'une famille le cardinal le plus grand, des familles indépendantes extraites.

Proposition : Sous-rang \leq rang.

Proposition : de toute famille génératrice dénombrable d'un sous-moduloïde, on peut extraire une famille génératrice non redondante (par élimination).

Problème 1 : Le cardinal des familles génératrices non redondantes est-il un invariant des moduloïdes, c'est-à-dire peut-on leur associer une dimension intrinsèque ?

Problème 2 : Peut-on représenter tout moduloïde de type fini par des calculs matriciels, c'est-à-dire manipulant un nombre fini de coordonnées. Pour cela, il faut pouvoir représenter les vecteurs par des matrices de DRC^n .

Définition :

- on appelle plongement d'un moduloïde E dans DRC^n une application max-compatible et injective de E dans DRC^n .

- si un tel plongement existe, on appellera dimension sous-jacente, ou sous-dimension de E , le plus petit entier n tel qu'il existe un plongement de E dans DRC^n .

Remarque :

On sait qu'il existe des sous-moduloïdes de DRC^n qui n'ont pas de famille génératrice finie ; ceux-ci ont néanmoins une sous-dimension finie.

Il semble qu'il y ait des moduloïdes de type fini, qui cependant n'admettent aucun plongement dans DRC^n : les espaces de polynômes (c'est une conjecture).

On évitera de parler de sous-dimension infinie, car il faut distinguer le cas de l'espace des suites, qui se comporte presque comme DRC^n , de certains moduloïdes (espaces de polynômes) dans lesquels la difficulté vient du fait qu'il n'y a pas de coordonnées max-linéaires.

Propriété : un moduloïde E peut aussi être considéré comme une famille infinie de vecteurs. Ce qui permet d'écrire : si sous-dim (E) est définie :

$$\text{Sous-dim}(E) \geq \text{sous-rang}(E).$$

Démonstration : Si E se plonge dans R^n , une famille indépendante de E compte au plus n -vecteurs.

Remarque :

La recherche de la dimension sous-jacente et la recherche des familles génératrices minimales sont liées. Il semble que la sous-dimension de E soit égale au sous-rang d'une famille génératrice non-redondante (rappel : le sous-rang est défini par les plus grandes familles indépendantes extraites), par contre, le cardinal de cette famille génératrice est généralement strictement supérieur.

Ces résultats ne sont que des conjectures. Une étape importante sera franchie si l'on montre que, de toute famille, on peut extraire une famille génératrice non redondante unique (modulo des multiplications par des scalaires).

3.3. Méthodes analytiques.

3.3.1. Projection scalaire.

Définition : E est un moduloïde réel croissant

$$x \in E, y \in E, y \neq \bar{\epsilon}$$

On appellera projection scalaire de x sur y :

$$P(x/y) = \max \{ \lambda \in \text{DRC} / \lambda y \leq x \}$$

Démonstration : Vérifions que cette définition a un sens. Cela résulte de la propriété f de la définition des moduloïdes

il existe μ tel que	$\mu.y \oplus x \neq x$
donc	$\mu.y \oplus x > x$
donc $\forall \lambda > \mu$	$\lambda y \oplus x > x$

donc $\{ \lambda \in \text{DRC} / \lambda y \leq x \}$ est majoré par μ , or cet ensemble contient ϵ et est donc non vide.

Définition :

On appellera birapport de $x \neq \bar{\epsilon}$ et $y \neq \bar{\epsilon}$

$$\pi(x,y) = P(x/y).P(y/x)$$

3.1.2. Propriétés.

- $P(\lambda x/y) = \lambda P(x/y)$
- $\lambda \neq \epsilon \quad P(x/\lambda y) = \lambda^{-1} P(x/y)$
- $P(x \oplus z/y) \geq P(x/y) \oplus P(z,y)$
- $\pi(\lambda x, \mu y) = \pi(x,y)$
- $(P(x(y \oplus z)))^{-1} \leq (P(x/y))^{-1} \oplus (P(x/z))^{-1}$
- $\mu \leq P(x/y) \Rightarrow x \oplus \mu y = x$
- $P(x/z) \geq P(x/y).P(y/z)$
- $\pi(x,y) \leq e, \forall(x,y)$
- $\pi(x,y) = e \Leftrightarrow x = y.$

3.1.3. Remarque importante.

Il peut ne pas y avoir égalité dans la formule

$$P(x \oplus y/z) \geq P(x/z) \oplus P(y/z)$$

Considérons l'exemple suivant :

$$x = (e,2) \quad y = (2,e)$$

$$z = (2,2) = x \oplus y$$

$$P(x/z) = P(y/z) = 2^{-1} = P(x/z) \oplus P(y/z)$$

Mais $P(x \oplus y/z) = P(z/z) = e > P(x/z) \oplus P(y/z)$

Cela signifie qu'en général, l'application

$$P_a : x \rightarrow P(x/a)$$

n'est pas max-compatible, c'est-à-dire est non-linéaire. Cela dépend de a et du domaine sur lequel on considère cette application. Ici, P_a est linéaire si on se restreint à $STAB((e,2), (2,2))$.

3.1.4. Familles génératrices et systèmes linéaires.

Théorème :

$$x \in \text{STAB} \{g_1, \dots, g_n\} \text{ ssi}$$

$$x = \sum P(x/g_i) \cdot g_i$$

Démonstration : $x \geq \sum P(x, g_i) \cdot g_i$ puisque $\forall i, P(x/g_i) \cdot g_i \leq x$.

La conclusion résulte du lemme suivant :

Lemme : si $x = \sum x_i g_i$, alors $\forall i, x_i \leq P(x/g_i)$

Démonstration : $P(\sum x_i g_i / g_j) \geq \sum x_i P(g_i / g_j) \geq x_i P(g_i / g_i) = x_i$

Corollaire : $x > \sum P(x/g_i) \cdot g_i \Rightarrow x \notin \text{STAB} \{g_i \dots\}$.

Remarque : Ce théorème est en fait le théorème sur la résolution des systèmes linéaires : $x = \sum x_i g_i$.

$\{x_i = P(x, g_i)\}$ est un candidat à priori comme solution. S'il ne convient pas, il n'y a pas de solution.

S'il y a des solutions, elles ne sont pas forcément uniques.

Si $g_1 = (e, 2)$ $g_2 = (3, e)$

$$g_1 = g_1 \oplus \epsilon g_2$$

$$= g_1 \oplus \frac{1}{5} g_2$$

$$= g_1 \oplus \frac{1}{3} g_2$$

Par contre, tout point à l'intérieur de $STAB(g_1, g_2)$ à une décomposition unique !

Remarque : On a vu au chapitre 1 qu'il existe une écriture "minimale" pour toute fonction polynôme. On peut être tenté de rechercher une décomposition d'un vecteur sur une famille génératrice, telle que le nombre de coefficients soit minimal. Ce nombre minimal existe, bien sûr, mais il ne définit en général pas une écriture canonique. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple suivant :

Exemple 1 : dans DRC^3 , considérons la famille non redondante et indépendante :

$$k < e \quad (e, e, k), (e, k, e), (k, e, e)$$

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad (e, e, e) &= (e, e, k) \oplus (e, k, e) \\ &= (e, e, k) \oplus (k, e, e) \\ &= (k, k, e) \oplus (k, e, e) \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que sur cet exemple, la famille est indépendante. Pour une famille dépendante, par définition, il existe un vecteur possédant des décompositions sur deux sous-familles disjointes.

3.1.5. Vecteurs d'arête.

Définition : Soit E un modulofide et F un sous-modulofide de E (par exemple, $F = E$). On appellera vecteur d'arête de F tout vecteur $a \in F$ tel que l'application :

$$Pa : x \rightarrow P(x/a), \text{ restreinte à } F$$

soit Max-compatible sur F .

On appellera arête une droite engendrée par un vecteur d'arête (en remarquant que tous les vecteurs de l'arête sont bien des vecteurs d'arête).

Exemple : $E = DRC^2$ $g_1 = (1, 2)$ $g_2 = (3, 2)$

$$F = STAB \{g_1, g_2\}$$

g_1 et g_2 engendrent deux arêtes de F .

Remarque : on constate que les vecteurs d'arête coïncident ici avec les générateurs "indispensables".

Proposition : si a est un vecteur d'arête pour F . La relation d'équivalence définie sur F par :

$$x \equiv y [a] \text{ sssi } P(x/a) = P(y/a)$$

est une relations d'équivalence compatible avec le moduloïde F .

L'espace quotient est DRC.

La classe de $\varepsilon = \{y \in F \mid P(y/a) = \varepsilon\}$ est un sous-moduloïde de F .

Démonstration : La classe de ε peut être réduite à $\{\bar{\varepsilon}\}$. Il suffit de se reporter à l'exemple précédent.

Lemme : Aucun vecteur d'arête ne peut être combinaison linéaire de deux vecteurs qui ne lui sont pas parallèles.

Théorème 1 : Toute famille génératrice contient un vecteur de chaque arête.

Théorème 2 : En prenant un vecteur (non égal à $\bar{\varepsilon}$) sur chaque arête, on obtient une famille non redondante.

Démonstration du lemme et des théorèmes :

$$\text{Si } g_1 \in F, g_2 \in F \text{ et } a = \lambda g_1 + \mu g_2$$

Si a n'est parallèle ni à g_1 ni à g_2

$$a \neq \mu g_2, \text{ donc } \lambda > \mu P(g_2/g_1)$$

$$a \neq \lambda g_1, \text{ donc } \mu > \lambda P(g_1/g_2)$$

donc :

$$P(g_2/a) = \min(\lambda^{-1}, \mu^{-1} P(g_2/g_1)) = \lambda^{-1} P(g_2/g_1)$$

et

$$P(g_1/a) = \min(\mu^{-1}, \lambda^{-1} P(g_1/g_2)) = \mu^{-1} P(g_1/g_2)$$

donc

$$\lambda P(g_1/a) = \lambda \mu^{-1} P(g_1/g_2) < e$$

$$\mu P(g_2/a) = \mu \lambda^{-1} P(g_2/g_1) < e$$

donc

$$\lambda P(g_1/a) \oplus \mu P(g_2/a) = \lambda P_a(g_1) \oplus \mu P_a(g_2) < e$$

or

$$P_a(\lambda g_1 \oplus \mu g_2) = e$$

P_a n'est pas compatible, donc a n'est pas un vecteur d'arête de F .

Donc, pour que a soit vecteur d'arête de F , il ne faut pas qu'il soit combinaison linéaire de deux vecteurs de F qui ne lui sont pas parallèles.

Le Théorème 2 découle directement du lemme.

Le Théorème 1 découle du fait que les vecteurs d'arête, par définition, appartiennent au moduloïde en question, donc doivent être engendrés par toute famille génératrice, donc celle-ci doit contenir un vecteur qui leur est parallèle.

Remarque : les vecteurs d'arête jouent un rôle essentiel, car ce sont les seules qui permettent de manipuler des "coordonnées" qui soient "linéaires" !

Exemple 1 : dans l'exemple $F = \text{STAB} \{(1,2), (3,2)\}$, $(1,2)$ et $(3,2)$ définissent les seules arêtes de F .

Exemple 2 : Considérons l'ensemble des fonctions polynômes de DRC dans DRC (en représentation multiplicative). C'est un moduloïde réel croissant.

Considérons $F = \text{STAB} (1, x, x^2, x^3)$ où 1 est la fonction constante égale à $1 = e$.

Dans F , considérons les deux vecteurs :

$$f = x \oplus \frac{1}{2} x^2 \oplus x^3$$

$$g = \frac{3}{2} \text{ (constante)}$$

Remarquons que $f = x \oplus x^2 \oplus x^3$ (en tant que fonction de x)

$$P(f/x^2) = e$$

$$P(g/x^2) = \varepsilon$$

Soit $h = f \oplus g$, on vérifie aisément que $P(h/x^2) = (\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}$ donc :

$$P(h/x^2) = (\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}} > e = P(f/x^2) \oplus P(g/x^2)$$

x^2 n'est pas un vecteur d'arête de F . Or, la famille $(1, x, x^2, x^3)$ est génératrice de F et non-redondante.

Par contre, 1 et x^3 sont des vecteurs d'arête de F , car pour toute fonction ϕ de F :

$$P(\phi/1) = \phi(0)$$

$$P(\phi/x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\phi(x) \cdot x^{-3})$$

3.1.7. Propriétés des applications compatibles.

Proposition : Si f est compatible, si $f(y) \neq \bar{\varepsilon}$

$$P(f(x) / f(y)) \geq P(x/y)$$

Démonstration : il suffit de montrer que :

$$\lambda y \leq x \Rightarrow \lambda f(y) \leq f(x) \quad \text{ce qui signifie}$$

$$\lambda y \oplus x = x \Rightarrow \lambda f(y) \oplus f(x) = f(x)$$

ce qui résulte de la compatibilité.

Proposition : Si f est compatible et bijective, si $f(y) \neq \bar{\varepsilon}$

$$P(f(x)/f(y)) = P(x/y).$$

En fait, on dispose d'un théorème plus puissant :

Théorème : Une application compatible f telle que $y \neq \bar{\varepsilon} \Rightarrow f(y) \neq \bar{\varepsilon}$ est injective si et seulement si :

$$\forall x, \forall y \neq \bar{\varepsilon} \quad P(f(x)/f(y)) = P(x/y)$$

Démonstration :

Condition nécessaire : Supposons qu'il existe (x,y) tel que $P(f(x)/f(y)) > P(x/y)$ alors :

$$x = x \oplus P(x/y).y$$

et $x' = x \oplus P(f(x)/f(y)).y \neq x$

mais $f(x') = f(x)$; f n'est pas injective.

Condition suffisante :

$$\text{Si } f(x) = f(y) \quad \pi(f(x),f(y)) = e = \pi(x,y)$$

donc $x = y$.

3.2.8. Plongement d'un moduloïde dans DRC^n .

Théorème : Si M est un moduloïde admettant une famille génératrice composée de P vecteurs d'arête, il existe une injection max-compatible de M dans DRC^P .

Démonstration : Considérons l'application définie comme suit : si v_1, \dots, v_p est une famille génératrice de M . Pour $x \in M$ qui s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^P P(x/v_i).v_i$$

on définit $f(x) = \sum_{i=1}^P P(x/v_i).e_i$ où e_1, \dots, e_p est la base canonique de DRC^P .

Il est immédiat que f est injective, car les coordonnées sont uniques dans la base canonique donc :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \forall i \quad P(x/v_i) = P(x'/v_i)$$

donc $x = x'$.

f est max-compatible car les P_{v_i} le sont.

Remarque :

Ce résultat semble faux dans le cas général : la construction précédente ne définit pas une application max-compatible : reprenons l'exemple des fonctions polynômes définies sur $[0, +\infty[$ (représentation multiplicatives)

$$E = \text{STAB}(1, x, x^2, x^3)$$

alors, si on construit f comme précédemment :

$$\begin{aligned}
f(1) &= (e, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) \\
f(x^2) &= (\varepsilon, \varepsilon, e, \varepsilon) \\
f(1 \otimes x^2) &= f(1 \otimes x \otimes x^2) = (e, e, e, \varepsilon) \\
&\neq f(1) \otimes f(x^2) = (e, \varepsilon, e, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Bien sûr, il peut y avoir d'autres constructions, mais on sait a priori que si f est compatible et v_1, \dots, v_p est une famille génératrice :

$$f(x) = \sum P(x/v_i) \cdot f(v_i)$$

Le fait que les v_i soient des vecteurs d'arête semble donc primordial.

3.2.9. Conclusion.

La notion de vecteur d'arête n'a pas résolu la conjecture, selon laquelle pour tout moduloïde admettant une famille génératrice de cardinal fini, il existe une famille génératrice non-redondante canonique. Il faut donc trouver un nouveau critère définissant les générateurs indispensables.

Cependant, il semble que si le moduloïde est un sous-espace de type fini de DRC^n ou DRC^N , alors la famille des vecteurs d'arête est effectivement génératrice, donc est la famille génératrice minimale.

Si cet énoncé est exact, il en résultera que des espaces comme $\text{STAB}(x, x^2, x^3, x^4)$ dans le moduloïde des polynômes, ne sont isomorphes à aucun sous-moduloïde d'une DRC^n , bien qu'il soient de dimension finie. En effet, x^2 et x^3 sont des générateurs "indispensables" mais pas des vecteurs d'arête, or un isomorphisme conserve le caractère du vecteur d'arête.

Il y aurait donc d'autres structures de moduloïde de type fini, que les espaces de matrices.

3.3. Exemples de moduloïdes. Propriétés.

3.3.1. DRC^n .

La base canonique est une famille indépendante, composée de vecteurs d'arêtes : les coordonnées d'un vecteur sont uniques et sont des fonctions max-linéaires de ce vecteur.

Divers problèmes restent à étudier :

- équations d'un sous-moduloïde de DRC^n .
- pour tout sous-moduloïde, existe-t-il une famille génératrice composée de vecteurs d'arête ?
- Etude des sous-espaces du point de vue topologique : tout sous-moduloïde de type fini est fermé pour la topologie usuelle. La réciproque est-elle vraie ?

3.3.2. Le cas de DRC^2 .

On obtient quelques résultats supplémentaires dus au fait que les familles non-redondantes coïncident avec les familles indépendantes : elles sont composées au plus de deux vecteurs.

Il suffit donc d'étudier les sous-moduloïdes engendrés par un ou deux vecteurs. Cela résulte de la propriété suivante :

Propriété : dans DRC^2 , toute famille de plus de 2 vecteurs est redondante.

Démonstration : Considérons (a,b) , (c,d) , (f,g) tous distincts de $(\varepsilon, \varepsilon)$.

1er cas : si $a \neq \epsilon$, $c \neq \epsilon$ et $f \neq \epsilon$.

Comparons $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$. Supposons que $\frac{b}{a} \leq \frac{d}{c} \leq \frac{g}{f}$. Si $g = \epsilon$, $b = d = \epsilon$; les trois vecteurs sont colinéaires. Si $g \neq \epsilon$ $(c,d) = \frac{c}{a}(a,b) \oplus \frac{d}{g}(f,g)$. En effet, $c \geq \frac{df}{g}$ et $d \geq \frac{cb}{a}$.

2e cas : Un seul des scalaires a , b , c est égal à ϵ . Supposons que ce soit a . Comparons $\frac{d}{c}$ et $\frac{g}{f}$. Par exemple $\frac{d}{c} < \frac{g}{f}$, alors $(f,g) = \frac{f}{c}(c,d) \oplus \frac{g}{b}(a,b)$.

3e cas : Si au moins deux des scalaires a , b , c valant ϵ , les vecteurs correspondants sont colinéaires.

Remarque : Ce résultat est propre à DRC^2 : dans DRC^3 , il existe des familles de 4 vecteurs non redondantes, par exemple : $(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$, $(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$, $(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$, $(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$.

3.3.3. $DRC^{\mathbb{N}}$, $DRC^{\mathbb{Z}}$ et espaces de suites.

La base canonique constituée des suites identiquement égales à ϵ , sauf pour un terme égal à e , est une famille indépendante de vecteurs d'arête.

L'espace des suites croissantes, pour lesquelles $u_n \geq u_{n-1}$, est un sous-moduloïde qui admet une famille génératrice non redondante composée de vecteurs d'arête : c'est la famille des suites de la forme $(\dots, \epsilon, \epsilon, \epsilon, e, e, e, e, \dots)$.

Si l'on se limite, dans la notion de combinaison linéaire, aux sommes finies, cette famille n'est pas génératrice de l'espace des suites croissantes (la base canonique n'est alors pas génératrice de l'espace des suites), cependant, elle est indépendante :

Toute suite engendrée par cette famille possède un premier terme non égal à ϵ . Toute décomposition doit donc contenir la suite dont l'indice du premier terme non égal à ϵ correspond.

Par contre, si on admet les combinaisons linéaires infinies, ce qui modifie la définition de l'indépendance, la famille des suites $(\dots \epsilon \epsilon, e, e, e, \dots)$ n'est pas indépendante !

Il suffit de la diviser dans les deux sous-familles disjointes suivantes :

- les suites dont le premier terme non absorbant est d'indice pair,
- les suites dont le premier terme non absorbant est d'indice impair.

Pour toutes deux, la somme de tous leurs éléments est égale à la suite constamment égale à e.

Les suites strictement croissantes constituent aussi un sous-moduloïde de l'espace précédent, qui ne semble pas avoir de famille génératrice dénombrable. L'espace des suites "asymptotiquement cycliques", est un sous-moduloïde de l'espace des suites dont nous ne connaissons pas les générateurs. Ce sont les suites telles que :

$$\begin{aligned} & \text{il existe } N \in \mathbb{N}, \text{ il existe } \lambda \in \text{DRC}, \text{ il existe } c \in \mathbb{N} \\ & \forall n > N, u_{n+c} = \lambda u_n. \end{aligned}$$

3.3.4. Espace de fonctions polynômes.

Nous définirons ici les fonctions polynômes comme le sous-moduloïde de l'espace des fonctions de DRC^* dans DRC , engendrée par la famille des monômes :

$$x \rightarrow x^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}$$

Cette famille est génératrice et non redondante, mais ses vecteurs ne sont pas des vecteurs d'arête : les coordonnées ne sont pas max-linéaires.

IV. ALGÈBRE DU DIOÏDE DRC ET THÉORIE DES SYSTÈMES.

4.1. Généralités.

La notion de système se définit indépendamment des propriétés algébriques des objets que l'on manipule : un système est un opérateur qui transforme une suite d'entrées en une suite de sorties.

Si les entrées et les sorties possèdent une structure algébrique, on peut chercher une description algébrique du système.

L'étude de \mathbb{R}^n munie de sa structure usuelle est particulièrement riche, surtout dans le cas des systèmes linéaires. Or, certains résultats ne semblent dépendre que des propriétés combinatoires des opérations et du calcul matriciel. On peut donc s'intéresser à d'autres couples d'opérations ayant les mêmes propriétés combinatoires : les dioïdes.

Nous étudierons ici le cas du dioïde DRC précédemment défini.

4.1.1. Définitions.

E et F sont deux modulofides réels croissants. E^N , E^Z , F^N , F^Z sont munis des structures produits qui en font des modulofides réels croissants. (en pratique, on aura toujours $E = \text{DRC}^n$, $F = \text{DRC}^m$). On notera (u) la suite de terme générique u_n .

On appellera système max-linéaire ou max-compatible de E dans F une application de E^N dans F^N (ou de E^Z dans F^Z) qui est compatible avec la structure de modulofide de E^N (ou E^Z), c'est-à-dire, si (u) et (v) sont deux suites d'entrées :

$$S((u) \oplus (v)) = S(u) \oplus S(v)$$

si $\lambda \in \text{DRC}$

$$S(\lambda(u)) = \lambda \cdot S(u)$$

On rappelle qu'un système est causal si pour toutes suites d'entrées telles que :

il existe k tel que $\forall n \leq k \quad u_n = v_n$

alors $\forall n \leq k \quad (S(u))_n = (S(v))_n$

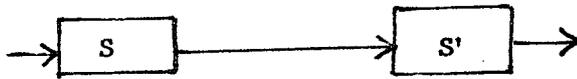
Dans la suite, tout système sera causal. On étudiera des suites indicées par Z , le cas de N étant très proche.

Un système est dit stationnaire si : pour toute suite (u) , si (v) est définie par $v_n = u_{n-1}$

alors $(S(v))_n = (S(u))_{n-1}$.

4.1.2. Opérations sur les systèmes.

Mise en série :

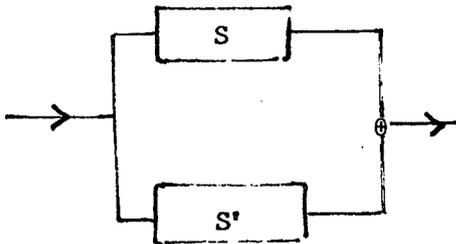


S est un système de E dans F .

S' est un système de F dans G .

Alors on définit un système de F dans G par $S' \circ S$.

Mise en parallèle :



S et S' sont des systèmes de E dans F . On définit $(S \oplus S')$ comme max-somme des applications S et S' .

$$\lambda \cdot \phi u = \sum (\lambda \cdot u_n) d^n \quad \text{pour } \lambda \in \text{DRC}$$

$$\phi u \oplus \phi v = \sum (u_n + v_n) d^n$$

On peut étendre ces définitions de la manière suivante : si A est un opérateur max-compatible de E dans un moduloïde F

$$A\phi u = \sum (Au_n) d^n$$

Opérateur retard, opérateur avance :

On appellera opérateur avance l'opérateur z : $\phi u = \sum u_n z^n \rightarrow \sum u_n z^{n+1}$
 On appellera opérateur retard : $z^{-1} = d$: $\phi u = \sum u_n z^n \rightarrow \sum u_n z^{n-1}$.

Ce sont évidemment des opérateurs max-compatibles sur l'espace des suites à valeurs dans un moduloïde.

On identifiera les opérateurs à des multiplications par z (avance) et z^{-1} (retard) (on pourra multiplier à droite ou à gauche). On peut alors définir la multiplication d'une série par z^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

En considérant $\{z^n, n \in \mathbb{Z}\}$ comme la base des suites à valeurs dans DRC, cela permet d'introduire la multiplication entre séries formelles.

On notera $z^0 = \delta$, la suite identiquement égale à ϵ sauf pour le terme de rang 0, égal à e .

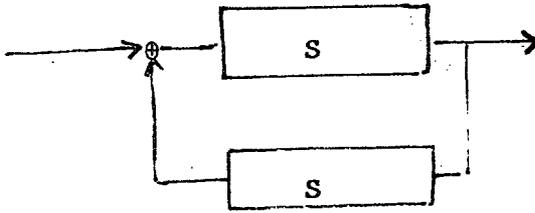
Cas scalaire :

$$\phi u \cdot \phi v = \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_p \cdot v_q \right) d^n$$

Cette définition a un sens, dès que pour tout n , il existe un nombre fini de couples (p, q) tels que $p+q=n$ et $u_p \neq \epsilon$ et $v_q \neq \epsilon$.

Cette multiplication est commutative.

Mise en contre-réaction :



S est un système de E dans F et

S' est un système de F dans E.

On définit un système en associant à une suite d'entrées (u), la suite de sorties (v) définie par :

$$(v) = S \circ S'(v) \oplus S(u)$$

$$v = (S \circ S')^* S(u)$$

Si $(S \circ S')^*$ est défini au sens du dioïde des opérateurs max-linéaires de F dans F, muni de la max-somme et de la composition des applications. Les conditions d'existence de $(S \circ S')^*$ nous sont mal connues dans le cas général.

Remarque : La définition de la mise en parallèle et de la mise en contre réaction nécessite l'existence d'opérations algébriques sur les entrées et les sorties.

4.2. Représentation des entrées et des sorties par des séries formelles.

4.2.1. Séries formelles.

A toute suite (u) d'éléments de E, on associe la série formelle:

$$\phi_u = \sum_n u_n z^n,$$

dans la suite, on notera $z^{-n} = d^n$, ce qui n'est qu'une autre écriture de la suite. D'après la structure de $E^{\mathbb{Z}}$, on définit :

Cas vectoriel : **E, F, G** sont des modulofides.

Si (A) est une suite d'opérateurs max-compatibles de **E** dans **F**.

(B) est une suite d'opérateurs max-compatibles de **F** dans **G**.

$$\phi_B \cdot \phi_A = \sum_n \left(\sum_{p+q=n} B_p \cdot A_q \right) d^n$$

Cette définition a un sens dès que pour tout n, il n'existe qu'un nombre fini de couple (p,q) tels que p+q=n et B_p et A_q soient des opérateurs non absorbants.

Si **E = G**, le produit est défini mais pas commutatif.

En pratique, on ne manipulera que des séries de matrices.

Remarque : Le produit est défini si l'une des séries est de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} u_n d^n \quad \text{ou} \quad \sum_{n \leq 0} u_n d^n$$

4.2.2. Réponse impulsionnelle.

Cas scalaire : suites dans DRC.

DRC^Z possède une famille génératrice non redondante, constituée des suites dont les séries associées sont les z^p, p décrivant Z l'écriture :

$$\phi u = \sum u_n d^n$$

peut s'interpréter comme la décomposition de la suite (u) dans cette base. Si un système **S** est max-compatible, alors :

peut s'interpréter comme la décomposition de la suite (u) dans cette base. Si un système **S** est max-compatible, alors :

$$S(\phi_u) = \sum u_n S(z^{-n})$$

donc le système est déterminé par la connaissance des $S(z^{-n})$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Or $S(z^{-n})$ est une suite qui s'écrit :

$$S(z^{-n}) = \sum_p h_p^n d^{n+p}.$$

Si le système est causal, $h_p^n = \varepsilon$ si $p < 0$, donc la somme porte sur $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$S(\phi u) = \sum_n u_n \sum_{p \geq 0} h_p^n d^{n+p}$$

Si le système est stationnaire, h_p^n est indépendant de n , car S commute avec l'opérateur retard. Alors :

$$\begin{aligned} S(\phi u) &= \sum_n u_n \sum_{p \geq 0} h_p d^{n+p} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \geq 0} h_p u_{n+p} \right) d^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \geq 0} h_p d^p u_{n+p} d^{n+p} \\ &= \left(\sum_{p \geq 0} h_p d^p \right) \cdot \left(\sum_n u_n d^n \right) \end{aligned}$$

Le système se traduit par la multiplication par une série :

$$H = \sum_{p \geq 0} h_p d^p$$

or

$$H = S(\delta)$$

où δ est la suite identiquement égale à ε sauf pour le terme de rang 0 égal à ε . (en fait $\delta = z^0$). δ sera appelé impulsion (à zéro).

H sera appelé réponse impulsionnelle du système.

Cas matriciel :

Soit S un système causal max-linéaire de DRC^l dans DRC^m . Pour une entrée $\phi u = \sum_n u_n d^n$ avec $u_n \in \text{DRC}^l$

$$S(\phi u) = \sum S(u_n d^n)$$

donc il suffit de connaître l'image des $S(u_n, d^n)$. Pour simplifier cette étude, nous supposons le système stationnaire, donc S commute avec l'opérateur retard.

$$S(\phi u) = \sum d^n S(u_n \delta) \quad (\text{rappel : } \delta = z^0)$$

Il suffit de connaître la transformée de $S(v\delta)$ pour $v \in \text{DRC}^{\ell}$

$$v = \sum_{i=1}^{\ell} v_i e_i$$

où (e_1, \dots, e_{ℓ}) est la base canonique de DRC^{ℓ}

$$S(v\delta) = \sum_{i=1}^{\ell} v_i S(e_i \delta)$$

$S(e_i \delta)$ est une suite dans DRC^m qui s'écrit :

$$S(e_i \delta) = \sum_{p \geq 0} h_{ip} d^p \quad \text{avec } h_{ip} \in \text{DRC}^m$$

donc

$$S(v\delta) = \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{\ell} v_i h_{ip} \right) d^p$$

Si h_p est la matrice $m \times \ell$ dont les colonnes sont les h_{ip} :

$$S(v.\delta) = \sum_{p \geq 0} h_p . v d^p$$

donc :

$$\begin{aligned} S(\phi u) &= \sum_n d^n \sum_{p \geq 0} h_p u_n d^p \\ &= \left(\sum_{p \geq 0} h_p d^p \right) . \left(\sum_n u_n d^n \right) \end{aligned}$$

On appelle réponse impulsionnelle du système la série formelle :

$$H = \left(\sum_{p \geq 0} h_p d^p \right)$$

4.3. Le cas des suites croissantes.

Nous avons défini les systèmes max-linéaires dans le cas de suites d'entrées quelconques. L'étude des réseaux de Petri dans laquelle on considère des suites de dates consécutives, n'utilise que des suites croissantes, au sens de l'ordre partiel.

L'espace des suites croissantes est un sous-moduloïde de l'espace des suites. Tout système max-linéaire peut donc être appliqué à des entrées croissantes.

Propriété : Pour un système max-linéaire causal stationnaire, pour toute entrée croissante, la sortie est croissante.

Démonstration : Cela résulte du fait que la multiplication de la réponse impulsionnelle par une série croissante donne une série croissante.

Remarque : Ce résultat est faux si le système n'est pas stationnaire : il suffit de définir le système par l'image de la famille $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$. On définit cette image par :

$$z^n \rightarrow 5^{-n} z^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et de l'appliquer à l'entrée croissante $\{2^n z^n\}$, on obtient $\{3^{-n} z^n\}$.

4.3.1. Echelons et réponse indicielle.

L'espace des suites scalaires croissantes admet comme famille génératrice non redondante la famille $\{w^n, n \in \mathbb{Z}\}$ définie par :

$$w^n = \sum_{p \geq n} d^p$$

La décomposition d'une suite croissante dans cette famille n'est pas unique. En effet :

$$d^1 \oplus d^2 \oplus 3d^3 \oplus \sum_{n \geq 4} 4d^n$$

est égal à

$$w^1 \oplus 3w^3 \oplus \sum_{n \geq 4} 4w^n$$

ou

$$w^1 \oplus w^2 \oplus 3w^3 \oplus \sum_{n \geq 4} 4w^n$$

Cette dernière écriture est la décomposition maximale ; dans la suite, nous utiliserons toujours la décomposition maximale d'une suite croissante, dont les coefficients sont identiques à ceux de sa décomposition sur la famille $\{d^n\}$: si la suite (u) est croissante

$$\sum_r u_n d^n = \sum u_n w^n$$

On remarquera que $w^n = d^n w^0$. On appellera les w^n des échelons et on notera $w^0 = \Delta$.

Définition : Pour un système S max-linéaire stationnaire causal défini sur l'ensemble des suites quelconques, on appelle réponse indicielle $S(\Delta)$.

Propriété :

$$S(\Delta) = S(\delta) \cdot \Delta = \Delta \cdot S(\delta)$$

4.3.2. Problème.

Existe-t-il des systèmes qui soient max-linéaires sur l'espace des entrées croissantes et non max-linéaires sur les entrées quelconques ?

Nous allons montrer que tout système max-linéaire défini sur l'espace des entrées croissantes peut être considéré comme la restriction d'au moins un système défini sur toutes les entrées.

Nous limiterons l'étude au cas scalaire. Le cas matriciel s'en déduit facilement.

Prolongement aux entrées quelconques :

S est un système causal, max-linéaire et stationnaire, défini sur l'ensemble des suites croissantes, à image dans l'ensemble des suites quelconques.

S est déterminé par la donnée des $S(w^n)$ or :

$$S(w^n) = d^n S(w^0) = d^n S(\Delta)$$

$$S(\Delta) = \sum_{p \geq 0} h_p d^p$$

or

$$\Delta = \Delta \oplus d\Delta \text{ donc}$$

$$S(\Delta) = S(\Delta \oplus d\Delta) = h_0 d^0 \oplus \sum_{p \geq 0} (h_p \oplus h_{p-1}) d^p$$

Comme l'écriture d'une série dans la famille des d^p est unique, on peut faire l'identification :

$$\forall p \geq 1 \quad h_p = h_p \oplus h_{p-1}$$

$$\text{donc} \quad h_p > h_{p-1}$$

La suite (h) est croissante et :

$$S(\Delta) = \sum_{p \geq 0} h_p d^p = \sum_{p \geq 0} h_p w^p$$

$$\text{donc} \quad S(w^n) = S(d^n \Delta) = \sum_{p \geq 0} h_p w^{n+p}$$

Il en résulte :

Propriété : Considérons un système causal, max-linéaire stationnaire défini sur l'ensemble des suites croissantes, l'image d'un tel système est incluse dans l'ensemble des suites croissantes.

Etant donné un système S défini comme précédemment, avec :

$$S(\delta) = \sum_{p \geq 0} h_p d^p = \sum_{p \geq 0} h_p w^p$$

on lui associe un système S' défini pour les entrées quelconques par sa réponse impulsionnelle :

$$S'(\delta) = \sum_{p \geq 0} h_p d^n.$$

Théorème : S est la restriction de S' aux entrées croissantes.

Démonstration : S'(\delta) est croissante donc :

$$S'(\delta) = S'(\delta) \cdot \Delta = S'(\Delta) = S(\Delta)$$

4.4. Conclusion.

On peut toujours considérer un système max-linéaire causal stationnaire défini sur des entrées croissantes comme restriction d'un système plus général. Ce choix n'est pas unique.

V. FORME D'ETAT D'UN SYSTEME. REPRESENTATION INTERNE.

5.1. Définition.

Un système max-linéaire est donné sous forme d'état si la relation qui à une suite d'entrées (U) associe la suite de sorties (Y) est définie par des équations matricielles de la forme :

$$X_n = F X_{n-1} \oplus G U_n$$

$$Y_n = H X_n$$

La forme la plus générale qui définit un système max-linéaire est :

$$X_n = F_0 X_n \oplus F_1 X_{n-1} \dots \oplus F_p X_{n-p} \dots$$

$$\dots \oplus G_0 U_n \oplus G_1 U_{n-1} \dots \oplus G_q U_{n-q}$$

$$Y_n = H_0 X_n \oplus H_1 X_{n-1} \dots \oplus H_r X_{n-r}$$

[Y] est défini comme fonction de [U] dès que F_0^* existe.

Une manipulation classique de théorie des systèmes permet de se ramener à la forme précédente, avec 1 seul retard.

Théorème :

La classe des systèmes max-linéaires donnés sous forme d'état est stable pour les opérations définies sur les systèmes : mise en série, mise en parallèle, mise en contre réaction.

Démonstration :



$$S \begin{cases} X_n = FX_{n-1} \oplus G U_n \\ V_n = H X_n \end{cases}$$

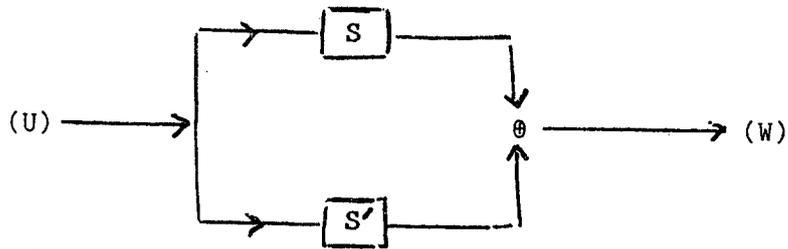
$$S' \begin{cases} Y_n = F' Y_{n-1} \oplus G' V_n \\ W_n = H' Y_n \end{cases}$$

alors :

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & \epsilon \\ G' HF & F' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} G \\ G' HG \end{bmatrix} U_n$$

$$W_n = \begin{bmatrix} \epsilon' & H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$$

-mise en parallèle :



$$S \begin{cases} X_n = FX_{n-1} \oplus G U_n \\ V_n = H X_n \end{cases}$$

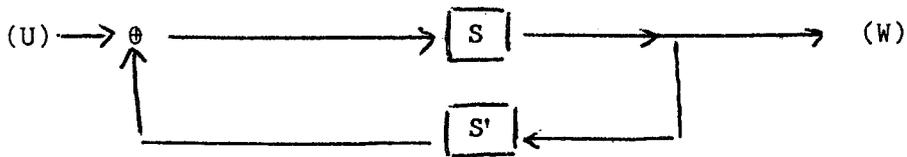
$$S' \begin{cases} Y_n = F' X_{n-1} \oplus G' U_n \\ W_n = H' X_n \end{cases}$$

alors :

$$\begin{array}{|c|} \hline X_n \\ \hline Y_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline F & \epsilon \\ \hline \epsilon & F' \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_{n-1} \\ \hline Y_{n-1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline G' \\ \hline \end{array} U_n$$

et $V_n \oplus W_n =$ $\begin{array}{|c|c|} \hline H & H' \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_n \\ \hline Y_n \\ \hline \end{array}$

- mise en contre réaction :



$$S \left\{ \begin{array}{l} X_n = F X_{n-1} \oplus G(U_n \oplus V_n) \\ W_n = H X_n \end{array} \right.$$

$$S' \left\{ \begin{array}{l} Y_n = F' Y_{n-1} \oplus G' W_n \\ V_n = H' Y_n \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} W_n &= HF X_{n-1} \oplus HG U_n \oplus HG V_n \\ &= HF X_{n-1} \oplus HGH' Y_n \oplus HG U_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_n &= F' Y_{n-1} \oplus G' W_n \\ &= G' HGH' Y_n \oplus G' HF X_{n-1} \oplus F' Y_{n-1} \oplus G' HG U_n \end{aligned}$$

Si $(G' HGH')^*$ existe posons $K = (G' HGH')^*$:

$$Y_n = KG'HF X_{n-1} \oplus KF' Y_{n-1} \oplus KG'HG' U_n.$$

$$X_n = FX_{n-1} \oplus GH'Y_n \oplus G U_n$$

$$= FX_{n-1} \oplus GH'KG'HF X_{n-1} \oplus GH'KF' Y_{n-1} \oplus GH'KG'HG U_n \oplus G U_n.$$

donc :

$$\begin{array}{|c|} \hline X_n \\ \hline Y_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline F \oplus GH'KG'HF & GH'KF' \\ \hline KG'HF & KF' \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_{n-1} \\ \hline Y_{n-1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline G \oplus GH'KG'HG \\ \hline KG'HG \\ \hline \end{array} U_n$$

$$W_n = \begin{array}{|c|c|} \hline H & \epsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_n \\ \hline Y_n \\ \hline \end{array}$$

Ces possibilités de combiner des systèmes, comme en Automatique classique sont d'un intérêt évident : on peut ainsi subdiviser un système complexe en sous-systèmes plus simple à étudier séparément.

5.1.2. Réseau de Petri associé. Remarques.

Pour tout système donné sous forme d'état, avec des coefficients positifs (dans DRC considéré comme $(R, \max, +)$), on sait construire un réseau de Petri, avec entrées et sorties dont la mise en équation correspond à la forme d'état donnée.

Les manipulations matricielles sur la forme d'état permettent d'introduire une notion d'équivalence entre graphes d'événements temporisés. Notamment, on peut transformer tout réseau en un réseau dont le marquage initial ne contient qu'un jeton par cycle. Nous n'approfondirons pas ce point dans cette étude.

Pour un système quelconque, c'est-à-dire à coefficients non nécessairement positifs, donné sous forme d'état, on peut faire la transformation suivante :

$$X_n = F X_{n-1} + G U_n$$

$$Y_n = H X_n$$

Si ω est le plus petit des coefficients non absorbants de F , G et H , posons

$$X'_n = \omega^{-n} X_n$$

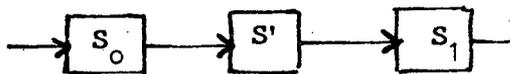
$$V_n = \omega^{-(n-1)} U_n$$

$$\begin{aligned} X'_n &= \omega^{-n} X_n = \omega^{-n} (F X_{n-1} + G U_n) \\ &= (\omega^{-1} F) X'_{n-1} + (\omega^{-1} G) V_n \end{aligned}$$

$$W_n = (\omega^{-1} H) X'_n$$

$$Y_n = \omega^{n+1} W_n$$

Ce qui revient à considérer la mise en série d'un système associé à un réseau de Petri et de deux systèmes max-linéaires, non stationnaires mais très simples :



$$S_0 : (U_n) \rightarrow (\omega^{1-n} U_n) = (V_n)$$

$$X'_n = (\omega^{-1} F) X'_{n-1} + (\omega^{-1} G) V_n$$

S' :

$$W_n = (\omega^{-1} H) X'_n$$

$$S_1 : (W_n) \rightarrow (Y_n) = \omega^{n+1} W_n$$

Conclusion :

L'étude de tout système max-linéaire donné sous forme d'état de dimension finie (au sens de la taille des matrices) peut être ramenée à celle d'un réseau de Petri temporisé.

Remarque : Il est fondamental qu'il n'y ait qu'un nombre fini de coefficients.

5.1.3. Le problème de la dimension de l'état.

Lorsqu'on considère un système de la forme

$$X_n = F X_n \oplus G U_n$$

$$Y_n = H X_n$$

la taille des matrices U_n et Y_n étant finie, on peut vouloir manipuler des matrices X_n aussi petites que possible.

Ce problème constitue un axe de recherche fondamental pour l'utilisation des dioïdes, mais il suppose au préalable une bonne compréhension de la notion du rang d'un opérateur, qui a été introduite au chapitre III en tant que rang d'une famille génératrice.

Il semble que la taille maximale de l'état X soit égale au nombre de jetons présents dans le réseau lors de la mise en équation.

Une fois ce problème résolu, on pourra chercher des formes canoniques de l'état d'un système ...

5.1.4. Réponse impulsionnelle associée à une forme d'état.

Si un système S est donné par :

$$X_n = F X_{n-1} \oplus G U_n$$

$$Y_n = H X_n$$

alors, en prenant les représentations des suites sous forme de séries formelles : Pour simplifier les notations, on écrira $d = z^{-1}$, alors :

$$\phi x = F(d \phi x) + G \phi u$$

$$\phi y = H \phi x$$

$$(dF)^* = E \oplus dF \oplus d^2 F^2 \oplus \dots \oplus d^n F^n$$

est défini comme série en $d = z^{-1}$

$$\phi x = (dF)^* G \phi u$$

$$\phi y = (H(dF)^* G) \phi u$$

$$H(dF)^* G = HG \oplus d HFG \oplus d^2 HF^2 G \oplus \dots \oplus d^n HF^n G.$$

Théorème : La réponse impulsionnelle d'un système max-linéaire qui possède une forme d'état de dimension finie, au sens de la taille des matrices avec F fortement connexe est une série en z^{-1} dont les coefficients sont cycliques.

Démonstration : On sait que :

Si F est fortement connexe,

il existe $N \in \mathbb{N}$,

il existe $\lambda \in \text{DRC}$ tel que $\forall n > N \quad F^{n+c} = \lambda F^n$

il existe $c \in \mathbb{N}$

donc $\forall n > N \quad H F^{n+c} G = \lambda H F^n G \quad \text{c.q.f.d.}$

Un système sous forme d'état avec un retard unique est en général représenté par des matrices de grande taille. Il est souvent préférable de calculer la réponse impulsionnelle sous la forme générale (on suppose que F_0 existe) :

$$X_n = F_0 X_n \oplus F_1 X_{n-1} \oplus F_2 X_{n-2} \dots \oplus F_r X_{n-r}$$

$$\oplus G_0 U_n \oplus \dots \oplus G_p U_{n-p}$$

$$Y_n = H_0 X_n \oplus H_1 X_{n-1} \oplus \dots \oplus H_q X_{n-q}$$

Pour effectuer la suite des calculs, deux méthodes sont envisageables :

$$X_n = F_0^* (F_1 X_{n-1} \oplus \dots \oplus F_r X_{n-p}) \\ \oplus F_0^* (G_0 U_n \oplus \dots \oplus G_p U_{n-p})$$

$$\phi x = F_0^* (dF_1 \oplus \dots \oplus d^r F_r) \phi x \\ \oplus F_0^* (G_0 \oplus \dots \oplus dG_p) \phi u$$

$[F_0^* (dF_1 \oplus \dots \oplus d^r F_r)]^*$ est défini : le coefficient de chaque puissance de d est le max d'un nombre fini de termes.

$$\phi x = [F_0^* (dF_1 \oplus \dots \oplus d^r F_r)]^* F_0^* (G_0 \oplus \dots \oplus d^p G_p) \phi u \\ \phi y = (H_0 \oplus \dots \oplus d^q H_q) \phi x$$

On peut aussi procéder ainsi :

$$\phi x = (F_0 \oplus dF_1 \oplus \dots \oplus d^r F_r)^* (G_0 \oplus \dots \oplus d^p G_p) \phi u$$

Il est aisé de vérifier que : $(F_0 \oplus dF_1 \oplus \dots \oplus d^r F_r)^*$ est défini dès que F_0^* existe. Alors :

$$\phi y = (H_0 \oplus dH_1 \dots \oplus d^q H_q) (F_0 \oplus dF_1 \dots \oplus d^r F_r)^* (G_0 \oplus dG_1 \dots \oplus d^p G_p) \phi u$$

Puisque cette égalité est vraie pour toute entrée ϕu , en particulier pour z^n , on peut identifier cette réponse impulsionnelle, coefficient par coefficient à la formule obtenue précédemment, ainsi qu'un résultat que l'on obtiendrait en se ramenant à une forme avec 1 retard.

5.1.5. Ecriture compactée d'une R.I. :

En Automatique usuelle, l'intérêt de la réponse impulsionnelle découle principalement du fait que pour un système de rang fini, on connaît une écriture compactée de la R.I, sous forme de fraction rationnelle, sur laquelle on sait faire les manipulations de systèmes telles que la mise en série, en parallèle, en contre-réaction.

Le paragraphe précédent propose plusieurs formes possibles d'écriture compactée

$$H (F(z^{-1}))^* G$$

ou

$$H(z^{-1}) (F(z^{-1}))^* G(z^{-1})$$

La seconde semble plus générale, mais en aucun cas, nous ne savons effectuer les manipulations de systèmes sans recalculer la série associée au système obtenu. C'est un problème dont l'étude est primordiale.

5.2. Les problèmes de réalisation.

Il y a deux questions à étudier :

1) - Pour une suite d'entrées-sorties, peut on trouver un système sous-forme d'état en "dimension" finie qui à ces entrées associe les sorties correspondantes ?

Ce problème n'a pas encore été abordé.

2) - Pour une réponse impulsionnelle donnée, existe-t-il une forme d'état correspondante ?

Ce problème est directement lié à la recherche de forme "compacte" d'écriture des réponses impulsionnelles : l'idée qui justifie ce lien est la suivante. S'il existe une dynamique décrite par une matrice de taille finie, alors il suffit d'un nombre fini de paramètres pour décrire la R.I.

Ce second problème semble soluble rapidement ; on sait a priori que la réponse impulsionnelle doit avoir des propriétés de cyclicité. Toute la difficulté consiste à identifier cette cyclicité et à la réaliser par un $(A(z))^*$ approprié.

Le problème de la réalisation à partir d'un échantillon d'entrées-sorties paraît beaucoup plus ardu, ceci pour deux raisons :

- il y a un problème d'algèbre linéaire délicat : la recherche de générateurs.
- on sait que dans le cas d'un système associé à un réseau de Petri, si les entrées sont trop lentes, on ne voit pas apparaître la limitation par le cycle le plus lent : la cyclicité du système sous-jacent n'apparaît donc pas, même si elle existe !

Cas scalaire :

Dans ce cas, on sait construire un système sous forme d'état qui réalise une réponse impulsionnelle :

$$\text{Soit } H = \sum_{n \geq 0} h_n d^n \quad h_n \in \text{DRC}$$

une réponse impulsionnelle.

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réponse impulsionnelle scalaire soit celle d'un système sous forme d'état est qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \text{DRC}$ tels que

$$\forall n \geq k, h_{n+c} = \lambda h_n.$$

Démonstration :

- condition nécessaire :

$$\text{Si } h_n = H F^n G$$

Il suffit de remarquer que dans F^n , tous les coefficients ont des propriétés de cyclicité. (les cycles peuvent être différents).

(h_n) est donc une combinaison linéaire de suites cycliques ; les propriétés d'absorption du dioïde font que l'un des termes domine les autres à l'infini : il impose sa cyclicité à h_n .

- condition suffisante :

- si la propriété est vérifiée, considérons les polynômes p, q, r , tels que :

$$r(d) = \lambda d^c \quad (\text{avec } d = z^{-1})$$

$$q(d) = h_k \oplus h_{k+1} d \oplus \dots \oplus h^{k-c-1} d^{c+1}$$

$$p(d) = h_0 \oplus h_1 d \dots \oplus h_{k-1} d^{k-1}$$

alors
$$H = p(d) \oplus q(d) (r(d))^* d^k$$

Il y a d'autres écritures compactées possibles, qui conduisent à d'autres constructions. Il n'est pas évident que celle-ci soit la meilleure ; notamment $p(d)$ peut être de degré très grand.

Considérons le système : $(u) \rightarrow (y)$ d'état $X_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$ défini par :

$$\phi x_1 = r(d) \phi x \oplus q(d) \phi u$$

$$\phi x_2 = p(d) \phi u$$

$$\phi y = \phi x_1 \oplus \phi x_2$$

p, q, r étant définis comme précédemment.

On a la forme d'état :

$$x_{1n} = \lambda x_{1,n-c} \oplus q_0 u_{n-k} \oplus q_1 u_{n-i-k} \dots \oplus q_{c-1} u_{n-c+1-k}$$

$$x_{2n} = p_0 u_n \oplus p_1 u_{n-1} \dots \oplus p_{k-1} u_{n-k+1}$$

$$Y_n = x_{1n} \oplus x_{2n}$$

On a bien une forme d'état linéaire qu'on peut ramener à un retard unique.

Remarque : Pour tout polynôme formel, la série définie par $(p(z))^*$ est à coefficients cycliques, puisqu'on sait réaliser $(p(z))^*$ comme réponse l'impulsionnelle d'un système défini sous forme d'état, avec une matrice F fortement connexe :

$$\text{Si } p(d) = p_0 \otimes p, d + p_k d^k,$$

Il suffit de considérer le système : $(u) \rightarrow (x)$ défini par :

$$x_n = p_0 x_n \otimes p, x_{n-1} \otimes \dots \otimes p_k x_{n-k} \otimes u_n$$

VI. ANALYSE D'UNE INSTRUCTION DU MICROPROCESSEUR 6502 PAR LA THEORIE DES DIOIDES.

L'architecture du 6502 est donnée en Annexe 1. On étudie l'instruction ROL MEM,X en terme de réseau de Petri et de dioïde pour montrer l'intérêt de ces approches pour l'analyse des performances ainsi que l'optimisation de certains paramètres apparaissant dans la construction de microprocesseur.

Cet exemple nous a été donné par M. SORINE.

Ce paragraphe a pour but de montrer les applications potentielles de ces théories. Il ne doit pas être vu comme une application à part entière.

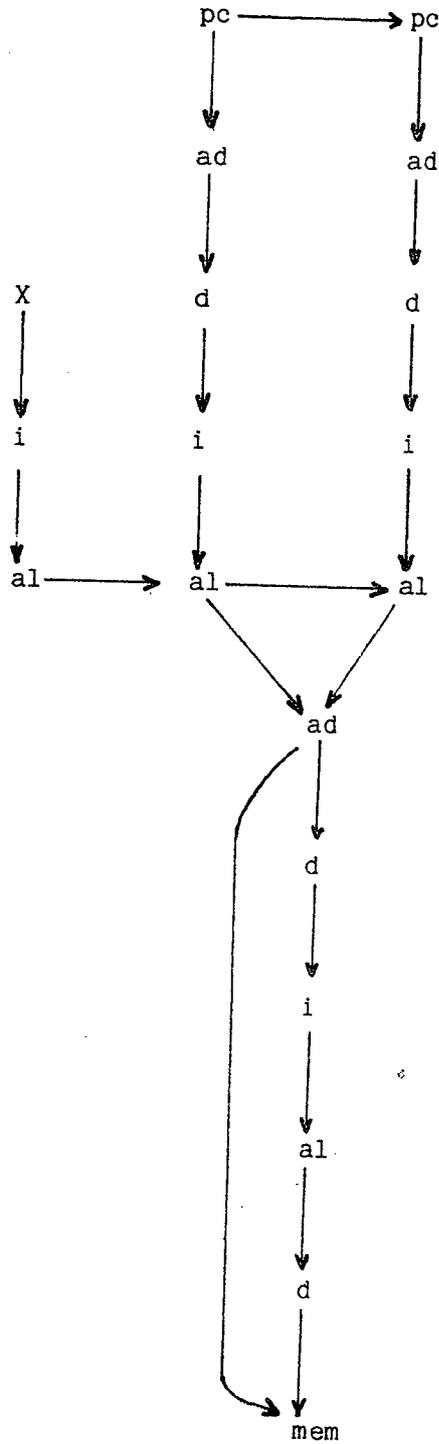
L'instruction ROL MEM,X va chercher le contenu de la mémoire d'adresse MEM+val(X) lui fait subir une translation à gauche d'un bit et remet à cette adresse la valeur translaturée.

val	désigne la valeur
X	un registre index
MEM	un nombre représentant une adresse.

L'instruction utilise les ressources suivantes :

pc	le compteur ordinal
ad	le bus et des buffers pour l'affichage d'une adresse
d	le bus de donnée
al	l'unité arithmétique et logique
i	un bus interne
mem	la mémoire
X	le registre index

Les opérations à effectuer peuvent être symbolisées par le graphe suivant :



que l'on peut expliquer de la façon suivante :

- le contenu de X transite par le bus interne, pour aller dans l'alu al,
- la valeur de la partie basse de MEM est mise dans l'alu par la chaîne d'opération suivante :

- . incrémentation du compteur ordinal,
- . affichage de l'adresse obtenue,
- . transit de MEM dans le bus de données
- . stockage de MEM dans l'alu ;

- pour obtenir les bits de poids fort de MEM, on a une chaîne d'opération identique.

- l'alu calcule les poids faibles de l'adresse MEM + val(X) l'affiche dans le buffer d'adresses, calcule les poids forts, affiche l'adresse complète.

- l'adresse de la mémoire sur laquelle on doit faire la rotation étant connue on fait la chaîne d'opérations :

- . aller chercher la donnée
- . la stocker dans l'alu après avoir transité par le bus interne
- . effectuer la rotation dans l'alu
- . le résultat après avoir transité par le bus de données est stocké à l'adresse de la mémoire sur laquelle a été effectuée

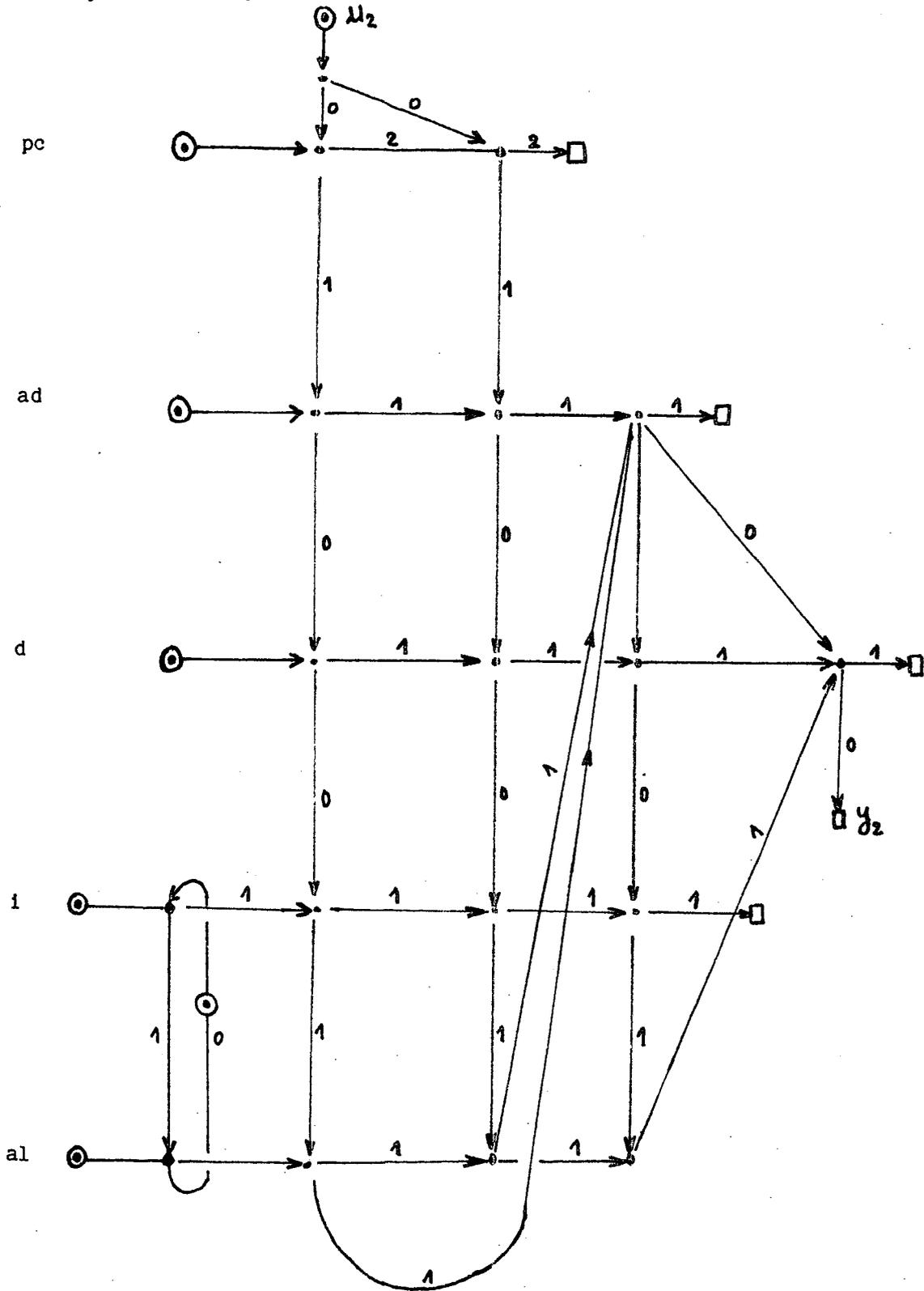
la rotation.

Les noeuds du graphe indiquent le lieu où se trouve une information à un moment donné.

Ce graphe représente de façon un peu schématique ce qui se passe dans le 6502. En fait, on a négligé certaines contraintes liées au fait que les opérations ne peuvent avoir lieu que pendant une phase particulière d'un cycle à deux phases.

On peut maintenant représenter le réseau de Petri associé au déroulement de l'instruction. Chaque ligne sera associée à ce qui se passe sur une ressource.

Chaque entrée est représentée par un cercle contenant un jeton, chaque sortie par un carré. Les poids des arcs sont comptés en phase, c'est-à-dire en 1/2 cycle d'horloge.



La première ligne verticale correspond au traitement de l'information dans X, la deuxième colonne au traitement de la partie basse de MEM, la troisième colonne à la partie haute, la quatrième au traitement de la donnée d'adresse MEM + val(X), la cinquième à la rotation proprement dite et à la mise en mémoire du résultat.

Il est maintenant possible de calculer la fonction de transfert $\phi(z)$ indiquant la relation entrée sortie associée à l'instruction.

Un microprogramme étant constitué d'une suite d'instructions indexées par i aura pour fonction de transfert

$$(1) \quad \psi(z) = \prod_i \phi_i(z)$$

où $\phi_i(z)$ désigne la fonction de transfert de l'instruction i. C'est la mise en série de sous-systèmes.

Le jeu d'instruction d'un microprocesseur étant fini, il est facile de calculer une fois pour toutes les fonctions de transfert de chacune des opérations.

La comparaison entre $\Psi(z)$ et de $\sum t_i$ où t_i désigne le temps de l'instruction i, montre le gain à microprogrammer, donc à mieux utiliser le parallélisme potentiel d'utilisation des ressources.

L'application de la mise en contre-réaction de sous-systèmes est la suivante. Supposons que l'on veuille faire plusieurs fois successivement des rotations à gauche. On peut soit calculer $\phi^m(z)$ où m désigne le nombre de fois à effectuer l'opération ou bien on peut étudier le système obtenu en rebouclant les sorties horizontales sur les entrées horizontales, ce qui veut dire que dès qu'une ressource a fini son travail pour une instruction elle peut commencer l'instruction suivante.

En mettant l'indice 1 sur les entrées et sorties horizontales et 2 pour les entrées et sorties verticales on a les relations :

$$(2) \quad y_1 = \phi_{11}(z)u_1 + \phi_{12}(z) u_2$$

$$y_2 = \phi_{21}(z)u_1 + \phi_{22}(z)u_2$$

où

u_1 et u_2 indiquent les entrées

y_1 et y_2 indiquent les sorties

Le bouclage des sorties horizontales sur les entrées horizontales revient à se donner la relation entrée-sortie :

$$(3) \quad u_1 = \alpha(z) y_1$$

On obtient donc :

$$(4) \quad y_1 = \phi_{11}(z) \alpha(z)y_1 + \phi_{12}(z)u_2$$

$$y_2 = \phi_{21}(z) \alpha(z)y_1 + \phi_{22}(z)u_2$$

donc :

$$y_1 = (\phi_{11}(z) \alpha(z))^* \phi_{12}(z)u_2$$

Ainsi, on obtient la fonction de transfert donnant la relation entrée-sortie sur les verticales, c'est-à-dire celle donnant les informations sur les temps nécessaires pour effectuer les instructions en utilisant au mieux les ressources disponibles :

$$(5) \quad y_2 = (\phi_{21}(z)\alpha(z) (\phi_{11}(z) \alpha(z))^* \phi_{12}(z) + \phi_{22}(z))u_2$$

Ces manipulations montrent l'intérêt de disposer d'une algèbre dans laquelle on puisse manipuler facilement ces fonctions de transfert.

Sur l'exemple dans le cas où $\alpha(z)$ est l'identité, on peut calculer facilement la fonction de transfert $\beta(z) : u_2 \rightarrow y_2$

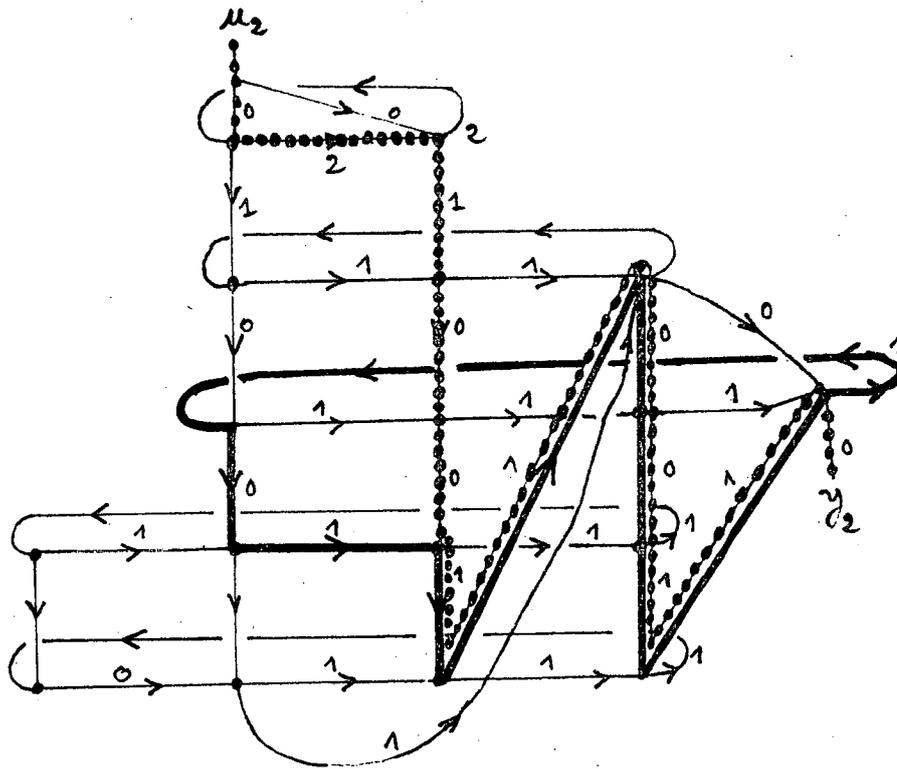
Tout calcul fait, elle vaut :

$$y_2(z) = 7(6z^{-1})^* u_2$$

Sur cette fonction de transfert, on lit qu'en régime périodique, le coût d'une instruction est 6 alors que la première instruction sera terminée après 7 unités de temps.

Le calcul de la fonction de transfert se fait facilement grâce aux interprétations en terme de graphe. De façon plus générale, il faudra développer des algorithmes efficaces de calcul.

Le circuit critique et le chemin le plus long entrée sortie sont donnés en gras respectivement en pointillé dans le graphe suivant :



On peut faire les remarques suivantes :

Remarque 1 :

Dans le modèle de l'instruction ROL, en terme de réseau de Petri, on n'a pas tenu compte des possibilités de stockage de l'information. Le modèle précédent est valide que si l'on peut prouver qu'il n'y a pas simultanément 2 informations sur un arc. Cela revient à montrer qu'il n'y a jamais plus d'un jeton sur un arc.

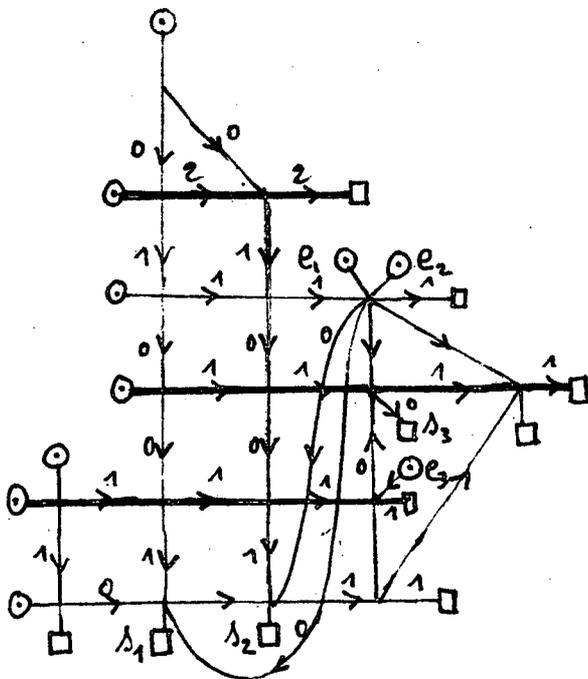
où les sorties s_1 et s_2 sont bouclées sur les entrées e_1 e_2 , les entrées horizontales sur les sorties horizontales ainsi que l'entrée et la sortie de la première verticale.

C'est le même que le précédent à l'adjonction près des deux arcs orientés non marqués e_1s_1 et e_2s_2 qui indique le nombre de places libres dans le buffer en sortie de l'alu, lorsque la place est libre, les arcs e_1s_1 et e_2s_2 sont marqués simultanément. De plus, au départ, les arcs s_1e_2 et s_2e_2 doivent être marqués.

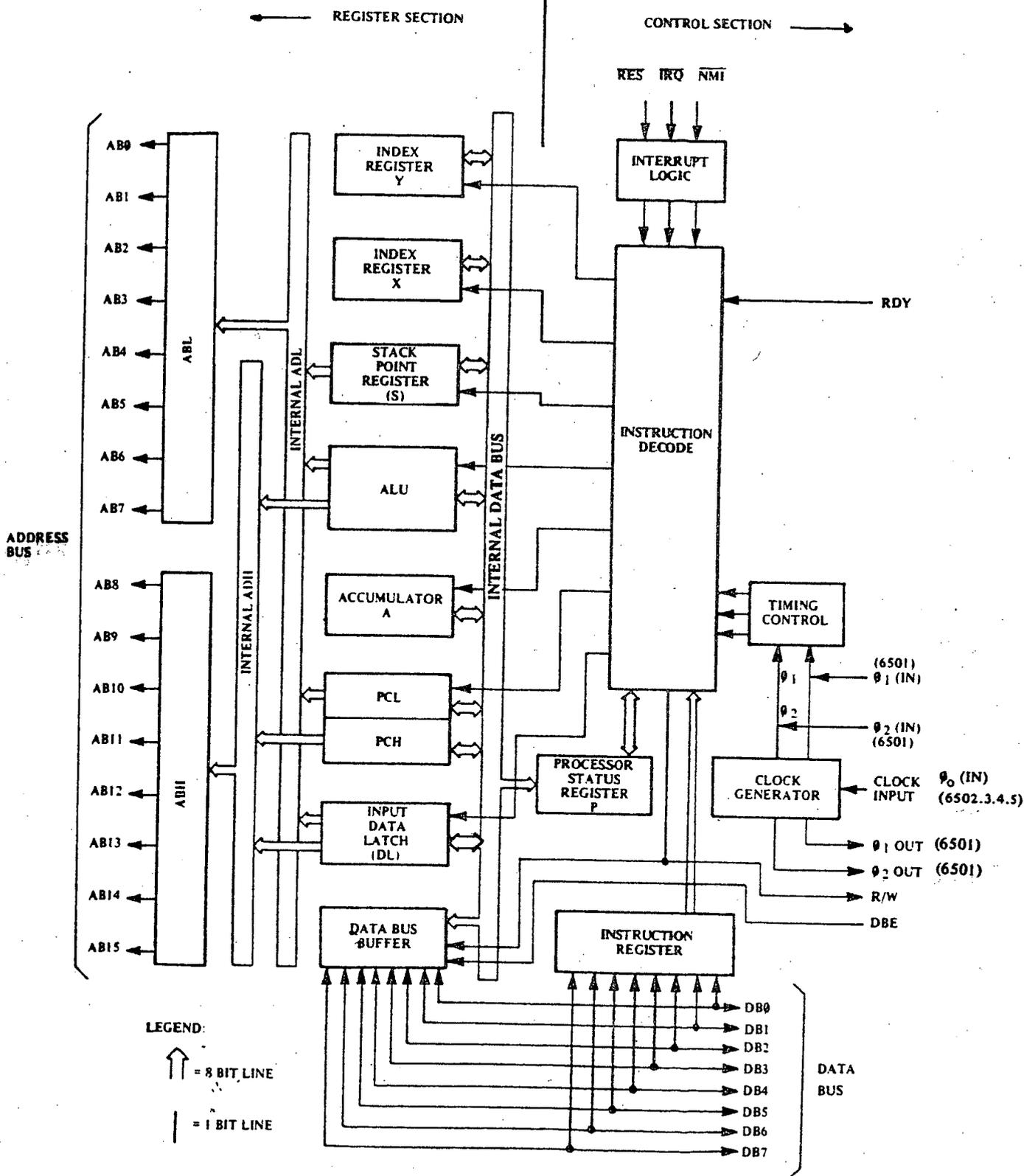
Le nouveau circuit critique est donné en gras, il est de longueur 5. Nous n'avons pas calculé dans ce cas la fonction de transfert complète.

Finalement, l'utilisation du buffer sur le bus interne qui existe, mais que l'on n'avait pas modélisé dans les réseaux de Petri précédents, conduit au réseau de Petri suivant dont les circuits critiques sont indiqués en gras. Ils sont de longueur 4. Ils correspondent à la saturation du compteur ordinal du bus de données et du bus interne, et correspondrait à une bonne architecture pour traiter une succession de rotations à gauche.

Il reste également le problème de mettre les jetons dans une bonne position initiale.



En conclusion, bien qu'une étude à la main se fasse, dans les cas simples, facilement en utilisant la théorie des graphes, l'automatisation de ce genre d'étude afin de faire des outils de CAO efficaces passe par la construction d'outils algébriques plus puissants comme ceux développés dans cette étude. Nous ne les avons pas complètement explicités sur cet exemple, car ils sont assez lourds à manier à la main.



NOTE: 1. CLOCK GENERATOR IS NOT INCLUDED ON MCS6501.
2. ADDRESSING CAPABILITY AND CONTROL OPTIONS VARY WITH EACH OF THE MCS650X PRODUCTS.

MCS650X Internal Architecture

REFERENCES

- [1] G.W. BRAMS, Réseau de Petri, Théorie et pratique, MASSON 83.
- [2] G. COHEN, D. DUBOIS, J.P. QUADRAT, M. VIOT, Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des diofdes - Rap.INRIA N° 191, Le Chesnay, 1983.
- [3] G. COHEN, D. DUBOIS, J.P. QUADRAT, M. VIOT, A linear - System - Theoretic view of Discrete - Event Processes. 22nd IEEE Conf on Decision and Control, San Antonio, Texas, 1983.
- [4] G. COHEN, D. DUBOIS, J.P. QUADRAT, M. VIOT, A Linear - System - Theoretic view of Discrete - Event Pocesess and its use for Performance evaluation in Manufacturing - IEEE Trans. on Automatic Control, to appear in 1985.
- [5] Y. DALLERY ; D. DUBOIS, Analyse Opérationnelle : une approche déterministe des systèmes de files d'attente, Note Interne LAG n° 8466.
- [6] R.A. CUNINGHAME-GREEN, Describing industrial processes and approximating their steady-state behaviour. Op. Research Quaterly, 13, PP. 95-100, 1962.
- [7] R.A. CUNINGHAME-GREEN, Minimax Algebra. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 166, Springer-Verlag, 1979.
- [8] J. DENNING, J.P. BUZEN, The Operational Analysis of queueing network models. Computing Surveys, 10, pp. 225-261, 1978.
- [9] H. GONDRAN, M. MINOUX, Graphes et Algorithmes. Eyrolles, Paris, 1979.
- [10] Y.C. HO, C. CASSANDRAS, Computing costate variables for Discrete-Event Systems, Proc. IEEE Conf on Decision and Control, Albuquerque, pp. 697-700, 1980.
- [11] J.L. PETERSON, Petri Net Theory and the modeling of systems, Prentice Hall, 1981.
- [12] C.V. RAMAMOORTHY, G.S. HO, Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets. IEEE Trans. on Software Eng., 6, N° 5, 1980.
- [13] P. CHRETIENNE, Thèse, Paris VI, 1983.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

10
4
5
3

3
4
5
7
8

2
1
2