Regime stationnaire pour une file M/H/1 avec impatience

Raymond Marie, Jean Pellaumail

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 205

RÉGIME STATIONNAIRE POUR UNE FILE M/H/1 AVEC IMPATIENCE

Raymond MARIE
Jean PELLAUMAIL

Avril 1983

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
Avenue du Général Leclerc
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Tél. : (99) 36.20.00
Télex : UNIRISA 95 0473 F

REGIME STATIONNAIRE POUR UNE FILE M/H/1 AVEC IMPATIENCE

par R. MARIE* et J. PELLAUMAIL**

Publication Interne n° 194
8 pages
Mars 1983

RESUME

On considère une file qui généralise la file M/H/1, notamment en prenant en compte les clients "impatients". Pour une telle file, on donne la solution exacte, sous forme explicite, à une constante multiplicative près K, de la probabilité $y(n)$ d'avoir n clients dans la file. De plus, on prouve que $y(n) \leqslant C\,\delta^n$ avec $\delta < 1$, δ étant défini explicitement.

ABSTRACT

Let us consider a queue which generalizes the queue M/H/1 inasmuch as it takes into account the discouraged customers. Let $y(n)$ be the steady state probability to have n customers in such a queue. The exact value of $y(n)$ is given up to a normalizing constant K. Moreover, it is shown that $y(n) \leqslant C\,\delta^n$, $\delta < 1$ where δ is computable.

* IRISA/INRIA-RENNES - Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX, FRANCE.
** INSA, 20 avenue des Buttes de Coësmes, 35043 RENNES CEDEX, FRANCE.

1. INTRODUCTION

Le but de cette étude est notamment de donner, sous forme explicite, les probabilités d'états $y(n)$, en régime stationnaire, pour une file qui généralise la file M/H/1 : la généralisation tient essentiellement au fait que l'on peut prendre en compte l'impatience des clients.

Pour cela, on établit une formule permettant de calculer, par récurrence croissante sur n, les probabilités $p(i,n)$ d'états "fictifs".

De plus, sous une hypothèse naturelle - temps de service strictement inférieur au délai entre deux interarrivées dans le cas de la file M/H/1 - on montre la convergence "géométrique" des probabilités $y(n)$ vers zéro. On note que cette convergence est établie même si l'ensemble des états "fictifs" est infini.

2. MODELE CONSIDERE

Ce modèle est supposé markovien stationnaire avec évolution en temps continu.

On suppose que l'ensemble des états est contenu dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers non négatifs; quitte à supposer que certains états ont une probabilité nulle, on peut donc prendre $E := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ comme ensemble des états.

Pour tout couple (e,e') d'éléments de E, soit $c(e,e')$ le taux de passage de l'état e à l'état e', c'est à dire que :

$$c(e,e') := \lim_{dt \downarrow 0} \frac{1}{dt} \text{ Proba } [\text{état } e' \text{ à } t+dt \mid \text{état } e \text{ à } t]$$

Soit $a(i,n)$, $d(i,n)$, $r(i,n)$ trois familles de réels positifs, indexées par E, avec, quel que soit i, $d(i,0) = 0$, quel que soit n, $\sum_{i=0}^{\infty} r(i,n) = 1$ et, quels que soient i et $n \geqslant 1$, $d(i,n) > 0$.

On suppose aussi que $a(i,n) > 0$ implique $a(i,n-1) > 0$. Par contre, on peut supposer qu'il existe s (resp. s') tel que $i \geqslant s$ (resp. $n \geqslant s'$) implique $r(i,k) = 0$, (resp. $a(j,n) = 0$).

Ces familles déterminent l'évolution du système de la façon suivante, quel que soit $n \geqslant o$:

(1) $\quad c((i,n),(i,n+1)) := a(i,n)$

(2) $\quad c((i,n+1),(j,n)) := d(i,n+1)r(j,n)$

(3) $\quad c(e,e') = 0$ dans les autres cas.

L'exemple fondamental est celui de la file M/H/1 : une seule classe de clients, un seul serveur, discipline P.A.P.S., arrivées poissonniennes de taux a, loi de service de transformée de Laplace

$$\sum_{i=o}^{\infty} r(i) \frac{d(i)}{s+d(i)} \quad \text{où} \quad \sum_{i=o}^{\infty} r(i) = 1 .$$

On peut modéliser cette loi hyperexponentielle de façon markovienne en introduisant des états "fictifs". Quand le client en cours de service est dans l'état fictif i, la durée de son service est la loi exponentielle de taux $d(i)$; quand il est servi, le client suivant passe dans l'état fictif j avec la probabilité $r(j)$. On notera que les formules établies ultérieurement sont valables si l'ensemble de ces états fictifs est infini : bien entendu, pour l'implantation sur ordinateur, cet ensemble est supposé fini.

Pour que (1) et (2) soient valables même quand $n = o$, il convient d'introduire ces états fictifs même quand la file est vide. On a alors, pour cet exemple particulier et quel que soit $n \geqslant o$:

$a(i,n) = a$, $r(j,n) = r(j)$ et $d(i,n+1) = d(i)$

Les équations qui suivent sont valables dans un cadre beaucoup plus général que celui de la file M/H/1. Tout d'abord, on peut supposer que le taux d'arrivée $a(i,n)$ dépend de la longueur n de la file : ceci permet de prendre en compte les clients "impatients" ou même un blocage complet à partir d'un certain seuil. On peut même supposer que $a(i,n)$ dépend de l'état fictif i : si on sait que le service du client en cours de service sera probablement long, cela peut augmenter le taux d'impatience.

On peut aussi supposer que le taux de départ $d(i,n)$ dépend non seulement de l'état fictif i mais aussi de la taille n de la file. De même, on peut supposer que $r(i,n)$ dépend de n : si votre garagiste est surchargé, il acceptera plus facilement de régler votre embrayage que de le changer complètement !

3. PROBABILITES STATIONNAIRES

Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'au cas stationnaire, encore que certains aspects de la méthodologie proposée resteraient utilisables dans le cas transitoire.

On pose donc, pour $n \geqslant 1$:

$p(i,n)$:= probabilité stationnaire pour qu'il y ait n clients dans la file, y compris celui en cours de service, et que ce client en cours de service soit dans l'état fictif i.

v := probabilité stationnaire pour la file d'être vide.

$p(i,o) := v\, r(i,o)$

$p(i,-1) := o$

En régime stationnaire, les équations à l'équilibre s'écrivent :

(4) $$p(i,n)\left[d(i,n) + a(i,n)\right] = p(i,n-1)a(i,n-1) + r(i,n)q(n)$$

où

$$q(n) := \sum_{j=o}^{\infty} p(j,n+1)d(j,n+1)$$

On a aussi la relation suivante (cf.) :

(5) $$q(n) = \sum_{j=o}^{\infty} p(j,n)a(j,n)$$

Ces équations (4) et (5) sont valables pour n=o avec les conventions introduites précédemment.

4. CALCUL DE q(n)

Si on sait calculer q(n), l'équation (4) permet d'obtenir p(i,n) par récurrence croissante sur n (avec i fixé). De plus, pour un grand nombre d'applications, la connaissance de la suite $(q(n))_{n \geqslant o}$ suffit (cf. remarque c) in fine).

Posons :

(6) $$f(n,k) := \sum_{i=o}^{\infty} \frac{a(i,n)r(i,n-k)}{d(i,n-k)+a(i,n-k)} \prod_{j=o}^{k-1} \frac{a(i,n-j-1)}{d(i,n-j)+a(i,n-j)}$$

le produit Π étant pris égal à 1 pour k=o suivant la convention habituelle.

On vérifie facilement, par récurrence sur k, que :

$$q(n) = \sum_{i=o}^{\infty} a(i,n)p(i,n-k-1) \prod_{j=o}^{k} \frac{a(i,n-j-1)}{d(i,n-j)+a(i,n-j)} + \sum_{j=o}^{k} f(n,j)q(n-j)$$

Soit, pour k=n (compte tenu des conventions) :

$$(7) \qquad q(n) = \sum_{k=o}^{n} f(n,k)q(n-k)$$

d'où

$$(8) \qquad q(n) = \{ \sum_{k=1}^{n} f(n,k)q(n-k)\}/[1-f(n,o)]$$

Remarques :

On peut donc calculer q(n) en fonction de la constante v, par récurrence croissante sur n, à partir des égalités (6) et (8) :

a) on note, quand l'ensemble des états fictifs est "relativement petit", que ces calculs nécessitent peu d'opérations et une faible taille mémoire.

b) Les formules ci-dessus vont nous permettre d'évaluer explicitement la vitesse de convergence de q(n) vers zéro sous des hypothèses très générales (cf. section 5).

c) Posons y(n) := probabilité pour qu'il y ait n clients dans la station ; si a(j,n) = a(n) ne dépend que de n, y(n) s'obtient directement à partir de a(n) :

$$(9) \qquad y(n) = q(n)/a(n)u$$

$$\text{avec} \quad u := \sum_{k=o}^{\infty} q(k)/a(k)$$

5. MAJORATION DE q(n)

Théorème

On suppose qu'il existe une famille de réels positifs $(\lambda_i)_{o\leqslant i}$ *tels que, quels que soient* i *et* n, *on ait :*

$a(i,n)/[d(i,n) + a(i,n)] \leqslant \lambda_i$ et

$a(i,n-1)/[d(i,n) + a(i,n)] \leqslant \lambda_i$

On suppose aussi que $r(i,n) = r_i$ ne dépend pas de n et que

$$(10) \qquad \sum_i r_i \lambda_i/[1-\lambda_i] < 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Sup}_i \lambda_i < 1 \quad .$$

Soit ν la borne supérieure des réels $x \geqslant 1$ tels que $g(x) \leqslant 1$

où $g(x) := \sum_i r_i \lambda_i/[1-x\lambda_i]$.

La fonction g est continue (convergence normale pour une série de fonctions continues) au voisinage de 1 et $g(1) < 1$. On a donc $\nu > 1$. On a alors, quel que soit $n \geqslant o$:

$$q(n) \leqslant q(o).\nu^{-n}$$

Ceci implique évidemment :

$$\sum_{k\geqslant n} q(k) \leqslant q(o)\, \nu^{1-n}/(\nu-1)$$

<u>Preuve</u> :

Raisonnons par récurrence croissante sur n et supposons que, pour $j < n$, on a $q(j) \leqslant K\, \nu^{-j}$.

L'égalité (6) implique :

$$f(n,k) \leqslant \sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i^{k+1}$$

L'égalité (8) implique alors :

$$q(n) \leqslant [K/[1-f(n,o)] \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i(\lambda_i \nu)^k \nu^{-n}$$

$$\leqslant \{K\, \nu^{-n} /[1-f(n,o)]\} \sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i^2 \nu/[1-\lambda_i \nu]$$

Pour achever le raisonnement par récurrence, il suffit donc de prouver que

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i^2 \nu/[1-\lambda_i \nu] \leqslant 1-f(n,o)$$

ou encore :

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i \left[\{\lambda_i \nu/[1-\lambda_i \nu]\}+1\right] \leqslant 1$$

Soit

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i/[1-\lambda_i \nu] \leqslant 1$$

ce qui est exactement l'hypothèse sur ν.

Enfin, pour n=o, on a $K = q(o)$, ce qui achève la preuve du théorème.

6. REMARQUE

La majoration précédente montre que les inégalités (10) constituent une condition suffisante d'ergodicité pour la file considérée. Dans le cas particulier $a(i,n) = a$ et $d(i,n) = d_i$, les inégalités (10) deviennent

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i/d_i < (1/a) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Sup}_i \lambda_i < 1 \quad .$$

c'est à dire qu'on suppose que le temps moyen de service est strictement inférieur au temps moyen entre deux arrivées (condition naturelle).

7. CONCLUSION

Les équations (6) et (8) donnent explicitement $q(n)$; on en déduit immédiatement les probabilités d'états "fictifs", par récurrence croissante sur n, à une constante multiplicative près (équations (4)). On a aussi (9) quand $a(j,n) = a(n)$ ne dépend que de n.

Quand l'ensemble des états fictifs est fini, on note que tous les calculs sont explicites, n'utilisent ni inversion ni produit de matrices, et, de ce fait, requièrent un espace mémoire relativement faible. Plus précisément, si I désigne le nombre d'états fictifs, le calcul de y_n , $n=0,\ldots,N$, est obtenu à l'aide d'un algorithme dont la complexité est d'ordre $O(I^2.N^2)$ dans le cas général.

De plus, sous les hypothèses de la section 5, la convergence géométrique de la suite $(q(n))_{n>o}$, avec un rayon de convergence $\delta := (1/\nu)$ calculable, permet de savoir "a priori" à quelle valeur N de n on peut "s'arrêter" pour le calcul de la constante de normalisation.

- REFERENCES -

[1] BREMAUD P., "Point Processes and Queues : Martingale Dynamics", Springer-Verlag, (1981).

[2] COHEN J.W., "The Single Server Queue", North-Holland, 2nd éd., (1982).

[3] GELENBE E., PUJOLLE G., "Introduction aux Réseaux de Files d'attente", Eyrolles, (1982).

[4] MARIE R.A., "Modélisation par Réseaux de Files d'attente", Thèse d'état, Univ. Rennes, Rennes, France, (Nov. 1978).

[5] MARIE R.A., PELLAUMAIL J.M., "Steady-State Probabilities for a Queue with a General Service Distribution and State-Dependent Arrivals", IEEE-TSE, vol. SE-9, n° 1, (Jan. 1983), pp. 109-113.

[6] NEUTS M.F., "Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models", The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland 21218, (1981), (QA 274.7.N48).

[7] SENGUPTA B., "The Spatial Requirement of an M/G/1 Queue, or : How to Design for Buffer Space", International Seminar on Modelling and Performance Evaluation Methodology, Paris, (Jan. 1983).

Liste des Publications Internes IRISA

PI 150 **Construction automatique et évaluation d'un graphe d'«implication» issu de données binaires, dans le cadre de la didactique des mathématiques**
H. Rostam , 112 pages ; Juin 1981

PI 151 **Réalisation d'un outil d'évaluation de mécanismes de détection de pannes]-]Projet Pilote SURF**
B. Decouty, G. Michel, C. Wagner, Y. Crouzet , 59 pages ; Juillet 1981

PI 152 **Règle maximale**
J. Pellaumail , 18 pages ; Septembre 1981

épuisée PI 153 **Corrélation partielle dans le cas « qualitatif »**
I.C. Lerman , 125 pages ; Octobre 1981

PI 154 **Stability analysis of adaptively controlled not-necessarily minimum phase systems with disturbances**
Cl. Samson , 40 pages ; Octobre 1981

épuisée PI 155 **Analyses d'opinions d'instituteurs à l'égard de l'appropriation des nombres naturels par les élèves de cycle préparatoire**
R. Gras , 37 pages ; Octobre 1981

PI 156 **Récursion induction principle revisited**
G. Boudol, L. Kott , 49 pages ; Décembre 1981

PI 157 **Loi d'une variable aléatoire à valeur R^+ réalisant le minimum des moments d'ordre supérieur à deux lorsque les deux premiers sont fixés**
M.Kowalowka, R. Marie , 8 pages ; Décembre 1981

épuisée PI 158 **Réalisations stochastiques de signaux non stationnaires, et identification sur un seul échantillon**
A. Benveniste J.J. Fuchs , 33 pages ; Mars 1982

PI 159 **Méthode d'interprétation d'une classification hiérarchique d'attributs-modalites pour l'«explication» d'une variable ; application à la recherche de seuil critique de la tension artérielle systolique et des indicateurs de risque cardiovasculaire**
B. Tallur , 34 pages ; Janvier 1982

PI 160 **Probabilite stationnaire d'un réseau de files d'attente multiclasse à serveur central et à routages dépendant de l'état**
L.M. Le Ny , 18 pages ; Janvier 1982

épuisée PI 161 **Détection séqentielle de changements brusques des caractéristiques spectrales d'un signal numérique**
M. Basseville, A. Benveniste , pages ; Mars 1982

PI 162 **Actes regroupés des journées de Classification de Toulouse (Mai 1980), et de Nancy (Juin 1981)**
I.C. Lerman , 304 pages ;

PI 163 **Modélisation et Identification des caractéristiques d'une structure vibratoire : un problème de réalisation stochastique d'un grand système non stationnaire**
M. Prévosto, A. Benveniste, B. Barnouin , 46 pages ; Mars 182

PI 164 **An enlarged definition and complete axiomatization of observational congruence of finite processes**
Ph. Darondeau , 45 pages ; Avril 1982

PI 165 **Accès vidéotex à une banque de données médicales**
A. Chauffaut, M. Dragone, R. Rivoire, J.M. Roger , 25 pages ; Mai 1982

épuisée PI 166 **Comparaison de groupes de variables définies sur le même ensemble d'individus**
B. Escofier, J. Pages , 115 pages ; Mai 1982

PI 167 **Transport en circuits virtuels internes sur réseau local et connexion Transpac**
M. Tournois, R. Trépos , 90 pages ; Mai 1982

PI 168 **Impact de l'intégration sur le traitement automatique de la parole**
P. Quinton , 14 pages ; Mai 1982

PI 169 **A systolic algorithm for connected word recognition**
J.P. Banâtre, P. Frison, P. Quinton , 13 pages ; Mai 1982

PI 170 **A network for the detection of words in continuous speech**
J.P. Banâtre, P. Frison, P. Quinton , 24 pages ; Mai 1982

PI 171 **Le langage ADA : Etude bibliographique**
J. André, Y. Jégou, M. Raynal , 12 pages ; Juin 1982

épuisée PI 172 **Comparaison de groupes de variables : 2ème partie : un exemple d'application**
B. Escofier, J. Pajès , 37 pages ; Juillet 1982

PI 173 **Unfold-fold program transformations**
L. Kott , 29pages ; Juillet 1982

PI 174 **Remarques sur les langages de parenthèses**
J.M. Autebert, J. Beauquier, L. Boasson, G. Senizergues , 20 pages ; Juillet 1982

PI 175 **Langages de parenthèses, langages N.T.S. et homomorphismes inverses**
J.M. Autebert, L. Boasson, G. Senizergues , 26 pages ; Juillet 1982

PI 176 **Tris pour machines synchrones ou Baudet Stevenson revisited**
R. Rannou , 26 pages ; Juillet 1982

PI 177 **Un nouvel algorithme de classification hiérarchique des éléments constitutifs de tableau de contingence basé sur la corrélation**
B. Tallur , Juillet 1982 ;

PI 178 **Programmes d'analyse des re'sultats d'une classification automatique**
I.C. Lerman et collaborateurs , 79 pages ; Septembre 1982

PI 179 **Attitude à l'égard des mathématiques des élèves de sixième**
J.Degouys, R. Gras, M. Postic , 29 pages ; Septembre 1982

épuisée PI 180 **Traitements de textes et manipulations de documents : bibliographie analytique**
J. André , 20 pages ; Septembre 1982

PI 181 **Algorithme assurant l'insertion dynamique d'un processeur autour d'un réseau à diffusion et garantissant la cohérence d'un système de numérotation des paquets global et réparti**
Annick Le Coz, Hervé Le Goff, Michel Ollivier , 31 pages ; Octobre 1982

PI 182 **Interprétation non linéaire d'un coefficient d'association entre modalités d'une juxtaposition de tables de contingence**
Israël César Lerman , 34 pages ; Novembre 1982

PI 183 **L'IRISA vu à travers les stages effectués par ses étudiants de DEA (1è année de thèse)**
Daniel Herman , 41 pages ; Novembre 1982

PI 184 **Commande non linéaire robuste des robots manipulateurs**
Claude Samson , 52 pages ; Janvier 1983

PI 185 **Dialogue et représentation des informations dans un système de messagerie intelligent**
Philippe Besnard, René Quiniou, Patrice Quinton, Patrick Saint-Dizier, Jacques Siroux, Laurent Trilling , 45 pages ; Janvier 1983

PI 186 **Analyse classificatoire d'une correspondance multiple ; typologie et régression**
I.C. Lerman , 54 pages ; Janvier 1983

PI 187 **Estimation de mouvement dans une sequence d'images de télévision en vue d'un codage avec compensation de mouvement**
Claude Labit , 132 pages ; Janvier 1983

PI 188 **Conception et réalisation d'un logiciel de saisie et restitution de cartes élémentaires**
Eric Sécher , 45 pages ; Janvier 1983

PI 189 → sur le point de paraître

PI 190 **Généralisation de l'analyse des correspondances à la comparaison de tableaux de fréquence**
Brigitte Escofier , 35 pages ; Mars 1983

PI 191 **Association entre variables qualitatives ordinales «nettes» ou «floues»**
Israël-César Lerman , 42 pages ; Mars 1983

PI 192
PI 193 } sur le point de paraître

PI 194 **Régime stationnaire pour une file M/H/1 avec impatience**
Raymond Marie et Jean Pellaumail , 8 pages ; Mars 1983

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique