

Comparaison numerique entre les solutions bidimensionnelles et tridimensionnelles d'un probleme de plaque encastree

Marina Vidrascu

▶ **To cite this version:**

Marina Vidrascu. Comparaison numerique entre les solutions bidimensionnelles et tridimensionnelles d'un probleme de plaque encastree. [Rapport de recherche] RR-0309, INRIA. 1984. inria-00076248

HAL Id: inria-00076248
https://inria.hal.science/inria-00076248

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 309

COMPARAISON NUMÉRIQUE ENTRE LES SOLUTIONS BIDIMENSIONNELLES ET TRIDIMENSIONNELLES D'UN PROBLÈME DE PLAQUE ENCASTRÉE

Marina VIDRASCU

Mai 1984

COMPARAISON NUMERIQUE ENTRE LES SOLUTIONS BIDIMENSIONNELLES ET TRIDIMENSIONNELLES D'UN PROBLEME DE PLAQUE ENCASTREE

Marina VIDRASCU

Résumé :

Ce papier contient une étude numérique du comportement asymptotique de la solution tridimensionnelle d'un problème de plaque en fonction de l'épaisseur. Lorsque l'épaisseur devient petite par rapport aux autres dimensions de la plaque, cette solution est comparée à la solution d'un problème bidimensionnel de plaque (le modèle biharmonique). Plusieurs résultats numériques sont présentés.

Abstract :

The aim of this paper is to compare the numerical solution of a plate problem obtained by solving the three-dimensional linear elasticity model with the solution of the two dimensional linear plate model. We study numerically the asymptotic behavior of the three dimensional solution when the thickness becames small. Numerical results are presented.

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

SOMMAIRE

INTRODUCTION p. 1.

1. Rappels sur la justification du modèle bidimensionnel de plaques. p. 2.

2. Description des méthodes d'éléments finis utilisées. p. 12.

3. Résultats numériques p. 13.

4. Conclusion p. 32.

Bibliographie p. 33.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de comparer la solution bidimensionnelle d'un problème de plaque à la solution tridimensionnelle de même problème lorsque l'épaisseur de la plaque devient petite par rapport aux autres dimensions et d'étudier le comportement de la solution tridimensionnelle en fonction de l'épaisseur de la plaque. Il s'agit d'une étude numérique par éléments finis dont le but est de vérifier les résultats théoriques obtenus par P.G. Ciarlet et P. Destuynder (résultats présentés par exemple dans [3] "A justification of the two-dimensional linear plate model" dans Journal de Mécanique, vol. 18. 2 (1975) pp 315-344).

La principale difficulté rencontrée lors de la résolution par éléments finis de ce problème est due au fait qu'il fait intervenir simultanément deux quantités "petites" : l'épaisseur de la plaque (2ε) et le pas de discrétisation (h).(A priori ces quantités sont réliées par la relation $h << 2\varepsilon$). Etant donné que l'hypothèse de départ est $\varepsilon <<$ les autres dimensions de la plaque il en résulte d'une part un grand nombre d'inconnues pour la résolution d'un problème 3D, et d'autre part l'impossibilité de faire tendre $\varepsilon \to 0$ (puisqu'il est matériellement impossible de faire $h \to 0$).

Les expériences numériques seront présentées après un bref rappel des résultats théoriques et une description succinte des éléments finis utilisés. Les résultats numériques confirment les idées généralement admises sur le sujet :

- efficacité de la brique H20 en élasticité tridimensionnelle, en particulier pour des plaques dont l'épaisseur 2ε est de l'ordre du pas de discrétisation ;

- à maillage donné, existence d'une épaisseur de plaque optimale pour laquelle l'écart entre solutions numériques bi et tridimensionnelle est minimal.

- cet écart ne diminue pas avec l'épaisseur, bien au contraire, ce qui peut s'expliquer par la dégradation du conditionnement du problème tridimensionnel quand l'épaisseur tend vers zéro. L'étude numérique par éléments finis de l'écart théorique entre solution bi- et tridimensionnelle devient alors très problèmatique.

1. RAPPELS SUR LA JUSTIFICATION DU MODELE BIDIMENSIONNEL DE PLAQUES

Les équations standard de l'élasticité linéaire tridimensionnelle formulées à l'aide du principe variationnel d'Hellinger-Reissner constituent le point de départ de la méthode proposée par Ciarlet et Destuynder. Le problème initial est transformé, par changement de variables, en un problème posé sur un ouvert fixe, indépendant de l'épaisseur de la plauqe. Des séries formelles d'approximations sont construites sur cet ouvert. Après le calcul des premiers termes de ces séries et le changement de variables inverse qui permet le retour au domaine initial on retrouve :

a) le modèle Biharmonique standard de la théorie des plaques

b) les hypothèses à priori concernant la variation des contraintes.

1.1. Le problème tridimensionnel.

NOTATIONS : Dans tout ce qui suit la convention de sommation sur les indices répétés est utilisée. Les indices grecs varient de 1 à 2 : les indices latins de 1 à 3.

Soit ω un ouvert fini de R^2 de frontière γ. Pour $\varepsilon > 0$ "la plaque" Ω^ε est définie par

$$(1)\quad \begin{cases} \Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[& , \Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times]-\varepsilon,\varepsilon[\\ \Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{\varepsilon\} & , \Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\} \end{cases}$$

Le problème à résoudre s'écrit :

Trouver les déplacements $\underset{\sim}{u}$ et les contraintes $\underset{\sim}{\sigma}$ qui vérifient :

Equation d'équilibre

$$(2)\quad -\partial_j \sigma_{ij} = f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \qquad \text{avec } f_\alpha^\varepsilon = 0$$

Loi de comportement

$$(3)\quad \sigma_{ij} = A_{ijkh} \cdot \varepsilon_{kh}(\underset{\sim}{u})$$

Conditions aux limites

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_{i3} = \pm G_i & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \end{cases}$$

où

· $\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u}) = 1/2\ (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ désigne le <u>tenseur linéarisé des déformations</u>

· a_{ijkh} désigne le tenseur d'élasticité dont les composantes appelées les modules d'élasticité vérifient les identités :

$$(5) \qquad a_{ijkh} = a_{khij} = a_{jikh} = a_{ijhk}$$

Pour un milieu homogène et isotrope la loi de comportement (2) devient :

$$(2') \qquad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{u})\delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{u})\delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker
λ, μ sont les coefficients de Lamé
E, ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson qui vérifient $E > 0$, $0 < \nu < 1/2$
$\lambda . \mu$ sont reliés à E, ν par

$$(6) \qquad \frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Soit, pour le milieu homogène

$$(7) \qquad a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij}\ \delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\ \delta_{jh} + \delta_{ih}\ \delta_{jk})$$

<u>Remarque</u> : La loi de comportement (2) (2') peut être inversée. C'est le cas de la formulation duale ou on exprime les déformations en fonction des contraintes

$$(8) \qquad \varepsilon_{ij} = A_{ijkh}\ \sigma_{kh}$$

où A_{ijkh} appelés <u>complaisances élastiques</u> vérifient des identités analogues à (5). De même pour un matériau homogène (8) devient

$$(8') \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\ \sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}) - \frac{\nu}{E}\ \sigma_{kk}(\underset{\sim}{u})\delta_{ij}$$

Les équations (1)-(4) peuvent être résolues à l'aide d'une formulation variationnelle mixte due à Hellinger et Reissner qui fait intervenir comme inconnues les déplacements et les contraintes.

Pour décrire le principe d'Hellinger-Reissner il faut introduire les espaces fonctionnels suivants :

$$(9)\quad \begin{cases} \underset{\sim}{V}^{\varepsilon} = \{v = (v_i) \in H^1(\Omega^{\varepsilon}))^3 \ ; \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^{\varepsilon}\} \\ \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} = \{\tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega^{\varepsilon}))^9 \ ; \ \tau_{ij} = \tau_{ji}\} \end{cases}$$

L'espace $\underset{\sim}{V}^{\varepsilon}$ est muni de la norme $(\sum_i \|v_i\|^2_{1,\Omega^{\varepsilon}})^{1/2}$ et l'espace $\underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon}$ de la norme $(\sum_{i,j} |\tau_{ij}|^2_{0,\Omega^{\varepsilon}})^{1/2}$

Le problème consiste alors à trouver le couple $(\sigma,u) \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{V}^{\varepsilon}$ qui satisfait

$$(10)\quad \forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \qquad \int_{\Omega^{\varepsilon}} A_{ijk\ell}\, \sigma_{ij}\, \tau_{k\ell} = \int_{\Omega^{\varepsilon}} \tau_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u})$$

$$(11)\quad \forall v \in \underset{\sim}{V}^{\varepsilon} \qquad \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v}) = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i\, v_i + \int_{\Gamma_+^{\varepsilon} \cup \Gamma_-^{\varepsilon}} g_i^+\, v_i$$

Ce problème peut s'écrire sous forme plus condensée :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\sigma,u) \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{V}^{\varepsilon} \text{ tels que :} \\ (12)\quad \forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \qquad \mathscr{A}^{\varepsilon}(\sigma,\tau) + \mathscr{B}^{\varepsilon}(\tau,u) = 0 \\ (13)\quad \forall v \in \underset{\sim}{V}^{\varepsilon} \qquad \mathscr{B}^{\varepsilon}(\sigma,v) = \mathscr{F}^{\varepsilon}(v) \end{cases}$$

où les formes bilinéaires $\mathscr{A}^{\varepsilon}$, $\mathscr{B}^{\varepsilon}$ et le forme linéaire $\mathscr{F}^{\varepsilon}$ sont définies respectivement par

$$(14)\qquad \mathscr{A}^{\varepsilon} : (\sigma,\tau) \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \to \mathscr{A}^{\varepsilon}(\sigma,\tau) = \int_{\Omega^{\varepsilon}} A_{ijk\ell}\ \sigma_{ij}\ \tau_{kh}$$

$$(15)\qquad \mathscr{B}^{\varepsilon} : (\tau,v) \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{V}^{\varepsilon} \to \mathscr{B}^{\varepsilon}(\tau,v) = - \int_{\Omega^{\varepsilon}} \tau_{ij}\ \varepsilon_{ij}\ (v)$$

$$(16)\qquad \mathscr{F}^{\varepsilon} : v \in \underset{\sim}{V}^{\varepsilon} \to \mathscr{F}^{\varepsilon}(v) = - \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i\ v_i - \int_{\Gamma_+^{\varepsilon} \cup \Gamma_-^{\varepsilon}} g_i\ v_i$$

L'existence et unicité de la solution de (12)-(13) se déduit du théorème de Brezzi cf [1] [2]

1.2. Le problème posé sur un ouvert de référence

Le problème (14), (15) est posé sur un ouvert Ω^{ε} dépendant de ε. Un changement de variables et de fonctions permet de transformer ce problème en un problème équivalent posé sur un ouvert fixe.

Soit

$$(17)\qquad \begin{cases} \Omega = \omega \times\ ]-1,1[& \Gamma_o = \gamma \times]-1,1[\\ \Gamma_+ = \omega \times \{1\} & \Gamma_- = \omega \times \{-1\} \end{cases}$$

et, pour chaque $\varepsilon > 0$ l'application

$$(18)\qquad F^{\varepsilon} : X = (x_1,x_2,x_3) \in \bar{\Omega} \to F^{\varepsilon}(X) = X^{\varepsilon} = (x_1,x_2,\varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^{\varepsilon}$$

En ce qui concerne les changements de variables : aux champs de vecteurs

$$\tau, v, f, g, : \Omega^{\varepsilon} \to \underset{\sim}{R}$$

on associe

$$\tau^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}, g^{\varepsilon} : \Omega \to \underset{\sim}{R}$$

définies par

$$(19)\qquad v_\alpha^\varepsilon = v_\alpha\, F^\varepsilon \quad , \quad v_3^\varepsilon = v_3^\varepsilon\, F^\varepsilon$$

$$(20)\qquad \sigma_{\sigma\beta}^\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta}\, F^\varepsilon, \quad \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = \sigma_{3\alpha}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha 3}\, F^\varepsilon \ , \ \sigma_{33}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\,\sigma_{33}\, F^\varepsilon$$

$$(21)\qquad f_i^\varepsilon = f_i . F^\varepsilon \quad , \quad g_i^\varepsilon = g_i . F^\varepsilon$$

Le théorème suivant, démontré dans [3.], explicite le problème à résoudre sur l'ouvert de référence.

THEOREME 1 Soit $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{V}$ le couple construit à partir de la solution de (12)-(13) en utilisant les formules (19)-(20). Cet élément satisfait

$$(22)\qquad \forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma} \quad \mathscr{A}_0(\sigma^\varepsilon,\tau) + \varepsilon^2 \mathscr{A}_2(\sigma^\varepsilon,\tau) + \varepsilon^4 \mathscr{A}_4(\sigma^\varepsilon,\tau) + \mathscr{B}(\tau, u^\varepsilon) = 0$$

$$(23)\qquad \forall v \in \underset{\sim}{V} \quad \mathscr{B}(\sigma^\varepsilon, v) = \varepsilon^{-2}\,\mathscr{F}_{-2}(v) + \varepsilon^{-1}\,\mathscr{F}_{-1}(v) + \mathscr{F}_0(v)$$

où

$$(24)\qquad \mathscr{A}_0(\sigma,\tau) = \int_\Omega \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha\beta}\,\tau_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\,\sigma_{\mu\mu}\,\tau_{\mu\mu} \qquad \text{("énergie de membrane")}$$

$$(25)\qquad \mathscr{A}_2(\sigma,\tau) = \int_\Omega \{2(\frac{1+\nu}{E})\sigma_{\alpha 3}\,\tau_{\alpha 3} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{33}\,\tau_{\mu\mu} + \sigma_{\mu\mu}\,\tau_{33})\} \text{("énergie de cissaillement")}$$

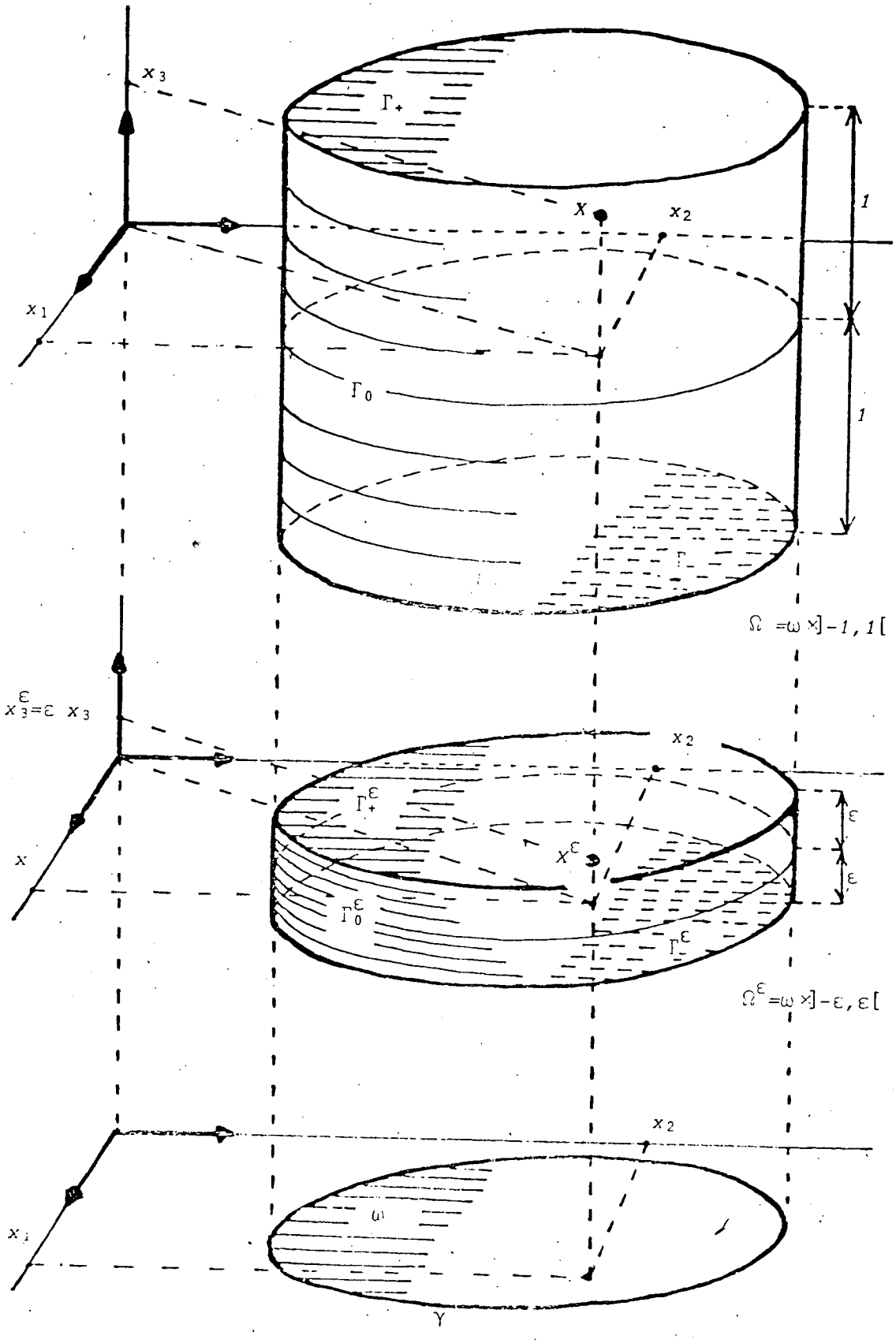
$$(26)\qquad \mathscr{A}_4(\sigma,\tau) = \int_\Omega \frac{1}{E}\,\sigma_{33}\,\tau_{33} \qquad \text{("énergie de flexion")}$$

$$(27)\qquad \mathscr{B}(\tau,v) = \int_\Omega \tau_{ij}\,\varepsilon_{ij}(v)$$

$$(28)\qquad \mathscr{F}_{-2}(v) = -\int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3^\varepsilon\, v_3$$

$$(29)\qquad \mathscr{F}_{-1}(v) = -\int_\Omega f_3^\varepsilon\, v_3 - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_\alpha^\varepsilon\, v_\alpha$$

$$(30)\qquad \mathscr{F}_0(v) = -\int_\Omega f_\alpha^\varepsilon\, v_\alpha$$


x_3
Γ_+
x
x_2
1
x_1
Γ_0
1
Γ_-
$\Omega = \omega \times]-1, 1[$
$x_3^\varepsilon = \varepsilon\ x_3$
x_2
Γ_+^ε
x
x^ε
ε
ε
Γ_0^ε
Γ_-^ε
$\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$
x_2
x_1
ω
γ

Les formes bilinéaires $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, \mathcal{B}$ étant indépendantes de ε ainsi que les espaces $\underset{\sim}{\Sigma}$ et $\underset{\sim}{V}$, il est possible, en suivant les techniques de LIONS [7] de chercher formellement un développement de $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ de la forme

$$\sigma^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\,\sigma^{-2} + \varepsilon^{-1}\,\sigma^{-1} + \sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \ldots \tag{31}$$

$$u^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\,u^{-2} + \varepsilon^{-1}\,u^{-1} + u^0 + \varepsilon u^1 + \ldots \tag{32}$$

En introduisant les relations (31), (32) dans (22), (23) et en identifiant à zéro les coefficients de ε^p on obtient, formellement les équations qui doivent vérifier les couples $(\sigma^p, u^p) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{V}$ avec $p \geq -2$.

En règle générale les problèmes ainsi obtenus sont de la forme :

$$\begin{cases} \forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma} \quad \mathcal{A}_0(\sigma,\tau) + \mathcal{B}(\tau,u) = \mathcal{G}(\tau), \\ \forall v \in \underset{\sim}{V} \qquad\qquad \mathcal{B}(\sigma,v) = \mathcal{F}(v) \end{cases} \tag{31}$$

En général un problème de type (31) n'a pas de solution sauf pour des formes linéaires $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ particulières. Les formes linéaires qui interviennent pour le calcul des termes d'ordre -2, -1 (σ^{-2},u^{-2}), (σ^{-1},u^{-1}) sont telles que le problème peut être résolu.

Dans la suite on calcule numériquement les premiers termes du développement et on compare les solutions ainsi obtenues à la solution 3D du problème initial.

1.3. Calcul des premiers termes du développement de $(\sigma^\varepsilon,u^\varepsilon)$

Le calcul analytique de ces termes est détaillé dans [3]

Les résultats sont les suivants :

THEOREME 2 Le terme $(\sigma^{-2},u^{-2}) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{V}$ est obtenu comme suit :

u_3^{-2} est indépendant de x_3 et est identifié à la solution $u_3^{-2} \in H_0^2(\omega) \cap H^3(\omega)$ de l'équation

$$(32) \qquad \forall v \in H_0^2(\omega) \quad \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \int_\omega \Delta u_3^{-2} \Delta v = \int_\omega (g_3^+ + g_3^-) v$$

Les autres inconnues sont données par :

$$(33) \quad \begin{cases} u_\alpha^{-2} = - x_3 \, \partial_\alpha u_3^{-2} \\ \sigma_{\alpha\beta}^{-2} = - \dfrac{E x_3}{(1-\nu^2)} \{(1-\nu)\partial_{\alpha\beta} u_3^{-2} + \nu \Delta u_3^{-2} \delta_{\alpha\beta}\} \\ \sigma_{3\beta}^{-2} = - \dfrac{E(1-x_3^2)}{2(1-\nu^2)} \partial_\beta \Delta u_3^{-2} \\ \sigma_{33}^{-2} = \dfrac{x_3(3-x_3^2)}{4}(g_3^+ + g_3^-) + \dfrac{g_3^+ + g_3^-}{2} \end{cases}$$

Le terme $(\sigma^{-1}, u^{-1}) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{V}$ est calculé de façon analogue.

THEOREME 3 Le terme $(\sigma^{-1}, u^{-1}) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{V}$ est obtenu de la manière suivante : La fonction u_3^{-1}, indépendante de $\underset{\sim}{x}_3$ est identifiée à la solution $u_3^{-1} \in H_0^2(\omega) \cap H^3(\omega)$ du problème variationnel :

$$(33) \qquad \forall v \in H_0^2(\omega) \quad \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \int_\omega \Delta u_3^{-1} \Delta v = \int_\omega \left(\int_{-1}^{1} f_3^\varepsilon dx_3 \right) v - \int_\omega (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \partial_\alpha v$$

Soit $((n_{\alpha\beta}^{-1}), ((u_\alpha^o)^{-1})) \in (L^2(\omega))_s^4 \times H_0^1(\omega))^2$

[où $(L^2(\omega))_s^4 = (\tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in (L^2(\omega))^4 \; \tau_{12} = \tau_{21})$]

l'unique solution du problème variationnel mixte suivant : $(n^{-1} = (n_{\alpha\beta}^{-1}))$:

$$(34) \qquad \forall (\tau_{\alpha\beta}^o) \in (L^2(\omega))_s^4, \int_\omega \left(\frac{1+\nu}{E} n_{\alpha\beta}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^o - \frac{\nu}{E} n^{-1}{}_{\mu\mu} \tau_{\mu\mu}^o \right) - 2 \int_\omega \tau_{\alpha\beta}^o \, \partial_\alpha (u_\beta^o)^{-1} = 0$$

$$(35)\qquad \forall v_\alpha^0 \in H_0^1(\omega)\ ,\ \int_\omega n_{\alpha\beta}^{-1}\,\partial_\alpha v_\beta^0 = \int_\omega (g_\alpha^+ + g_\alpha^-)v_\alpha^0$$

Les autres inconnues sont données par :

$$(36)\qquad u_\alpha^{-1} = (u_\alpha^0)^{-1} - x_3\,\partial_\alpha u_3^{-1}$$

$$(37)\qquad \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{n_{\alpha\beta}^{-1}}{2} - \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\partial_{\alpha\beta}u_3^{-1} + \nu\,\Delta u_3^{-1}\,\delta_{\alpha\beta}\}$$

$$(38)\qquad \sigma_{3\beta}^{-1} = \frac{g_\beta^+ - g_\beta^-}{2} + \frac{g_\beta^+ + g_\beta^-}{2}\,x_3 - \frac{E(1-x_3^2)}{2(1-\nu^2)}\,\partial_\beta\,\Delta u_3^{-1}$$

$$(39)\qquad \sigma_{33}^{-1} = \frac{x_3(1-x_3^2)}{4}\int_{-1}^{1} f_3^\varepsilon\,dx_3 + \left(\frac{(x_3+1)}{2}\int_{-1}^{1} f_3^\varepsilon\,dx_3 - \int_{-1}^{x_3} f_3^\varepsilon\,dx_3\right) +$$

$$+ \frac{1-x_3^2}{4}\,\partial_\alpha(g_\alpha^+ + g_\alpha^-) + \frac{x_3(1-x_3^2)}{4}\,\partial_\alpha(g_\alpha^+ - g_\alpha^-)$$

1.4. Retour à l'ouvert Ω^ε

Les couples $(\tilde\sigma^{-2},\tilde u^{-2})$, $(\tilde\sigma^{-1},\tilde u^{-1})$ définis sur Ω^ε qui correspondent respectivement à (σ^{-2},u^{-2}), (σ^{-1},u^{-1}) sont obtenus par des changements de variables analogues et cohérents à ceux définis en (19)-(21).

Par exemple

$$\tilde u_3^{-2} = \varepsilon^{-3}\,u_3^{-2}\,G^\varepsilon \qquad \tilde u_3^{-1} = \varepsilon^{-2}\,u_3^{-1}\,G^\varepsilon$$

Ces changements de variable (dont la liste complète est fournie dans [3]) permettent de trouver les équivalents sur Ω^ε des théorèmes 2 et 3 et en particulier

THEOREME 4 La fonction $\tilde u_3^{-2}$ qui fait partie de l'élément $(\tilde\sigma^{-2},\tilde u^{-2}) \in \tilde\Sigma^\varepsilon \times \tilde V$ est identifiée à la solution $\tilde u_3^{-2} \in H_0^2(\omega) \cap H^3(\omega)$ de l'équation variationnelle

$$(40)\qquad \forall v \in H_0^2(\omega)\quad \frac{2E\,\varepsilon^3}{(1-\nu^2)}\int_\omega \Delta\tilde u_3^{-2}\Delta v = \int_\omega (g_3^+ + g_3^-)v$$

et aussi :

La fonction $\tilde{u}_3^{-1}$ de l'élément $(\tilde{\sigma}^{-1},\tilde{u}^{-1}) \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{V}$ est identifiée à la solution $\tilde{u}_3^{-1} \in H_o^2(\omega)$ du problème variationnel

$$(41) \qquad \forall v \in H_o^2(\omega) \quad \frac{2E\,\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} \int_\omega \Delta\tilde{u}_3^{-1}\Delta v = \int_\omega \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3\, dx_3^{\varepsilon}\right)v - \int_\omega (g_\alpha^+ - g_\alpha^-)$$

1.5. Conclusion

Si on considère uniquement les 2 premiers termes $\tilde{u}_3^{-2}$ et $\tilde{u}_3^{-1}$ dans le développement formel du déplacement transverse u_3 en fonction de l'épaisseur, on obtient la fonction U_2 indépendante de x_3 définie par

$$(42) \qquad u_{2d} = \tilde{u}_3^{-2} + \tilde{u}_3^{-1} \in H^2(\omega) \text{ et qui est solution de l'équation biharmonique}$$

$$(43) \qquad \frac{2E\,\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2 U_{2d} = g_3^+ + g_3^- + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3\, dx_3 + \partial_\alpha(g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \text{ dans } \omega$$

L'équation (43) caractérise la solution 2D d'un problème de plaque encastrée.

Il s'agit maintenant de comparer cette fonction à la solution U_{3d} obtenue en résolvant les équations tridimensionnelles (1)-(4) qui s'écrivent pour un matériau homogène

$$(44) \qquad \begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij} = f_i^{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{u}_{3d})\delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u}_{3d}) \\ \sigma_{i3} = \pm\, g_i^{\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_I^{\varepsilon} \\ \underset{\sim}{u}_{3d} = \underset{\sim}{0} \text{ sur } \Gamma_o^{\varepsilon} \end{cases}$$

2. DESCRIPTION DES METHODES D'ELEMENTS FINIS UTILISES.

2.1. Problème tridimensionnel

Le problème 3D (44) est résolu à l'aide d'une formulation variationnelle classique en déplacement après élimination des contraintes. Les éléments finis utilisés sont les éléments Q2 droits et isoparamétriques. Le domaine Ω est discrétisé en hexaèdres droits ou courbes à 20 noeuds. Sur chaque hexaèdre les déplacements u_1, u_2, u_3 sont interpolés par des polynômes de degré 2. Le logiciel utilisé pour la résolution de ce problème est MODULEF. Les éléments finis choisis sont HEXA 3Q2D et HEXA 3Q2C de la bibliothique d'éléments finis d'élasticité linéaire. cf [5]

Remarque : (sur le choix de l'élément fini utilisé). Plusieurs types d'éléments finis sont disponibles. Les hexaèdres ont l'avantage de permettre un maillage facile. Des tests ont été faits avec des éléments Q1 (les hexaèdres à 8 noeuds pour lesquels les déplacements sont interpolés par des fonctions de degré 1). Les résultats obtenus sont nettement moins satisfaisants que ceux obtenus à l'aide des éléments Q2.

Il semble que les éléments Q1 sont peu adaptés pour prendre en compte les conditions d'encastrement qui les rendent trop "rigides". Ce résultat est, par ailleurs connu en élasticité 3D en général.

2.2. Problème bidimensionnel

L'équation biharmonique (43) est résolue par une méthode d'éléments finis mixtes due à Glowinski-Pironneau [6] [8].

La méthode consiste à décomposer le problème d'ordre 4 en un nombre fini de problèmes d'ordre 2. Cette décomposition rend possible l'utilisation des éléments finis de classe C^0 alors que la résolution d'un problème d'ordre 4 demande en général l'utilisation d'éléments de classe C^1.

Les éléments finis utilisés dans les tests sont les éléments P2 droits et isoparamétriques.Le domaine est discrétisé en triangles à 6 noeuds ; le déplacement normal est interpolé par des polynomes de degré 2. La méthode ci-dessus est également implementée dans la bibliothèque MODULEF [9].

3. RESULTATS NUMERIQUES.

Les problèmes traités dans ce paragraphe ont une solution analytique bidimensionnelle connue de façon explicite. Il est donc possible d'étudier le comportement des solutions du problème bidimensionnel et du problème tridimensionnel en fonction - du pas de discrétisation
- de l'épaisseur

3.1. Rappels

$\underset{\sim}{u}_{3d}$ est la solution du problème tridimensionnel suivant :

$$(45)\quad \begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}_{3d}) = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}_{3d}) = \lambda\, \varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{u}_{3d})\delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u}) & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) & \\ \sigma_{i3} = g_i^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_+^\varepsilon \\ \sigma_{i3} = 0 & \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon \\ \underset{\sim}{u}_{3d} = 0 & \text{sur } \Gamma_o^\varepsilon \end{cases}$$

où Ω^ε, Γ_+^ε, Γ_-^ε, Γ_o^ε sont définies par (1)

$\underset{\sim}{u}_{2d}$ est solution du problème de plaque bidimensionnel :

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{2E\,\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2 u_{2d} = g_3^+ & \text{dans } \omega \\ u_{2d} = \partial_\nu u_{2d} = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

où ω est l'intérieur de l'ellipse d'équation

$$(47)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ a = 10 \\ b = 7 \end{cases}$$

Les coefficients E, ν(module de Young et coefficient de Poisson) sont donnés par

$$(48)\quad \begin{cases} E = .21\ 10^{+6} \\ \nu = 0.3 \end{cases}$$

3.2. Problème 1

Pour ce problème, la fonction g_ε de (45)-(46) est donnée par

$$(49)\quad \begin{cases} g^\varepsilon = (g_1, g_2, g_3) \quad \text{avec} \\ g_1 = g_2 = 0 \\ g_3 = q = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas la solution exacte du problème bidimensionnel est connue.Elle est donnée par :

$$(50)\quad u_{2d} = W_o\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

ou

$$W_o = \frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2b^2}\right)}$$

avec q = la charge uniforme

$$D = \frac{E(2\varepsilon)^3}{12(1-\nu^2)}$$

avec a, b, E, ν définis respectivement par (47), (48) et
ε épaisseur de la plaque.

3.2.1. Notations - Généralités.

Afin de faciliter les comparaisons entre les solutions $(u_{2d})_h$ solution calculée du problème bidimensionnel et $(u_{3d})_h$ solution calculée du problème tridimensionnel plusieurs quantités à caractère global ou local sont calculées. Pour les quantités qui présentent un caractère local (noeud par noeud par exemple) il est utile d'avoir les mêmes noeuds dans les deux problèmes traités. Pour obtenir des noeuds communs dans tous les cas de figure la triangulation du domaine est obtenue de la manière suivante :

a) maillage de l'ellipse en quadrilatères

b) pour le problème 2D chaque quadrilatère est divisé en deux triangles

c) pour le problème 3D chaque quadrilatère devient un hexaëdre.

Pour une triangulation $\mathcal{T}_h$ donnée

NOE désigne le nombre de noeuds du maillage

NE désigne le nombre d'éléments.

Les différentes quantités qui sont utilisées pour mesurer l'écart entre les différentes solutions sont définies ci-dessous.

Comparaison entre u_2 et (u_{2d})

. globale

$$ER2D = \frac{|u_{2d} - (u_{2d})_h|_{L^2(\omega)}}{|u_{2d}|_{L^2(\omega)}}$$

$|\ |_{L^2(\omega)}$ désigne la norme L^2 discrète c'est à dire

$$|u|_{L^2(\omega)} = \left(\sum_{i=1}^{NOE} u^2(i)\right)^{1/2}$$

. en chaque noeud

$$DIF2 = u_{2d}(i) - (u_{2d})_h(i)$$

$$DIF2R = DIF2 \ / \ u_{2d}(i)$$

$$P2D = 100\ (u_{2d})_h(i) / u_{3d}(i)$$

Comparaison entre u_{2d} et $(u_{3d})_h$

Dans cette partie $(u_{3d})_h$ désigne la composante en z du déplacement obtenu après résolution du problème tridimensionnel.

. globale

$$ER3D = \frac{|u_{2d} - (u_{3d})_h|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}}{|u_{2d}|_{L^2}}$$

. couche par couche

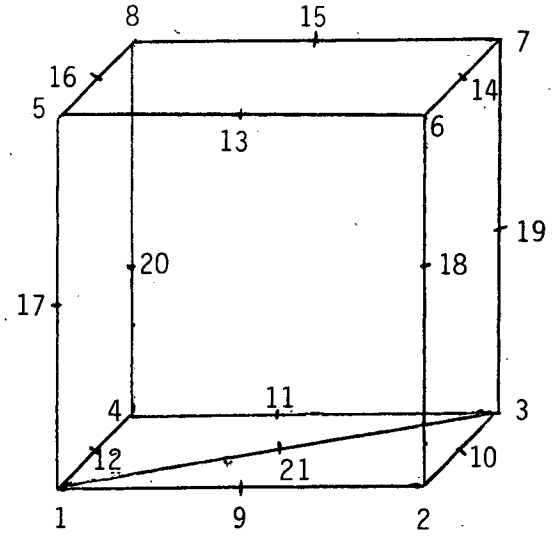
$$ER3D0 = |(u_{3d})_h(x,y,0) - u_{2d}|_{L^2(\Gamma_0^\varepsilon)} \ / \ |u_{2d}|_{L^2}$$

$$ER3D\varepsilon^+ = |(u_{3d})_h(x,y,\varepsilon) - u_{3d}|_{L^2(\Gamma_+^\varepsilon)} \ / \ |u_{2d}|_{L^2}$$

$$ER3D\varepsilon^- = |(u_{3d})_h(x,y,-\varepsilon) - u_{2d}|_{L^2(\Gamma_-^\varepsilon)} / |u_{2d}|_{L^2}$$

Remarque : $|u_{2d}|_{L^2(.)} = \left(\sum_{i=1}^{NOEA} (u_{2d}(i))^2\right)^{1/2}$ ou NOEA représente le nombre de noeuds du maillage 2D qui correspondent aux noeuds respectifs du problème 3D. Ainsi dans ER3D un même noeud peut intervenir 2 ou 3 fois (2 pour les milieux de côte des "quadrilatères" de départ, 3 pour les sommets).

Exemple



Dans la figure ci-dessus

- le maillage 3D est composé d'un hexaèdre Q2 dont les noeuds sont numérotés de 1 à 20

- le maillage 2d est composé de 2 triangles P2 dont la liste des noeuds suit **triangle** 1 : 1, 2, 3, 9, 10, 21
  triangle 2 : 1, 3, 4, 21, 11, 12

Dans ce cas particulier

$$ER3D = \Big[\sum_{(i,j)\in\tau} (u_{2d}(i) - (u_{3d})_h(j))^2\Big]^{1/2} \Big/ \Big[\sum_{(i,j)\in\tau} (u_{2d}(i))^2\Big]^{1/2}$$

avec $\tau = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,5), (2,6), (3,7), (4,8), (9,9), (10,10), (11,11), (12,12), (9,13), (10,14), (11,15), (12,16), (1,17), (2,18), (3,15), (4,20)\}$

$$ER3D\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_+ \\ \varepsilon_- \end{pmatrix} = \Big[\sum_{(i,j)\in\tau^0_{\tau^{\varepsilon+}}_{\tau^{\varepsilon-}}} (u_{2d}(i) - (u_{3d})_h(j)^2\Big]^{1/2} \Big/ \Big(\sum_{(i,j)\in\tau} (u_{2d}(i)^2\Big)^{1/2}$$

avec $\tau^{o} = \{(1.17), (2.18), (3.19), (4.20)\}$

$\tau^{\varepsilon+} = \{(1.5), (2.6), (3.7), (4.8), (9.13), (10.14), (11.15), (12.16)\}$

$\tau^{\varepsilon-} = \{(1.1), (2.2), (3.3), (4.4), (9.9), (10.10), (11.11), (12.12)\}$

. en chaque noeud

$DIF3 = u_{2d}(i) - (u_{3d})_h(j)$ où j est le noeud 3d qui "correspond" au noeud i 2d (cf ci-dessus)

$DIF3R = (u_{2d}(i) - (u_{3d})_h(j)) / (u_{2d}(i))$

$P3R = 100 \dfrac{(u_{3d})_h(i)}{(u_{2d})\ (i)}$

Comparaison entre $(u_{2d})_h$ et $(u_{3d})_h$

. global

$ER23 = |(u_{2d})_h - (u_{3d})_h| / |/(u_{2d})_h|$

. en chaque noeud

$DIF23 = (u_{2d})_h(i) - (u_{3d})_h(j)$

3.2.2. Comportement des solutions en fonction du pas de discrétisation h

Pour une épaisseur constante ($2\varepsilon = 0.1$) le problème 2d et 3d est résolu pour différentes triangulations. Le premier maillage est représenté dans la figure 1.

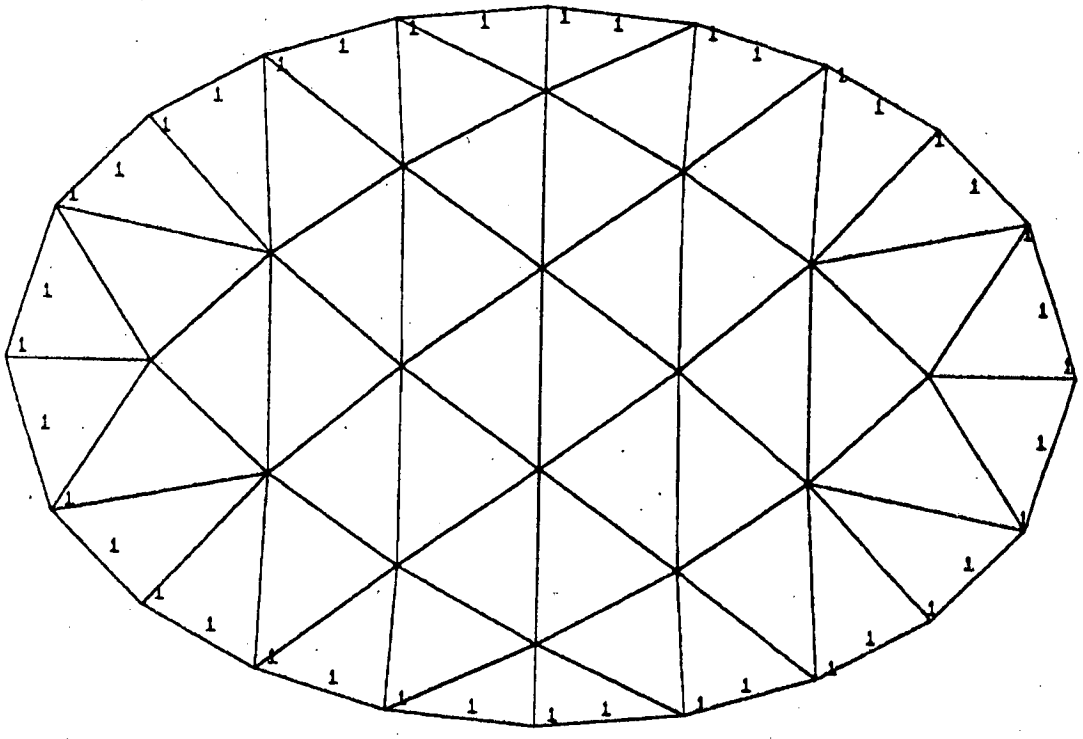


Figure 1

Maillage 1 : Nombre d'éléments = 50
Nombre de noeuds 121

Le maillage 2 est obtenu à partir du maillage 1 en subdivisant chaque élément en 4 éléments. La figure 2 représente le maillage en quadrilatères. (Pour obtenir le maillage 2D chaque quadrilatère est subdivisé en 2 triangles).

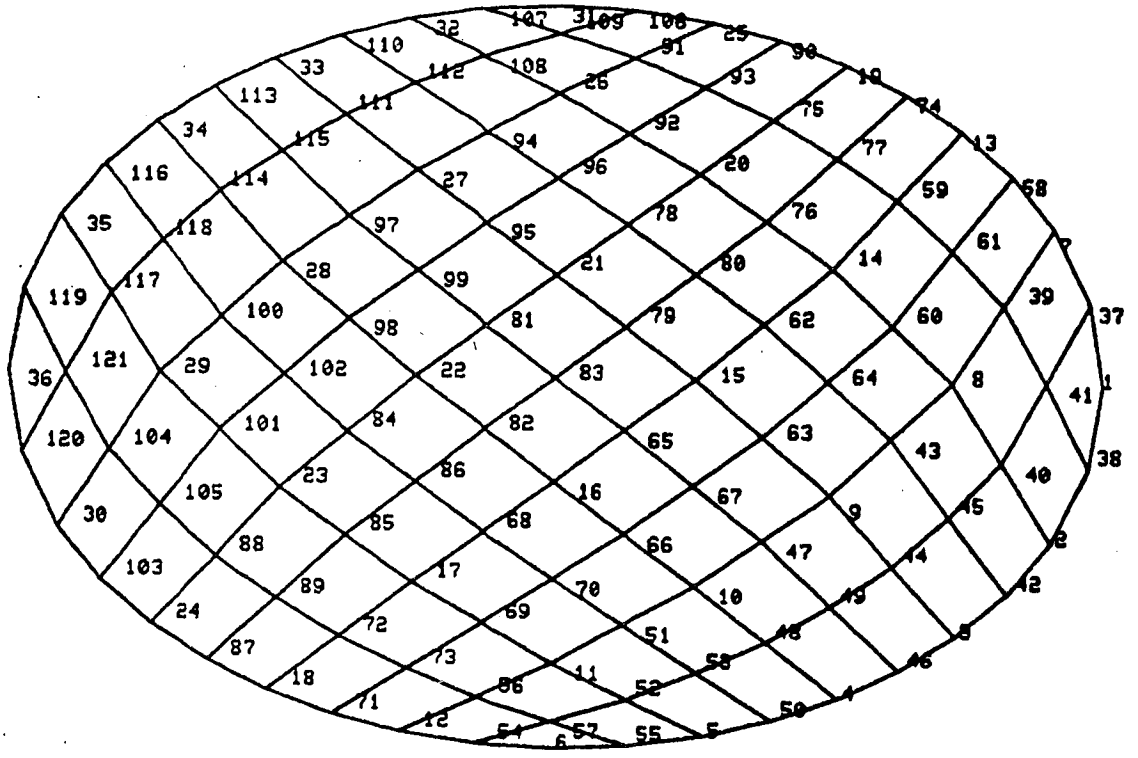


Figure 2

Maillage 2 en quadrilatères NE = 100

NOE = 121

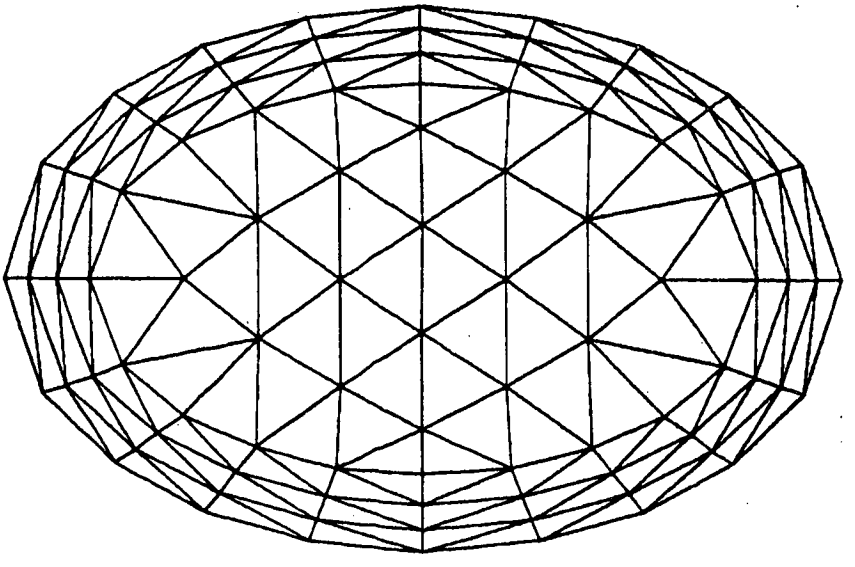


Figure 3

Maillage 3 NE = 170

NOE = 361

Le maillage 3 est moins fin que le 2 mais la distribution des noeuds est plus satisfaisante. En effet, le maillage se resserre autour de la frontière du domaine pour mieux prendre en compte les phénomènes de couche limite.

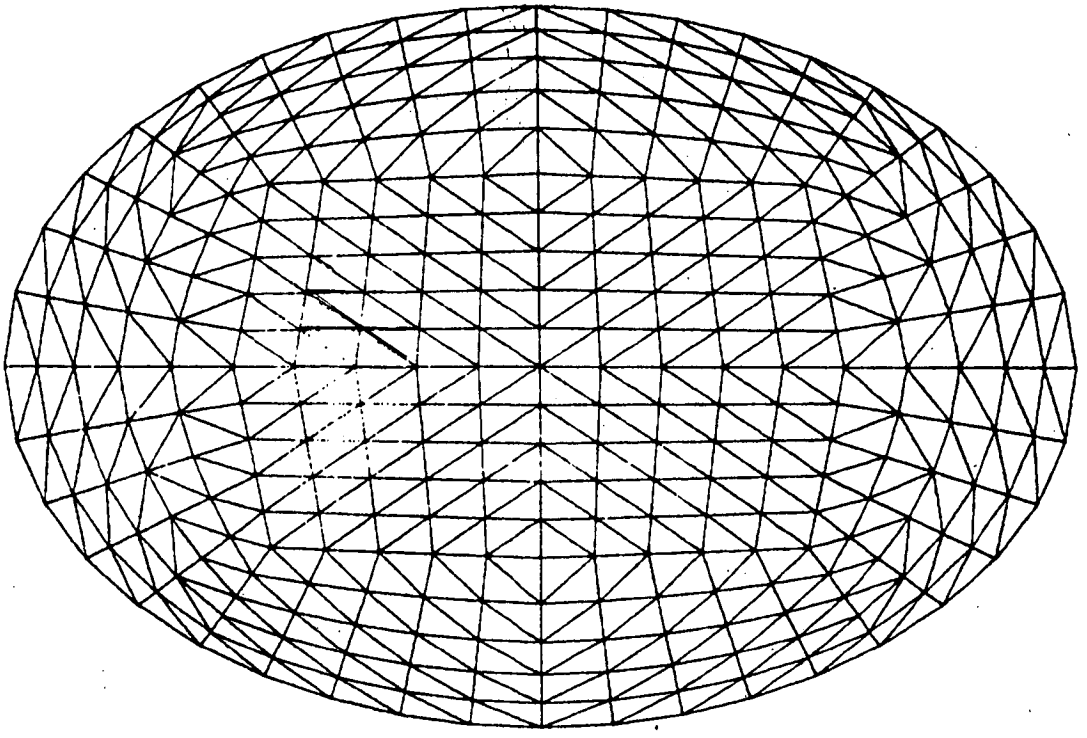


Figure 4

Maillage 4

NE = 600

NOE = 1241

Le maillage n°4 sera utilisé dans toute la suite. C'est un maillage plus fin et régulier et qui comme le 3 se resserre vers le bord.

Pour le calcul tridimensionnel seul un quart de la plaque est utilisé. Il est alors nécessaire d'introduire les conditions de symétrie.

$$\begin{cases} u_2 = 0 & \text{sur la face } x = 0 \\ U_1 = 0 & \text{sur la face } y = 0 \end{cases}$$

Le maillage de la surface moyenne du quart de plaque est représenté dans la figure 5, celui de la plaque 3D dans la figure 5 bis.

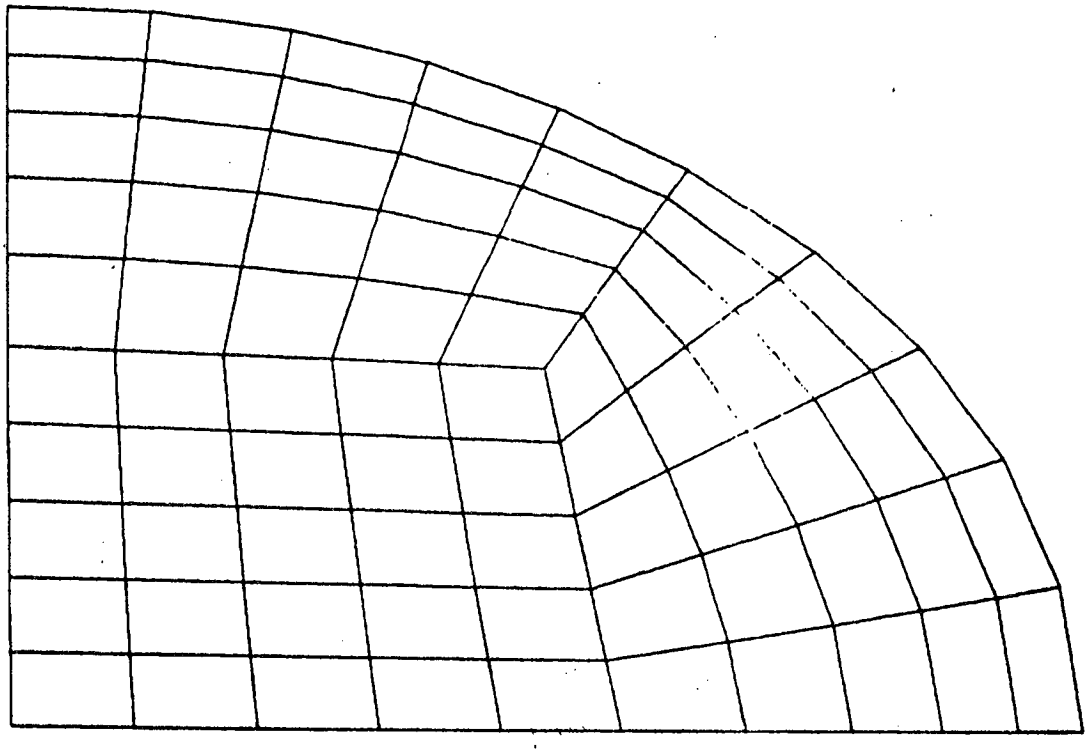


Figure 5

Les résultats obtenus sur ces quatre maillages confirment les résultats classiques aussi bien pour le problème bidimensionnel que pour le problème tridimensionnel : plus h est petit plus les résultats sont précis.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 1.

MAILLAGE	PROBLEME BIDIMENSIONNEL		PROBLEME TRIDIMENSIONNEL	
	NBRE DE D.L.	ER2R	NBRE DE D.L	ER3R
1	121	$0.94\ 10^{-2}$	684	0.66
2	441	$0.13\ 10^{-2}$	2412	0.15
3	361	$0.24\ 10^{-2}$	1944	0.23
4	1241	$0.14\ 10^{-2}$	1809 (sur le quart!)	$0.14\ 10^{-1}$

TABLEAU 1

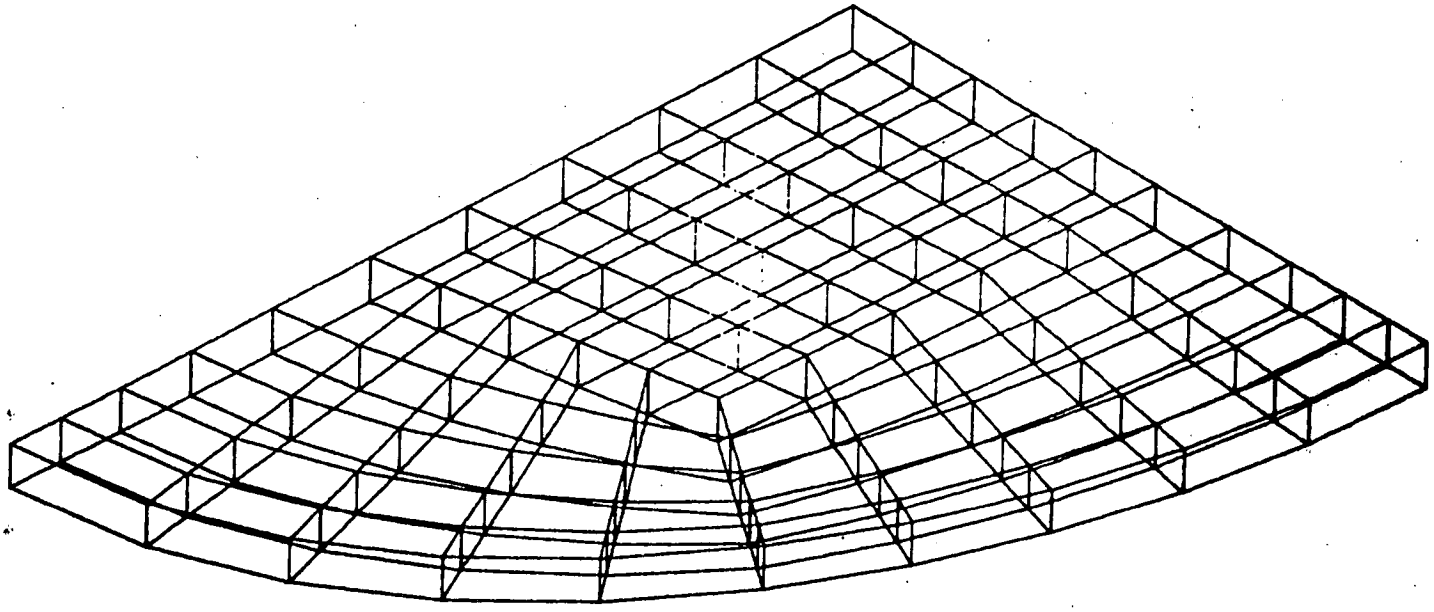


Figure 5.bis

Maillage de la plaque 3D en hexaèdres Q2

NE = 75

NOE = 603

1809 degrés de liberté

3.2.3. Comportement des solutions en fonction de l'épaisseur (2ε)

Dans ce paragraphe le maillage de la couche moyenne est fixe (et est représenté fig 4 et 5), seule l'épaisseur varie.

Le maillage 2D comprend 600 éléments et 1241 noeuds (1241 degrés de liberté).

Le problème 3D est traité sur un quart de plaque : le maillage est constitué de 75 éléments : 603 noeuds soit 1809 degrés de liberté.

Il y a une couche d'hexaèdres en épaisseur.

Remarques

1) Les éléments finis Q1 (hexaèdres à 8 noeuds : les déplacements sont interpolés par des fonctions linéaires) donnent de mauvais résultats.

2) Dans tous les cas de figure

$$(u_{3d})_h\ (x,y,0) \cong (u_{3d})_h\ (x,y,\varepsilon) \cong (u_{3d})_h\ (x,y,-\varepsilon)$$

Cette relation locale implique de façon évidente le fait que ER3D, ER3D0, $ER3D^{\varepsilon^+}$, $ER3D^{\varepsilon^-}$ sont sensiblement les mêmes.

Le tableau 2 contient les valeurs de ER3D pour différentes valeurs de l'épaisseur variant de 0.1 à 1.2.

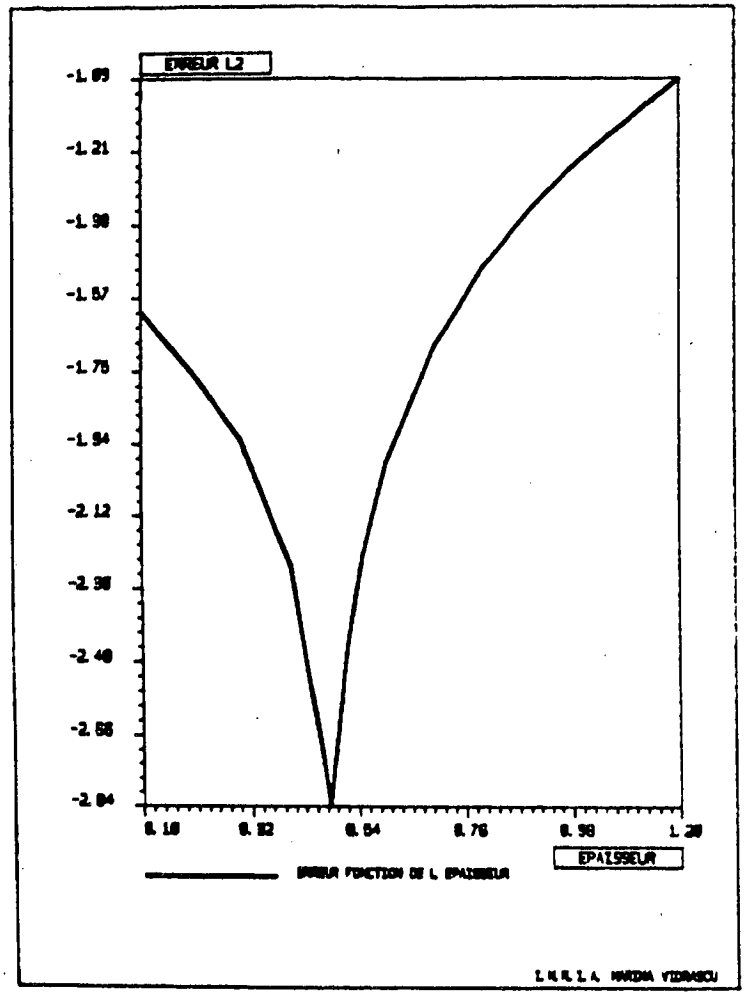
Sur la surface moyenne le pas de discrétisation h est, pour ce maillage de l'ordre de 1.

La figure 6 contient une représentation graphique du même résultat.

ER2D = $0.147\ 10^{-3}$ pour ce problème

EPAISSEUR (2ε)	ER3D	ER3D (2 couches d'hexaèdres)
0.1	$0.246\ 10^{-1}$	$0.176\ 10^{-1}$
0.2	$0.176\ 10^{-1}$	
0.3	$0.119\ 10^{-1}$	
0.4	$0.575\ 10^{-2}$	
0.45	$0.249\ 10^{-2}$	
0.48	$0.145\ 10^{-2}$	
0.5	$0.229\ 10^{-2}$	$0.107\ 10^{-1}$
0.52	$0.37\ 10^{-2}$	
0.55	$0.6123\ 10^{-2}$	
0.6	$0.105\ 10^{-1}$	
0.7	$0.205\ 10^{-1}$	
0.8	$0.32\ 10^{-1}$	
0.9	$0.450\ 10^{-1}$	
1.	$0.59\ 10^{-1}$	$0.762\ 10^{-1}$
1.2	$0.93\ 10^{-1}$	

TABLEAU 2.



L'erreur en fonction de l'épaisseur.

Figure 6

Les figures 7 ,8 représentent les isovaleurs de la solution $(u_{2d})_h$

La figure 9 représente les isovaleurs de déplacement vertical correspondant à $(u_{3d})_h$.

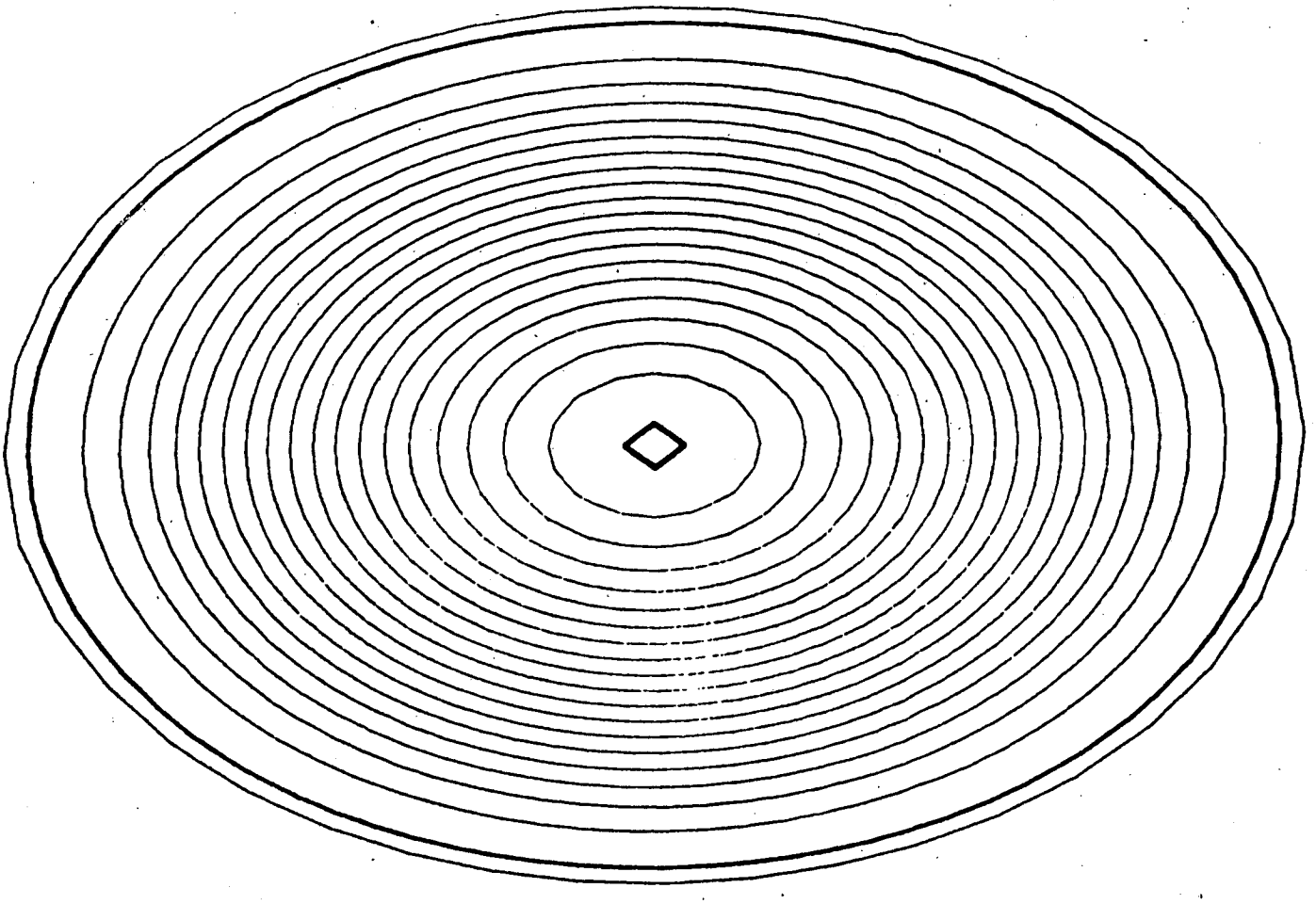


Figure 7

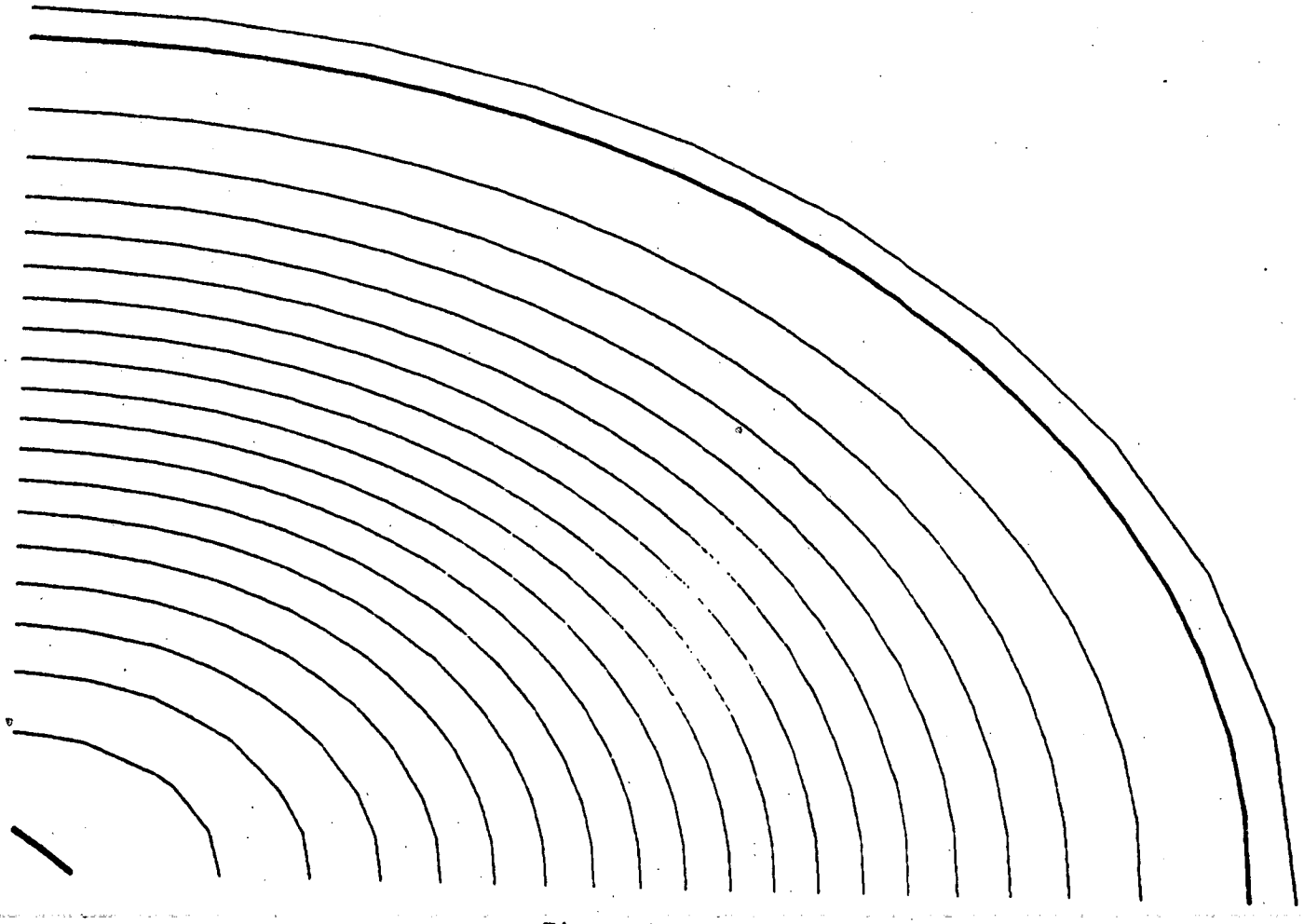


Figure 8

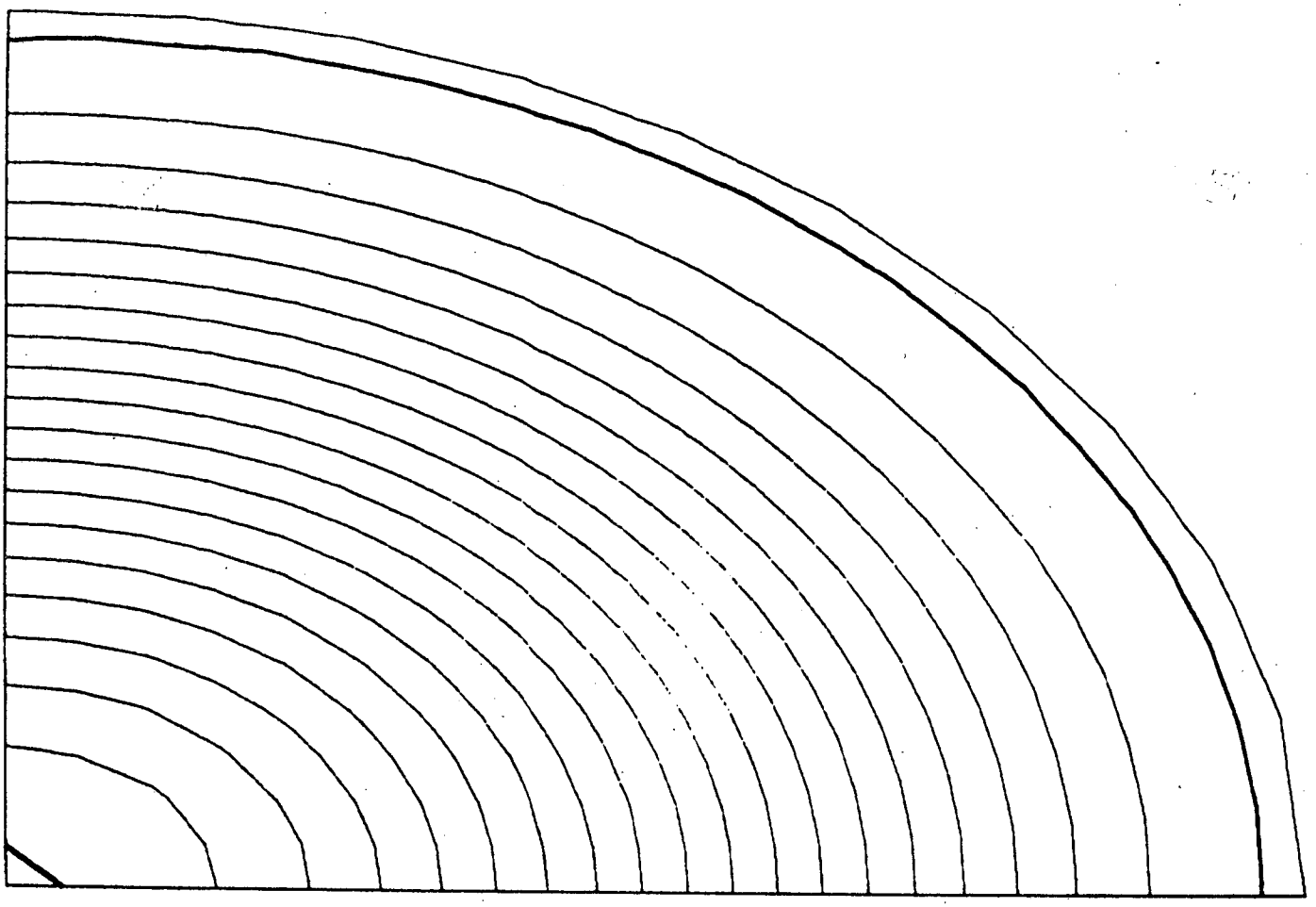


Figure 9.

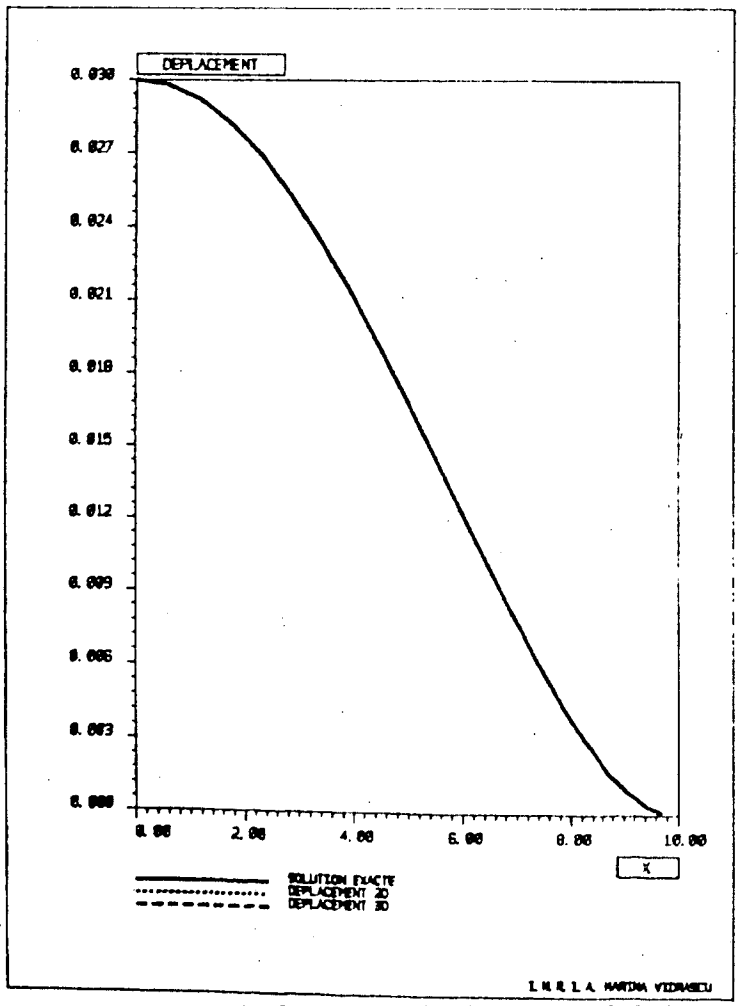


Figure 10

La figure 10 représente les déplacements u_{2d}, $(u_{2d})_h$, $(u_{3d})_h$ le long de l'axe Ox.

En fait, compte-tenu de la remarque 2 de 3.2.3, pour les valeurs de $(u_{3d})_h$ il s'agit d'une moyenne des deux (respectivement trois) déplacements des noeuds de même abscisse sur la face y = 0

La figure 11 représente ces mêmes quantités le long de l'axe Oy.

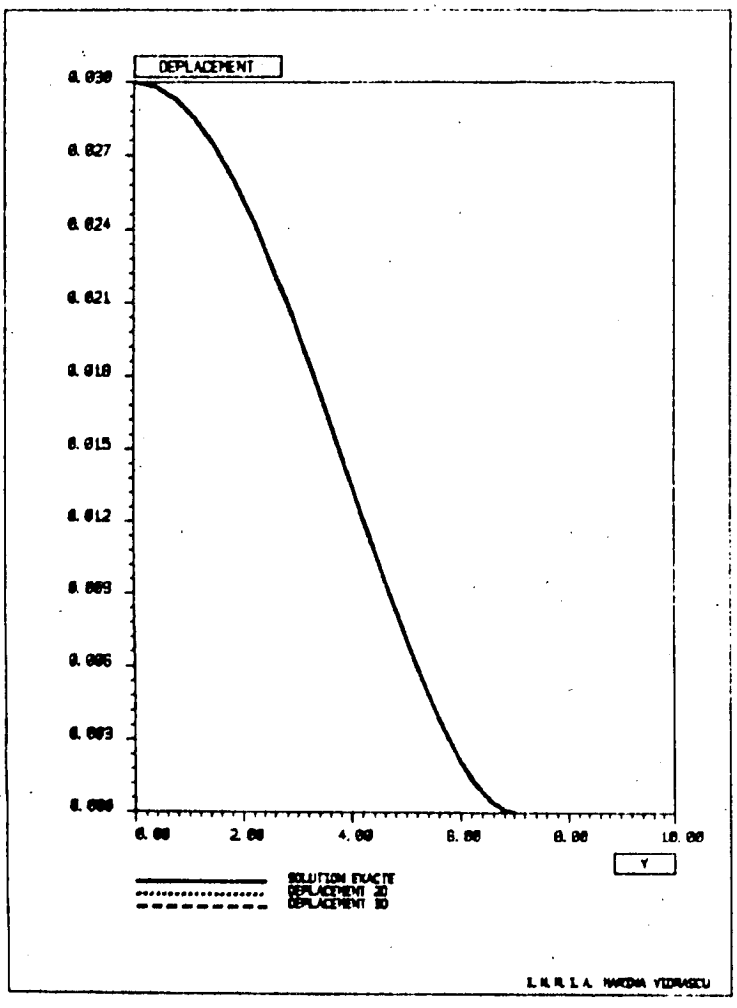


Figure 11.

REMARQUES :

- dans les deux cas (les figures 10,11) les trois courbes sont pratiquement superposées ce qui signifie d'une part une bonne précision dans les calculs et d'autre part que le modèle est valide.
- le déplacement atteint son maximum au centre de l'ellipse.

La figure 12 représente les isovaleurs de la différence $((u_{2d})_h - (u_{3d})_h)$. Le phénomène de couche limite étudié par Destuynder (cf [4]) est retrouvé numériquement, l'erreur est plus importante au voisinage de l'encastrement.

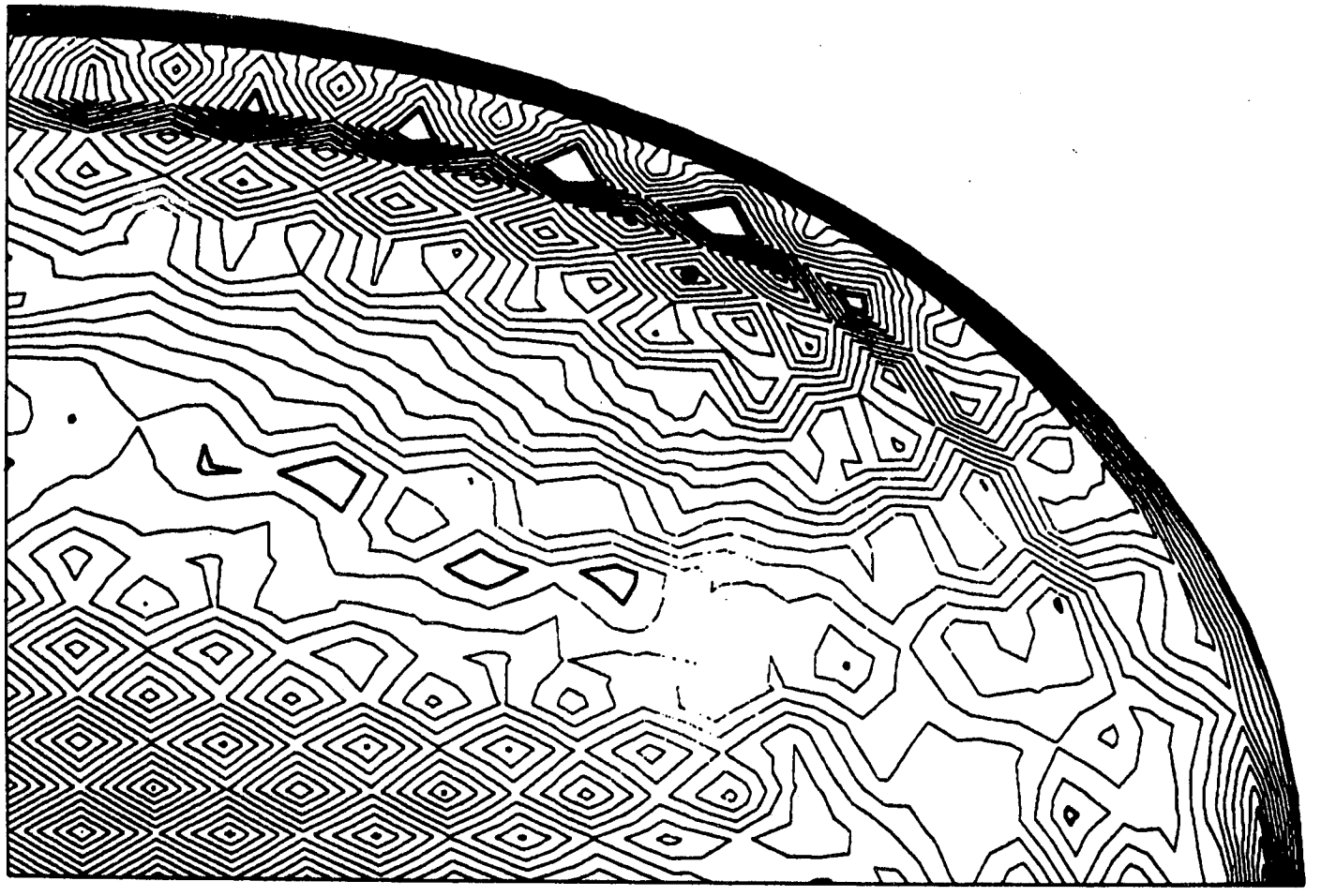


Figure 12

Pour mieux remarquer le phénomène de couche limite il convient de représenter la différence relative $((u_{2d})_h-(u_{3d})_h)/u_{2d}$. Les isovaleurs de cette quantité sont présentées dans la figure 13.

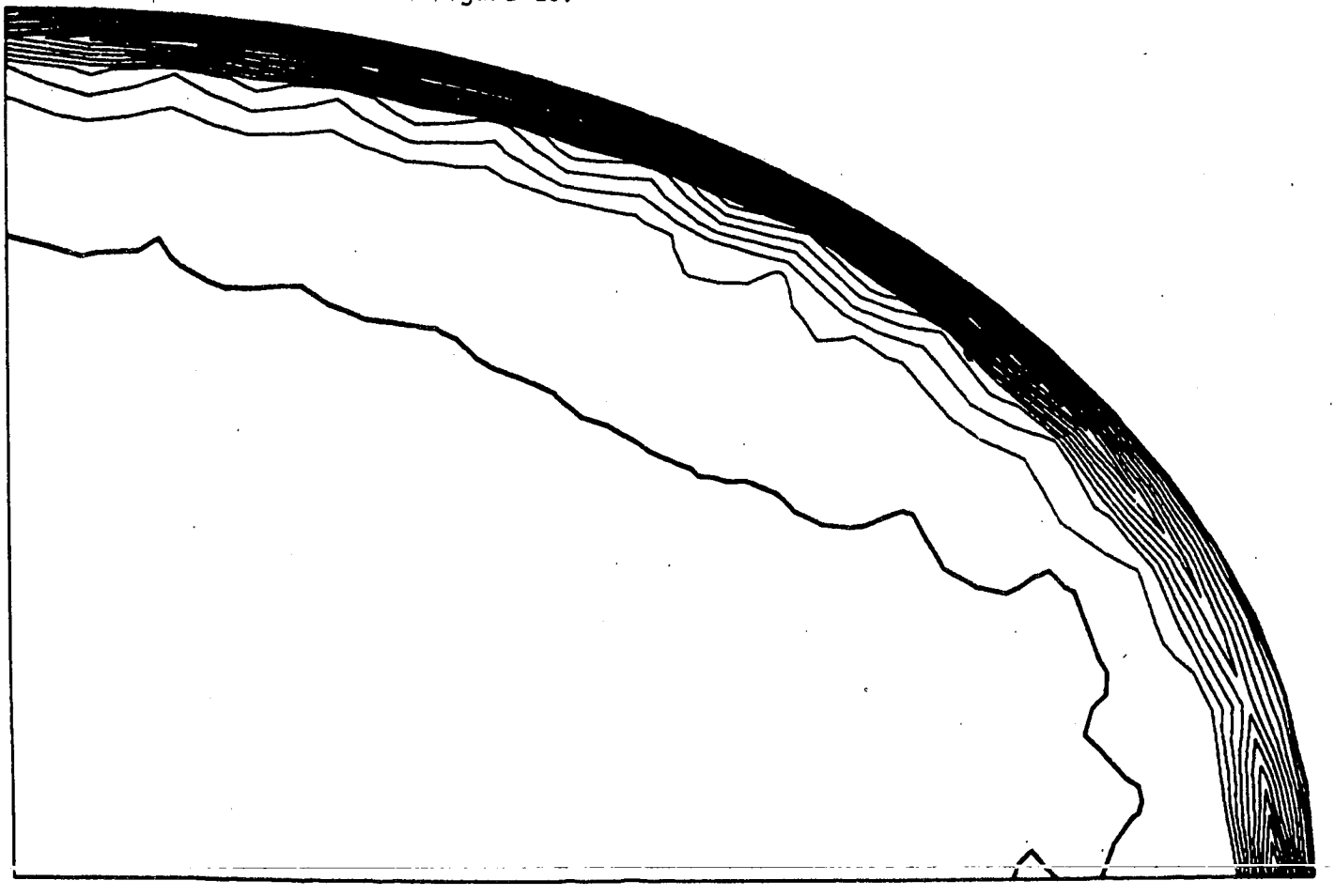


Figure 13.

3.3. Remarque

Le comportement de la solution en fonction de l'épaisseur a été étudié également sur un autre cas. Le domaine Ω^ε est le même mais (49) est remplacé par

$$g^\varepsilon = (g_1, g_2, g_3)$$

avec

$$g_1 = g_2 = 0$$

$$g_3 = \Delta^2 GF + 2\Delta G\,\Delta F + G\Delta^2 F + 4\,\frac{\partial}{\partial x}(\Delta G)\,\frac{\partial}{\partial x}F + 4\,\frac{\partial}{\partial y}(\Delta G)\,\frac{\partial}{\partial y}F +$$

$$+ 4\,\frac{\partial}{\partial x}(\Delta F)\,\frac{\partial}{\partial x}G + 4\,\frac{\partial}{\partial y}(\Delta F)\,\frac{\partial}{\partial y}G + 4\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ 8\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$$

où

$$F(x,y) = \left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

$$G(x,y) = e^{-c\,[(x-2)^2 + (y-2)^2]} + e^{-c\,[(x-2)^2 + (y+2)^2]} +$$

$$+ e^{-c\,[(x+2)^2 + (y-1)^2]} + e^{-c\,[(x+2)^2 + (y+2)^2]}$$

où $c = 10^{-3}$

Les résultats obtenus sont similaires à ceux décrits au tableau 2.

4. CONCLUSION.

Il est difficile de conclure sur si peu d'exemples numériques. Néanmoins, quelques principes peuvent se dégager à partir de cette étude.

i) malgré la prévision par la théorie, d'une diminution de l'erreur $\| u_{3d} - u_{2d} \|$ avec l'épaisseur, l'erreur numérique $\| (u_{3d})_h - u_{2d} \|$ observée augmente à partir d'un certain rang quand l'épaisseur diminue (Fig 6). Ceci peut s'expliquer par une augmentation de l'erreur numérique $\| u_{3d} - (u_{3d})_h \|$. En effet, si dans l'estimation d'erreur

$$\| u_{3d} - (u_{3d})_h \|_{1,2} \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{v_h \in V_h} \| u_{3d} - v_h \|_{1,2}$$

l'erreur de discrétisation $\| u_{3d} - v_h \|$ ne dépend pas de l'épaisseur, par contre la constante de coercivité C_2 de l'énergie de déformation élastique diminue avec ε, ce qui autorise une augmentation de l'erreur numérique.

ii) Du fait de cette augmentation, la solution tridimensionnelle ne peut pas être obtenue de manière classique par éléments finis quand l'épaisseur de la plaque tend vers zéro. Il est alors nécessaire d'introduire en pratique un modèle de plaque pour obtenir cette solution.

iii) Par contre, quand l'épaisseur de la plaque 2ε et le pas h de la triangulation sont du même ordre de grandeur, le problème tridimensionnel discrétisé par éléments finis hexaédriques à 20 noeuds semble être un excellent modèle numérique, cohérent à la fois avec la théorie classique de l'élasticité tridimensionnelle et avec la théorie des plaques.

Remerciements

Messieurs Ph. Ciarlet et P. Letallec sont à l'origine de ce travail. Il m'est agréable de les remercier pour l'intérêt qu'ils lui ont porté.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. BABUSKA "Error-bounds for finite element method. Numer. Math. 16 (1971) pag. 322-333"

[2] F. BREZZI "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. R.A.I.R.O. R-2 (1974) pag. 129-151

[3] P.G. CIARLET, P. DESTUYNDER "A justification of the two-dimensional linear plate model - Journal de Mécanique vol 18.2 (1979) pag. 315-344"

[4] PH. DESTUYNDER, Sur une justification des modèles de plaques et de coques par des méthodes asymptotiques Thèse d'Etat Janvier 1980

[5] Fiches Techniques "Elements Finis" Bibliothèques d'Elasticité Version 3.4 Avril 1983 CLUB MODULEF doc n° 101.

[6] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU Numerical méthods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem" (Stanford Report April 1977 INF LAB 77006).

[7] J.L. LIONS, "Perturbations singulières dans les Problèmes aux limites et en contrôle optimal" Lecture Notes in Mathematics, Vol 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973

[8] M. VIDRASCU "Sur la résolution Numérique de problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique". Thèse de 3ème cycle 1978

[9] M. VIDRASCU "Résolution du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique par une méthode d'élements finis mixtes. Version 3.4 Mars 1983 CLUB MODULEF doc n° 93.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique