# Equations de diffusion pour les rayons lumineux dans un milieu aleatoire

A. Meritet

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 307

# ÉQUATIONS DE DIFFUSION POUR LES RAYONS LUMINEUX DANS UN MILIEU ALÉATOIRE

Alain MERITET

Mai 1984

# EQUATIONS DE DIFFUSION POUR LES RAYONS LUMINEUX DANS UN MILIEU ALEATOIRE

Alain MERITET

Abstract :

We consider the trajectory of the light in a random middle. The trajectory could appear as Markovian for initial boundary values well determined and we get several Ito stochastic differential equations from which we deduce a parabolic equation highly singular. Nevertheless for particular initial boundary values the trajectory are no Markovian with solutions for small intervals.

Résumé :

On considère la trajectoire lumineuse d'un rayon dans un milieu d'indice aléatoire. La trajectoire apparait Markovienne pour des conditions initiales déterminées et nous obtenons des équations stochastiques d'Ito et en déduisons une équation de diffusion parabolique hautement singulière. Cependant pour certaines conditions initiales les trajectoires sont non Markoviennes avec des solutions pour des petits intervalles.

=======

# EQUATIONS DE DIFFUSION POUR LES RAYONS LUMINEUX DANS UN MILIEU ALEATOIRE

## INTRODUCTION

On considère la trajectoire lumineuse d'un rayon dans un milieu d'indice aléatoire. Quand les conditions initiales sont convenables la trajectoire apparaît Markovienne car le rayon ne peut retourner sur lui-même et nous obtenons des équations stochastiques d'Ito's pour la trajectoire et en déduisons une équation de diffusion. Cette équation de diffusion parabolique est hautement singulière (voir section 3 équations (13) et (14)), mais un théorème d'existence peut être obtenu pour de telles équations utilisant les conditions initiales des trajectoires (section 6). Pour certaines conditions initiales les trajectoires sont non Markoviennes parce que avec probabilité positive la trajectoire peut revenir en arrière ; néanmoins les équations stochastiques des trajectoires sont valides pour de petits intervalles (moins que les intervalles de retour) et nous proposons une équation de diffusion mais nous ne prouvons pas de théorèmes d'existence pour elle (section 4).

Des idées similaires ont été introduites en [1] pour le cas où le potentiel aléatoire à une statistique gaussienne et des équations du même type que celles de la section (4) sont déduites par un argument semblable dans [2].

Des trajectoires dépendant du temps seront considérées dans une publication à venir ; du point de vue physique c'est sûrement plus intéressant et naturel, mais aussi plus difficile à traiter rigoureusement.

## 1 - RAPPEL SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Les trajectoires des rayons lumineux dans un milieu plan x Oy d'indice $n(x,y)$ sont obtenues en écrivant que le temps mis par le rayon lumineux est extrêmal, c'est-à-dire

$$t \equiv \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \quad n(x,y)\,dx$$

est extrêmal. Nous supposerons que $n(x,y)$ ne dépend que de $y$. L'équation d'Euler Lagrange est

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'n(y)}{\sqrt{1+y'^2}}\right) + n'(y)\sqrt{1 + y'^2} = 0$$

ce qui s'écrit encore après simplification

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Nous en déduisons donc que

$$(0) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y)}{C^2} - 1$$

où $C = n(y_o) \sin i_o$.

C'est de l'équation (0) dont nous partirons pour établir une équation de Fokker Planck lorsque n est aléatoire.

## 2 - DEFINITION DE L'INDICE ALEATOIRE

a) On supposera que nous sommes dans le plan et que l'indice est uniformément borné au dessus. Notons $n(y,\omega)$ le potentiel aléatoire au point $y \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \Omega$, $\Omega$ étant l'espace de probabilité de la statistique de n et nous supposons que

$$I = \operatorname*{Inf}_{\substack{y \in \mathbb{R}^+ \\ \omega \in \Omega}} n^2(y,\omega) > 0.$$

Nous supposons en outre

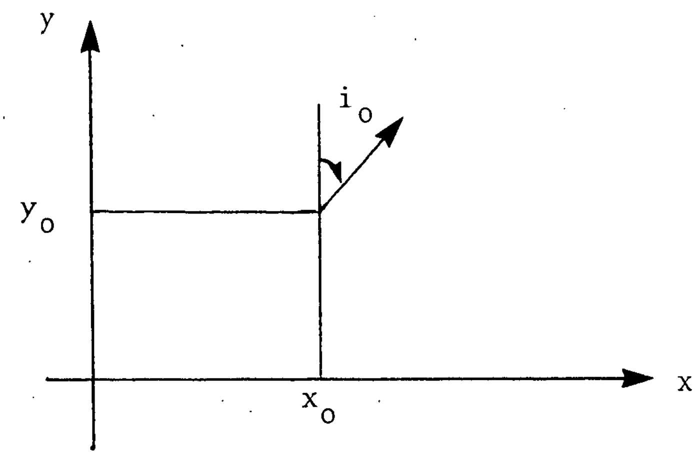
$$n(\infty,\omega) = 1.$$

b) La trajectoire d'un rayon est donné par l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y)}{\mathcal{C}^2} - 1$$

ou $\mathcal{C} = n(g_2) \sin i_o$ avec les conventions

(2)




c) On suppose que n a une forme spéciale, essentiellement donnée par une équation différentielle stochastique donnée en x.

Soit $m_y(\omega)$ un processus stochastique de Markov avec valeur dans une variété M ; nous supposerons que

(3) $$d_y m_y^i(\omega) = \sigma^{ij}(m_y(\omega))\, db^j(y) + \theta^i(m_y(\omega))\, dy$$

où $\sigma^{ij}$ est une matrice symétrique positive, $db_j(y)$ est un bruit blanc N dimensionnel, (N = dim M), $\theta^i$ est un champ de vecteur. Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ bornée positive. Posons avec $f(0) = 1$, $f(\infty) = 1$.

(4) $$n^2(y,\omega) = f(m_y(\omega)).$$

La variation en y de n est obtenue par le calcul stochastic d'Ito [3]

$$d_y n^2(y,\omega) = \frac{\partial f}{\partial y^i}(m_y(\omega))\ \sigma^{ij}(m_y(\omega))\,db^j(y) +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial y^i}(m_y(\omega))\,\theta^i(m_y(\omega)) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^i . \partial y^j}\,(\sigma^{ij}\sigma^{kj})(m_y(\omega))\right]dy.$$

Définissons comme d'habitude les invariants d'Ito de f :

$$||vf||^2(m) = (\sigma^{ij}\sigma^{jk}\ \frac{\partial f}{\partial y^i}\ \frac{\partial f}{\partial y^k})(m)$$

$$(\Delta f)(m) = \frac{1}{2}\ (\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\ \sigma^{ik}\sigma^{kj})(m) + (\frac{\partial f}{\partial y^i}\ \theta^i)(m).$$

Nous supposons que $n(y,\omega)$ est processus de Markov ; ceci est équivalent à supposer que les deux invariants d'Ito de f sont des fonctions de f(m), précisément qu'il existe deux fonctions d'une variable $\phi$ et $\Psi$ telle que :

$$(6)\qquad \begin{aligned} ||vf||(m) &= \phi(f(m)) \\ (\Delta f)(m) &= \Psi(f(m)). \end{aligned}$$

d) Ceci est sûrement une forte hypothèse mais si M a suffisamment de symétrie on peut toujours trouver de telles fonctions (non constantes) ; par exemple, supposons que M est une variété Riemannienne ayant un centre de symétrie ce qui signifie qu'il existe un tel point $0 \in M$ telle que la métrique ne dépende uniquement que de la distance à 0 ; alors il est bien connu (voir [2]) que toute fonction $\emptyset(d(0,m)) \equiv f(m)$ satisfaisant (b) et est bornée si M est compact par exemple.

e) Maintenant nous pouvons légèrement modifier (5) ; usant un changement de variable [3], nous pouvons introduire un autre mouvement unidimensionnel $\beta(y,\omega)$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(m_y(\omega))\sigma^{ij}(m_y(\omega))db^j(y) = ||\nabla f||(m_y(\omega))\ d\beta(y,\omega).$$

Dans ce cas, l'équation stochastique pour $n^2$ devient

$$(7) \qquad d_y\ n^2(y,\omega) = \phi(n^2(y,\omega))\ d_\beta(y,\omega) + \Psi(n^2(y,\omega))dy$$

où nous avons utilisé (5), le changement de variable et (6).

## 3 - EQÛATION DE LA TRAJECTOIRE DANS L'INDICE ALEATOIRE

a) L'équation de la trajectoire est donnée par l'équation (1). L'équation déduite présente un inconvénient parce que nous avons à écrire explicitement la trajectoire. L'idée étant d'écrire le tout sous une forme conservative.

$$(8) \qquad -\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{n^2(y)}{2} = 1$$

Ceci devient

$$(9) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\frac{n^2(y(x)) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}}$$

où sgn $\frac{dy}{dx}$ est le signe constant de $\frac{dy}{dx}$. Nous supposons que $n^2(y) > \sin^2 i_o$ alors l'équation devient

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(y(x)) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}} \; .$$

Mais en général $n^2(y)$ est seulement dans la classe des fonctions avec exposant de Hölder $\alpha < \frac{1}{2}$ est sûrement pas lipschitzienne en x. Aussi si nous écrivons une telle équation, nous devons prouver un théorème d'existence, mais sûrement pas un théorème d'unicité.

b) Nous allons convertir cette équation en un système d'équation stochastique différentielle pour lesquelles nous aurons existence et unicité statistique.

Partant de (9), prenons la dérivée $d_x$ de l'équation (supposons sgn $\frac{dy}{dx} > 0$) et $n^2(y(x)) = f(m(y(x)))$.

Posons alors

$$\begin{aligned} T(x) &= \operatorname{tg}\,\theta(x) \\ &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

on obtient

$$T(x) = \sqrt{\frac{n^2(y(x)) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}}$$

où $\quad n^2(y(x)) = \mathfrak{C}^2\, T^2(x) + \mathfrak{C}^2.$

Par suite en utilisant le calcul d'Ito

$$d_x\, T(x) = \frac{\frac{1}{\mathfrak{C}^2}\, d_x\, n^2(y(x))}{\left(\frac{n^2(y(x)) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right)^{1/2}} + \frac{\frac{1}{\mathfrak{C}^4}\, d_x\, n^2(y(x)) \,.\, d_x\, n^2(y(x))}{\left(\frac{n^2(y(x)) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right)^{3/2}} .$$

Ici nous avons utilisé le calcul stochastique d'Ito. Maintenant nous rappelons (7) et l'équation (1) qui nous montrent que y(x) est une fonction $\mathscr{C}^1$ de x avec dérivée positive.

En utilisant une fois de plus la théorie du changement de temps dans une intégrale stochastique, nous pouvons écrire

(11) $\quad d_x\, \beta(y(x)) = \sqrt{y(x)}\, d_x\beta_1(x)$

et compte tenu de $d_x\, \beta(y(x)) = \sqrt{T(x)}\, d_x\beta_1(x)$

$$n^2(y(x)) = \mathfrak{C}^2\, T(x) + \mathfrak{C}^2$$

nous obtenons

$$d_x\, T(x) = \frac{1}{\mathcal{C}^2\, T(x)}\, \phi(\,\mathcal{C}^2\, T^2(x) + \mathcal{C}^2)\, d\beta(x) +$$

$$(12) \qquad +\left[\frac{1}{\mathcal{C}^2}\, \Psi(\,\mathcal{C}^2\, T^2(x) + \mathcal{C}^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mathcal{C}^4\, T^2(x)}\, \phi^2(\,\mathcal{C}^2\, T^2(x) + \mathcal{C}^2)\right] dx.$$

c) Cette solution a une solution pour tout x si nous supposons

$$T(x) > \sqrt{\frac{I - \mathcal{C}^2}{\mathcal{C}^2}}\ , \quad I > \mathcal{C}^2$$

où $I = \inf n^2(y,\omega) < 1$, $y > 0$, $\omega \in \Omega$.

Ainsi le long des solutions de (12), T(x) est bornée d'en dessous, et nous avons immédiatement l'existence pour tout x d'une solution de (12) telle que pour $x = 0$

$$T(0) > \sqrt{\frac{I - \mathcal{C}^2}{\mathcal{C}^2}}\ .$$

## 4 - EQUATION DE DIFFUSION DANS L'ESPACE DES PHASES

a) On note

$$f(y,T,x) = E(F(y(x),T(x)) \mid y(0) = y,$$
$$T(0) = T,$$
$$n(y_o,\omega) = C(\sin \operatorname{Arctg} T)^{-1}).$$

Utilisant la méthode conventionnelle, il est évident que f satisfait l'équation différentielle partielle suivante, obtenue en utilisant l'équation stochastique (12)

$$f(y,T,0) = F(y,T)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\,T^2(x)}\,\phi^2(\mathcal{C}^2\,T^2(x) + \mathcal{C}^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} + \left[\frac{1}{\mathcal{C}^2}\,\Psi(\mathcal{C}^2\,T^2(x) + \mathcal{C}^2)\right.$$

$$(13) \qquad \left. + \frac{1}{\mathcal{C}^2\,T^2(x)}\,\phi^2(\mathcal{C}\,T^2(x) + \mathcal{C}^2)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} + T(x)\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

b) Notons

$$P(y,T,x \mid y_o,T_o)\,dydT = \mathrm{Prob}(y(x) \in Dy,\ T(x) \in dT \mid y(0) = y_o,$$
$$T(0) = To)$$

alors par rapport à (y,T), P satisfaisant l'équation adjointe

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{1}{\mathcal{C}^4\,T^2(x)}\,\phi^2(\mathcal{C}^2\,T^2(x) + \mathcal{C}^2)P\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial T}\left\{\left[\frac{1}{\mathcal{C}^2}\,\Psi(\mathcal{C}^2\,T^2(x) + \mathcal{C}^2) + \frac{1}{\mathcal{C}^4 T^2(x)}\,\phi^2(T^2(x) + \mathcal{C}^2)\right]P\right\}$$

$$- T(x)\,\frac{\partial P}{\partial y}$$

car nous avons suppose $-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{n^2(y)}{\mathcal{C}^2} = 1$ et $x = 0$ et que cette relation est conservée. En ce sens, la diffusion prend place sur cette courbe Lagrangienne dans l'espace des phases.

## 5 - CONDITIONS D'EXISTENCE POUR LES EQUATIONS PARABOLIQUES PRECEDENTES

Nous allons considérer le problème de Cauchy avec conditions au bord pour les équations paraboliques singulières (13) et son adjointe (14) ; parce que les coefficients de ces équations sont singuliers, il n'est pas évident que les théorèmes d'existence usuels s'appliquent à ces équations.

a) Nous noterons fo(y,T) les données initiales en $x = 0$ dans le cas de l'équation (13) et nous supposerons que fo et ses deux premières dérivées partielles sont bornées. Le théorème d'existence est prouvée en utilisant la diffusion précédente en potentiel aléatoire ; nous supposons que $\phi(V)$ et $\Psi(V)$ sont des fonctions bornées telles que l'équation (7) a une solution qui est uniformément bornée d'en dessous par $\frac{I}{C^2} - 1$ quand $n^2(y,\omega) > I$ (donnée initiale).

Nous supposons que dans l'équation (13)

(14) $C^2 < I$

et prenons To tel que

(15) $\mathcal{C}^2 + \mathcal{C}^2 \, T_o^2 > I \qquad Yo > 0.$

Nous résolvons alors l'équation stochastique (7) sous les conditions initiales

(16) $n^2(y_o,\omega) = \mathcal{C}^2 + \mathcal{C}^2 \, T_o^2$

où $y_o$ est un point de $\mathbb{R}$, cela signifie que nous allons prendre une espérance conditionnelle connaissant (16) pour résoudre l'équation stochastique (7) pour tout $y > y_o$.

b) Définissons maintenant le processus stochastique dans l'espace des phases (y(x), T(x)) par les équations (1) et (12) avec les conditions initiales

(17) $y(0) = y_o, \ T(0) = T_o$

et dans (12, $d\beta_1(t)$ ) est un bruit blanc dont la statique est reliée à la statistique de $n^2(y,\omega)$ par la construction de la section (2) ; alors cette construction et les relations (16) et (17) implique pour tout x

(18) $$1 = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{n^2(y)}{C^2}$$

Parce que les hypothèses sur $\phi$ et $\Psi$, $n^2(y,\omega) > I$ pour tout $y$ et $\omega$ et compte tenu de (26), $T(x)$ ne peut s'annuler et en fait

(19) $$T(x) > \sqrt{\frac{I - C^2}{C^2}}.$$

Ceci signifie que nous aurons de bornes uniformes pour l'équation stochastique (12) le long de ses solutions ce qui implique que nous pouvons résoudre ces équations pour tout temps t.

## 6 - CAS OU L'INDICE NE DEPEND QUE DE x

a) On supposera que nous dommes dans le plan et que l'indice est uniformément borné en dessous par une constante strictement positive ne dépendant que de x et du hasard. Notons $n(x,\omega)$ le potentiel aléatoire au point $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ , $\Omega$ désignant ici aussi l'espace de probabilité de la statistique de n et nous supposons que

$$I = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega}} n^2(x,\omega) > 0.$$

Nous supposons en outre

$$n(\infty,\omega) = 1.$$

b) Lorsque l'indice n ne dépend que de x, on vérifie que la trajectoire d'un rayon est donnée par l'équation :

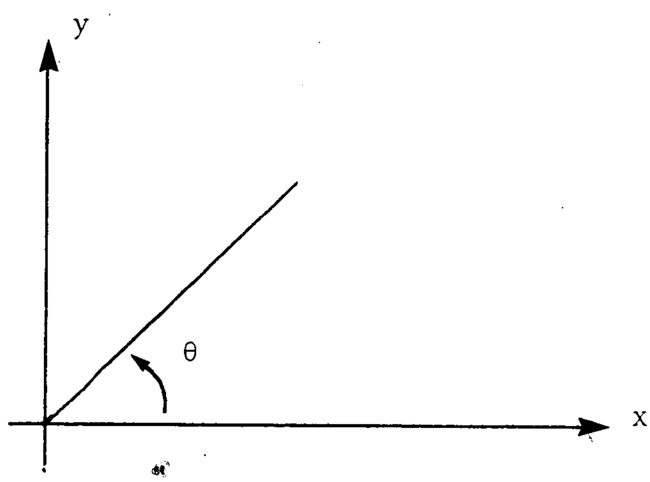
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{C^2}{\sqrt{n^2(x) - C^2}} .$$

Soit

(1) $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{n^2(x)}{C^2} - 1$ où $C = n(0) \sin\theta$

avec la convention

(2)




Cette équation a la même forme que celle considérée aux paragraphes 1 et 2 par échange de x avec y.

c) Si nous supposons n donné par des formules analogues à celles du 2 mais x au lieu de y les résultats des paragraphes 3, 4 sont donc sans changement à condition d'échanger x et y dans les formules.

## REFERENCES

[1] P. BERTRAND

CR Acad, Paris 276, 1973, pp. 1525-1527.

[2] P. BERTRAND, B. GAVEAU

Diffusion of a classical in static random potential
(à paraître).

[3] J.P. MC KEAN

Stochastic integrals
Acad Paris, 1969.

[4] P. MALLIAVIN

Géométrie différentielle stochastique
Presses Université Montréal, 1978.

A. MERITET
INRIA
B.P. 105
Rocquencourt,
78153 LE CHESNAY CEDEX
France

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique