Un probleme raide intervenant en mecanique des melanges

G. Nguet Seng

INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:954 90 20

Rapports de Recherche

N° 186

UN PROBLÈME RAIDE INTERVENANT EN MÉCANIQUE DES MÉLANGES

Gabriel NGUETSENG

Février 1983

UN PROBLEME RAIDE INTERVENANT EN MECANIQUE DES MELANGES

Gabriel NGUETSENG

Résumé : Nous étudions le comportement asymptotique de la solution d'un problème aux limites du type raide : les coefficients dépendent d'un paramètre $\eta \downarrow 0$, et les propriétés de coercivité disparaissent pour $\eta = 0$. Les conditions aux limites sont de périodicité par rapport aux variables d'espace. Les résultats sont appliqués à l'étude des vibrations de mélanges de solides élastiques et de fluide faiblement visqueux par la méthode d'homogénéisation.

Abstract : We study the aysmptotic behaviour of a boundary value problem of stiff type : the coefficients depend on a parameter $\eta \downarrow 0$ and the coerciveness properties vanish for $\eta = 0$. The boundary conditions amount to the periodicity in the space variables. The results are applied to the vibrations of mixtures of elastic solids and slightly viscous fluids by the homogenization method.

1.- INTRODUCTION

Dans ce travail et dans l'article accompagnant de l'auteur et E. SANCHEZ-PALENCIA, nous étudions, dans le cadre de la méthode d'homogénéisation [1] [10], des problèmes de perturbation liés aux vibrations de mélange de solides et de fluides lorsqu'un petit paramètre $\eta \downarrow 0$ (associé à la viscosité du fluide apparait en même temps que le petit paramètre ε (associé à la structure géométrique périodique du mélange).

L'étude de la compatibilité des deux processus de passage à la limite est effectuée dans l'article signalé précédemment.

Nous nous limitons ici à l'étude du comportement, pour $\eta \to 0$, des coefficients obtenus par homogénéisation ($\varepsilon \to 0$). Le problème relatif au paramètre η apparait comme un problème raide [4] (non coercif pour $\eta = 0$) pour un système elliptique avec des conditions aux limites de type périodique. La solution est exprimée à l'aide d'une série de puissances de η analogue à celle utilisée dans [2].

L'étude du problème raide passe par celle d'un système de Stokes dont la résolution, connue pour des conditions aux limites du type Dirichlet, est généralisée dans [7] au cas des conditions aux limites périodiques. Nous en rappelons les résultats dans la section 2.

Une partie des résultats de cet article avait été annoncée dans [6].

Le plan de cet article est le suivant :

1. - Introduction
2. - Notations et propriétés préliminaires
3. - Le problème raide
4. - Calcul des w^k
5. - Déduction des formules donnant les w^k
6. - Application à un problème d'homogénéisation de mélanges de fluide et solide.

2. - NOTATIONS ET PROPRIETES PRELIMINAIRES

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de la variable $y = (y_i)$, $i = 1, 2, 3$ on considère le parallélépipède

$$Y =]0,a_1[x]0,a_2[x]0,a_3[\quad .$$

Nous le regarderons comme une période de $\mathbb{R}^3$, les fonctions périodiques définies sur tout ou partie de $\mathbb{R}^3$ étant des fonctions invariantes par translation d'un nombre entier de périodes. La période Y se décompose comme réunion de deux ouverts Y_s, Y_f et de leur frontière commune Γ, celle-ci étant régulière (même après prolongement par Y- périodicité). Dans les applications physiques, Y_s et Y_f seront respectivement remplis de solide et de fluide. Ces ouverts seront considérés dans les deux situations des figures 1 et 2.

Dans le cas de la figure 1, Y_f est un ouvert connexe de frontière strictement contenue dans Y (le fluide occupe des "gouttes" incluses périodiquement dans le solide). Dans le cas de la figure 2, Y_f est formé de trois tubes cylindriques parallèles aux axes, d'intersection non vide (on admet par ailleurs que les arrêtes de l'intersection sont "arrondies", afin que Γ soit régulière) si bien que la partie fluide constitue en quelque sorte un "réseau de tubes". Il est clair que, après prolongement par Y-périodicité, l'ouvert périodique associé à Y_s (il s'agit de l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ engendré par Y-périodicité par $\bar{Y}_s - \Gamma$, où $\bar{Y}_s$ désigne l'adhérence dans $\mathbb{R}^3$ de Y_s) est connexe, tandis que celui associé à Y_f n'est connexe que dans le cas de figure 2.

Pour tout ouvert $\mathcal{O}$, $\bar{\mathcal{O}}$ désigne l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}^3$. Nous noterons

$$(2.1) \qquad \bar{Y}_f^o = \bar{Y}_f - \Gamma \ .$$

En d'autres termes, l'ensemble $\bar{Y}_f^o$ désigne l'union de l'ouvert Y_f et de la partie de sa frontière qui est contenue dans le bord de Y (dans le cas de la figure 1, $\bar{Y}_f^o = Y_f$).

$\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est l'ensemble des fonctions définies et de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur $\bar{Y}$, prenant, ainsi que les dérivées de tous ordres, des valeurs égales sur les faces opposées de Y.

$\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}_f^o)$ désigne son sous-ensemble constitué par les fonctions à support (compact) dans $\bar{Y}_f^o$.

Muni d'une topologie appropriée [7], chacun des ensembles précédents est un espace vectoriel topologique localement convexe. $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est un espace de Fréchet, et $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}_f^o)$ est un espace LF. (i.e. limite inductive stricte d'espaces de Fréchet).

On désigne par $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y}_f^o)$) le dual de $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}_f^o)$), qui s'identifie [7] à l'espace des distributions Y-périodiques définies dans $\mathbb{R}^3$ tout entier (resp. sur l'ouvert engendré par périodicité par $\bar{Y}_f^o$ dans la situation de la figure 2).

On posera

$$\underline{\mathcal{D}}_{per}(\bar{Y}_f^o) = (\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}_f^o))^3.$$

De façon générale, la puissance troisième d'un espace sera désignée par le même symbole en caractères gras.

$H^1_{per}(Y)$ désigne le sous-espace de $H^1(Y)$ formé par les fonctions Y-périodiques (i.e. dont les traces sont égales sur les faces opposées de Y). On note $H^{-1}_{per}(Y)$ son dual (ou antidual).

$H^1_{per}(Y_s)$ et $H^1_{per}(Y_f)$ sont respectivement l'ensemble des restrictions à Y_s et Y_f des fonctions de $H^1_{per}(Y)$. Ils s'identifient [7] respectivement au sous-espace de $H^1(Y_s)$ et de $H^1(Y_f)$ constitué par les fonctions Y-périodiques ($H^1_{per}(Y_f)$ étant identique à $H^1(Y_f)$ dans le cas de la figure 1).

$H^{1/2}_{per}(\Gamma)$ désigne l'espace de traces associé à $H^1_{per}(Y_s)$. Il coincide [7] avec celui correspondant à $H^1_{per}(Y_f)$ (qui n'est autre chose que $H^{1/2}(\Gamma)$ [5] dans le cas de la figure 1). L'application trace $u \to u/\Gamma$ est continue et possède un relèvement continu.

$H^1_{oper}(Y_f)$ désigne le sous-espace de $H^1_{per}(Y_f)$ constitué des fonctions de trace nulle sur Γ. Il est identique [7] à l'adhérence de $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}^o_f)$ dans $H^1_{per}(Y_f)$.

Soit V_o l'espace

$$V_o = \{u \in \underline{H}^1_{oper}(Y_f) \; ; \; \mathrm{div}\,\underline{u} = 0\} \; .$$

On vérifie [7] que l'ensemble $\mathcal{V}_o$ des fonctions de $\underline{\mathcal{D}}_{per}(\bar{Y}^o_f)$ de divergence nulle est dense dans V_o.

De façon générale, f étant une forme antilinéaire, on notera (f,ψ) la valeur de f au point ψ.

Les lemmes suivants, connus dans le cadre non périodique (cf. par exemple [10]) ont été généralisés [7] au cadre du présent article, où $L^2(Y_f)/\mathbb{C}$ désigne l'espace quotient de $L^2(Y_f)$ et des fonctions constantes. On fait souvent l'identification

$$(2.2) \qquad L^2(Y_f)/\mathbb{C} = \{p \; ; \; p \in L^2(Y_f) \; , \; \int_{Y_f} p \, dy = 0\} \; .$$

<u>Lemme 2.1</u> : Soit $p \in H^{-1}_{per}(Y_f)$, vérifiant

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} \in H^{-1}_{per}(Y_f).$$

Alors, $p \in L^2(Y_f)$ et il existe une constante C (dépendant seulement de Y_f) telle que

$$\|p\|_{L^2(Y_f)/\mathbb{C}} \leq C \|\mathrm{grad}\,p\|_{\underline{H}^{-1}_{per}(Y_f)} \; .$$

<u>Lemme 2.2</u> : Soit f $\underline{H}^{-1}_{per}(Y_f)$. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$(2.3) \qquad (f,\psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_o \; .$$

(2.4) il existe $p \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$, unique, telle que

$$f = \text{grad } p.$$

<u>Lemme 2.3</u> : Si $g \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$ (au sens de (2.2)), on peut trouver $u \in H^1_{oper}(Y_f)$ telle que

$$\text{div} u = g \ , \quad \|u\|_{\underline{H}^1(Y_f)} \leq C\|g\|_{L^2(Y_f)}$$

où C est une constante ne dépendant que de Y_f.

Dans tout ce travail, $e_{ij}(u)$ désignera le tenseur (des déformations ou des taux de déformation dans les applications physiques) de composantes

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) \quad \text{pour } u = (u_i) \ .$$

Nous noterons de manière générale, $\mathcal{O}$ étant un ouvert :

$$\|u\|^2_{\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{O}} |u|^2 dy + \int_{\mathcal{O}} e_{ij}(u)\ e_{ij}(\bar{u})\,dy \tag{2.5}$$

$$\|u\|^2_{o\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{O}} e_{ij}(u)\ e_{ij}(\bar{u})\,dy \tag{2.6}$$

où l'on fait la sommation des indices répétés. On munira $\underline{H}^1_{per}(\mathcal{O})$, pour $\mathcal{O} = Y, Y_s, Y_f$, de la norme (2.5) qui est équivalente, d'après l'inégalité de Korn (cf. par exemple [9]) à sa norme naturelle. De même on munira $\underline{H}^1_{oper}(Y_f)$ de la norme équivalente (2.6).

Les résultats suivants nous permettront de résoudre les problèmes du type Stokes (associés à l'opérateur $\{\partial e_{ij}/\partial y_j\}$, analogue du laplacien) homogène et non homogène qui interviennent dans cette étude. La démonstration, dans le cas périodique, suit les lignes du cas non périodique (cf. par exemple [10]). La quantité ν est un nombre réel non nul.

<u>Lemme 2.4</u> : Soit $f \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y_f)$, $f = (f_i)$. Alors il existe $u \in \underline{H}^{1}_{oper}(Y_f)$ $p \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$, solution de

$$(2.7)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial e_{ij}}{\partial y_j}(u) + \nu \dfrac{\partial p}{\partial y_i} = f_i \text{ dans } Y_f \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } Y_f \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma . \end{cases}$$

Les fonctions u,p sont uniques et il existe $C > o$ tel que

$$(2.8)\qquad \|u\|_{oY_f} + \|p\|_{L^2(Y_f)/\mathbb{C}} \leq C \, \|f\|_{\underline{H}^{-1}_{per}(Y_f)} .$$

<u>Lemme 2.5</u> : Soit $f \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y_f)$, et $g \in L^2(Y_f)$, $\chi \in \underline{H}^{1/2}_{per}(\Gamma)$ satisfaisant à

$$(2.9)\qquad \int_{Y_f} g\,dy - \int_{\Gamma} \chi . n\,ds = 0$$

(n étant la normale unitaire extérieure à Y_f). Alors, il existe $u \in \underline{H}^{1}_{per}(Y_f)$, $p \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$, solution de

$$(2.10)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial e_{ij}(u)}{\partial y_j} + \nu \dfrac{\partial p}{\partial y_i} = f_i \quad \text{dans } Y_f \\ \operatorname{div} u = g \quad \text{dans } Y_f \\ u = \chi \quad \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Les fonctions u et p sont uniques, et il existe une constante $C > o$ telle que

$$(2.11)\qquad \|u\|_{Y_f} + \|p\|_{L^2(Y_f)/\mathbb{C}} \leq C(\|f\|_{\underline{H}^{-1}_{per}(Y_f)} + \|g\|_{L^2(Y_f)} + \|\chi\|_{\underline{H}^{1/2}_{per}(\Gamma)}) .$$

Dans certains problèmes qui seront étudiés par la suite, la solution appartiendra à l'espace $\underset{=}{H}^1_{per}(Y_s)$, et sera unique à une constante additive près. Elle sera unique si l'on lui impose d'être dans l'espace

$$(2.12) \qquad \tilde{\underset{=}{H}}^1_{per}(Y_s) = \{u \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y_s) \quad ; \quad \int_{Y_s} u dy = 0\}$$

qu'on munira de la norme $\|.\|_{oY_s}$ équivalente, sur cet espace, à la norme de $\underset{=}{H}^1_{per}(Y_s)$.

Si u est une fonction définie sur Y, on note respectivement u_s et u_f sa restriction à Y_s et à Y_f. Il est clair que si u_s et u_f sont donnés,

$$u = \{u_s, u_f\} \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y) \text{ équivaut à}$$

$$u_s \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y_s), \; u_f \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y_f), \quad u_s|_\Gamma = u_f|_\Gamma \; .$$

Enfin, C dénotera diverses constantes indépendantes des élements d'une suite.

3. - LE PROBLEME RAIDE

On considère, sur $\underset{=}{H}^1_{per}(Y_s)$ une forme hermitienne $a_s(u,v)$ et sur $\underset{=}{H}^1_{per}(Y)$ une forme antilinéaire ℓ^o, i.e. $\ell^o \in \underset{=}{H}^{-1}_{per}(Y)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(3.1) \qquad |a_s(u,v)| \leq \beta \|u\|_{oY_s} \|v\|_{oY_s} \;, \; \beta \;; \quad \forall u,v \in H^1_{per}(Y_s)$$

$$(3.2) \qquad a_s(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{oY_s} \;, \; \alpha > 0 \;; \quad \forall v \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y_s)$$

$$(3.3) \qquad a_s(u,v) = 0 \text{ si } u = \text{Cte.} \;, \; \forall v \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y_s)$$

$$(3.4) \qquad (\ell^o, v) = 0 \quad \forall v \in \underset{=}{H}^1_{per}(Y) \;, \; v|_{Y_s} = \text{Cte.}$$

Remarque 3.1 :

- Les conditions (3.1) et (3.2) impliquent que a_s est une forme continue et coercive sur l'espace $\tilde{H}^1_{per}(Y_s)$ (défini au point (2.12)). Toutefois il sera avantageux de travailler dans $H^1_{per}(Y_s)$.

- La condition (3.4) permet de définir $\ell^o_s \in (\underline{H}^1_{per}(Y_s))'$ (l'antidual de $\underline{H}^1_{per}(Y_s)$) tel que

$$(3.5) \qquad (\ell^o_s, v) = (\ell^o, \pi v) \qquad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y_s)$$

où πv est une fonction de $\underline{H}^1_{per}(Y)$ coïncidant avec v sur Y_s, et $\|\pi v\|_Y \leq C\|v\|_{Y_s}$. □

On pose

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} a(u,v) &= a_s(u,v) + \gamma \int_{Y_f} \operatorname{div} u \operatorname{div} \bar{v}\, dy \\ b(u,v) &= 2\mu \int_{Y_f} e_{ij}(u)\, e_{ij}(\bar{v}) dy + \lambda \int_{Y_f} \operatorname{div} u \operatorname{div} \bar{v}\, dy \end{aligned}$$

où

$$(3.7) \qquad \gamma > 0 \ , \ \mu > 0 \ , \ \frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3} C_o \quad (o < C_o < 1) \ ,$$

et l'on considère, pour $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\omega > \omega_o > 0$ (variable qui sera associée, dans les applications, à la transformation de Laplace) et pour $\eta > 0$ (paramètre destiné à tendre vers zéro) le problème raide suivant, qui consiste à trouver w^η tel que

$$(3.8) \qquad \begin{aligned} & w^\eta \in \underline{H}^1_{per}(Y) \\ & a(w^\eta, v) + \omega\eta\, b(w^\eta, v) = (\ell^o, v) \qquad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y) \\ & \int_Y w^\eta dy = 0 \ . \end{aligned}$$

Lemme 3.1 : Sous les hypothèses précédentes, le problème raide (3.8) pour $\eta > 0$ possède une solution et une seule (dépendant évidemment de ω).

Ce résultat est démontré dans [8] ou [9]. Il découle immédiatement du Lemme de Lax-Milgram. L'existence et l'unicité sont obtenues dans l'espace quotient $\underline{H}^1_{per}(Y)/\mathbb{C}^3$ (cf. (3.6)(3.7) et la Remarque 3.1).

Remarque 3.2 :

Dans la suite nous étudions le comportement de w^η lorsque $\eta \to 0$. La forme au premier membre de (3.8) n'étant plus coercive pour $\eta = 0$, nous avons affaire à un problème de perturbation raide [4]. Ici, la condition (3.4) entraîne l'annulation du terme en $1/\eta$ qui figure dans le développement classique de la solution en puissances de η. $\square$

Comme dans [2], nous chercherons la solution de (3.8) (pour η petit) sous forme d'une série entière

$$(3.9) \qquad w^\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k w^k \quad ; \; w^k \in \underline{H}^1_{per}(Y) \; , \; \int_Y w^k dy = 0$$

convergente dans $\underline{H}^1_{per}(Y)$ fort.

Proposition 3.1 : Sous les hypothèses précédentes, il existe une suite w^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ bien définie par les formules

$$(3.10) \qquad w^k \in \underline{H}^1_{per}(Y) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(3.11) \qquad a(w^o, v) = (\ell^o, v) \quad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y)$$

$$(3.12) \qquad a(w^k, v) + \omega b(w^{k-1}, v) = 0 \quad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$(3.13) \qquad \int_Y w^k dy = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

et on a

(3.14) $$\|w^k\|_{o_Y} \leq C^{k+1} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

où C est une constante indépendante de η,

de sorte que la solution de (3.8) est donnée par (3.9) pour $\eta < 1/C$.

Remarque 3.3 :

Les seuls points à démontrer sont l'existence et l'unicité des w^k, ainsi que les majorations (3.14). La démarche sera la suivante :

Dans la section 4 qui suit, nous introduisons une suite de problèmes auxiliaires et nous établissons qu'elle définit une suite unique (qui, nous le verrons plus loin, n'est autre que celle de la Proposition 3.1) $w^k \in \underline{H}^1_{per}(Y)$, satisfaisant en outre à (3.14).

Dans la section 5 nous démontrons que la suite de problèmes de la section 4 est équivalente aux formules (3.10)-(3.13), d'où il résulte la Proposition 3.1.

□

4. - CALCUL DES w^k

Cette section est consacrée à l'obtention des w^k et à la démonstration des estimations (3.14). Ainsi que nous l'avons indiqué dans la Remarque 3.3, les formules qui suivent seront justifiées dans la section suivante.

Définissons le premier terme w^o par ses restrictions w^o_s, w^o_f à Y_s et Y_f respectivement (cf. la fin de la sect. 3 pour les notations) :

(4.1) $$\begin{cases} w^o_s \in \underline{H}^1_{per}(Y_s) \\ a_s(w^o_s,v) + \dfrac{\gamma}{|Y_f|}\left(\displaystyle\int_{Y_s} \operatorname{div} w^o_s dy\right)\left(\displaystyle\int_{Y_s} \operatorname{div} \bar{v} dy\right) = (\ell^o_s,v) \quad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y_s) \end{cases}$$

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} & -\frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j}(w_f^o) + \nu \frac{\partial p^o}{\partial y_i} = 0 \text{ dans } Y_f \\ & \operatorname{div} w_f^o = g^o \text{ dans } Y_f \\ & w_f^o = \chi^o \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

où

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} & g^o = -\frac{1}{|Y_f|}\int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^o \, dy \\ & \chi^o = w_s^o|_\Gamma \\ & \nu = -\frac{\lambda}{2\mu}\,. \end{aligned}$$

<u>Remarque 4.1.</u> :

La forme ℓ_s^o au second membre de (4.1) est définie, au point (3.5), à partir de ℓ^o. Il est clair que (4.1) définit w_s^o de façon unique, à une constante additive près. Puis, w_f^o est déterminé, en même temps que la fonction auxiliaire p^o, par (4.2) ; la constante additive de w_s^o se répercute sur w_f^o par la troisième relation de (4.2) (i.e. la condition aux limites). Enfin, en remarquant que la condition de compatibilité (2.9), qui prend ici la forme

$$-\int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^o \, dy - \int_\Gamma (w_s^o|_\Gamma).n \, ds = 0 \text{ (n est la normale extérieure à } Y_f),$$

est satisfaite (on l'obtient par la formule de Green, en tenant compte de la périodicité de w_s^o), le problème (4.2) est soluble en vertu du Lemme 2.5. □

Nous avons alors (l'estimation (4.4) est claire, par construction, et grâce à (2.11)) :

Lemme 4.1. : Les formules (4.1)-(4.2), avec la condition de normalisation (3.13) pour k = 0, définissent de façon unique $w^o \in \underline{H}^1_{per}(Y)$, $p^o \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$ (donc, p^o en tant que fonction de $L^2(Y_f)$, est unique à une constante additive près). En outre, il existe une constante C > 0, telle que

$$(4.4)\qquad \|w^o\|_{\underline{H}^1_{per}(Y)} + \|p^o\|_{L^2(Y_f)/\mathbb{C}} \le C\|\ell^o\|_{\underline{H}^{-1}_{per}(Y)} . \qquad \square$$

Nous choisirons la constante additive de p^o en sorte que :

$$(4.5)\qquad \int_{Y_f} p^o\, dy + \int_{Y_s} \operatorname{div} w^o_s\, dy = 0.$$

Remarque 4.2. :

La relation (4.5) nous permettra dans l'étape suivante (i.e. pour le calcul de w^1, p^1) de montrer que la condition de compatibilité est satisfaisante.

Avec le Lemme 4.1., et la condition (4.5), on voit que w^o et p^o ($p^o \in L^2(Y_f)$) sont définis de façon unique. $\square$

Pour $k \ge 1$, définissons ensuite w^k par :

$$(4.6)\qquad \begin{cases} w^k_s \in \underline{H}^1_{per}(Y_s) \\ a_s(w^k_s,v) + \frac{\gamma}{|Y_f|}\left(\int_{Y_s} \operatorname{div} w^k_s\, dy\right)\left(\int_{Y_s} \operatorname{div} \bar{v} dy\right) = (\ell^k_s,v)\ \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y_s) \end{cases}$$

$$(4.7)\qquad \begin{cases} -\frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j}(w^k_f) + \nu \frac{\partial p^k}{\partial y_i} = 0 \text{ dans } Y_f \\ \operatorname{div} w^k_f = g^k \text{ dans } Y_f \\ w^k_f = \chi^k \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où la forme ℓ^k_s est définie comme en (4.1) à partir de $\ell^k \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y)$, cette dernière étant donnée par

$$(4.8)\qquad (\ell^k,v) = \lambda\omega \int_{Y_f} p^{k-1} \operatorname{div} \bar{v} dy + 2\mu\omega \int_{Y_f} e_{ij}(w^{k-1}) e_{ij}(\bar{v}) dy,\ v \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y)$$

et où g^k et χ^k sont définis par

$$
(4.9) \quad \begin{aligned} g^k &= \frac{\lambda\omega}{\gamma}\left(p^{k-1} - \operatorname{div} w_f^{k-1}\right) - \frac{1}{|Y_f|}\int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^k \, dy \\ \chi^k &= w_s^k|_\Gamma . \end{aligned}
$$

Remarque 4.3. :

Il est aisé de montrer que la forme ℓ^k (définie au point (4.8)) satisfait à une condition du type (3.4). Cette propriété s'obtient en partant de la première des relations (4.7) pour l'indice k-1. On obtient $(\ell^k,v) = 0 \ \forall v \in \underline{H}^1_{oper}(Y_f)$, où l'on a identifié toute fonction $v \in \underline{H}^1_{oper}(Y_f)$ à son prolongement par o à Y. La propriété voulue s'en déduit sans peine.

Remarque 4.4. :

Lorsque w^{k-1} et p^{k-1} sont connus, la fonction p^{k-1} ayant été choisie (car p^{k-1} est unique à une constante additive près) en sorte que

$$
(4.10) \qquad \int_{Y_f} p^{k-1}\, dy + \int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^{k-1}\, dy = 0,
$$

le calcul de w^k, p^k s'effectue comme dans la Remarque 4.1 : (4.6) définit w_s^k à une constante additive près (on utilise la Remarque 4.3.) ; en fixant, pour l'instant, la constante de façon arbitraire, on a (4.7) pour définir $w_f^k \in \underline{H}^1_{per}(Y_f)$, $p^k \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$. En effet, la relation (4.10) implique (grâce à la périodicité de w^{k-1}) : $\int_{Y_f}(p^{k-1} - \operatorname{div} w_f^{k-1})\, dy = 0$, d'où l'on déduit (en se reportant à l'expression de g^k dans (4.9)) que la condition de compatibilité, du type (2.9), est satisfaite. □

On a alors le

Lemme 4.2. : Les formules (4.6),(4.7), avec la condition de normalisation (3.13), définissent de façon unique w^k et p^k, avec $w^k \in \underline{H}^1_{per}(Y)$, $p^k \in L^2(Y_f)/\mathbb{C}$. De plus, il existe une constante C telle que

$$
(4.11) \qquad \|w^k\|_{\underline{H}^1_{per}(Y)} + \|p^k\|_{L^2(Y_f)/\mathbb{C}} \le C\left(\|w^{k-1}\|_{\underline{H}^1_{per}(Y)} + \|p^{k-1}\|_{L^2(Y_f)}\right). \ \square
$$

Comme précédemment, nous choisirons la constante de p^k de telle sorte qu'une relation du type (4.10) soit vérifiée au rang k.

Remarque 4.5. :

Les constantes additives des p^k ayant été fixées conformément à (4.10) (pour tout $k \geq 1$) il est clair que, après modification éventuelle des constantes respectives de (4.4) et (4.11), on peut remplacer dans ces relations l'espace $L^2(Y_f)/\mathbb{C}$ par $L^2(Y_f)$.

En outre on peut considérer égales les deux constantes C de (4.4) et (4.11) (il suffit de les remplacer par leur plus petit majorant), d'où il résulte, en particulier, que (3.14) est vérifié. □

5. - DEDUCTION DES EQUATIONS DONNANT LES w^k

Dans cette section nous établissons une équivalence entre les formules (3.10)-(3.12) et les équations (4.1),(4.2),(4.6),(4.7) qui nous ont permis d'obtenir les w^k.

Commençons par montrer que w^o vérifie (4.1),(4.2) :
En prenant dans (3.11) les v de la forme

$$v = \{v_s, v_f\} = \{o, \phi\} \ , \ \phi \text{ quelconque dans } \mathcal{D}_{per}(\bar{Y}_f^o)$$

on a, compte tenu de (3.4)

$$(5.1) \qquad \int_{Y_f} \operatorname{div} w_f^o \operatorname{div} \bar{\phi} \, dy = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y}_f^o)$$

d'où l'on déduit, grâce au Lemme 2.3, que div w_f^o est une constante g^o, satisfaisant en outre (grâce à la périodicité de w^o) à

$$(5.2) \qquad g^o = \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} \operatorname{div} w_f^o \, dy = - \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^o \, dy$$

et l'on a

$$(5.3) \qquad a(w^o, v) = a_s(w_s^o, v_s) + \frac{\gamma}{|Y_f|} \left(\int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^o \, dy \right) \left(\int_{Y_s} \operatorname{div} \bar{v}_s \, dy \right).$$

En définissant alors ℓ_s^o comme au point (3.5), on voit que (3.11) implique (4.1).

Ensuite, prenons dans (3.12), avec k = 1, v de la forme

$$v = \{v_s, v_f\} = \{0, \phi\} \quad , \quad \phi \text{ quelconque dans } \mathcal{V}_o .$$

Il vient

$$0 = \int_{Y_f} e_{ij}(w_f^o)\, e_{ij}(\bar{\phi})\, dy = -\left(\frac{\partial e_{ij}(w_f^o)}{\partial y_j} , \phi_i \right) \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_o$$

d'où l'on déduit, d'après le Lemme 2.2., qu'il existe $p^o \in L^2(Y_f)$, définie à une constante additive près, telle que la première relation (4.2) soit satisfaite. Les autres relations du point (4.2) résultent de ce qui précède, w^o étant dans $\underline{H}^1_{per}(Y)$.

<u>Montrons maintenant que</u> $w^k (k \geq 1)$ <u>satisfait à</u> (4.6),(4.7).

Nous admettons par ailleurs que ces relations sont satisfaites jusqu'au rang k-1. En particulier, la première relation (4.7) pour l'indice k-1 (nous rappelons qu'elle a lieu au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y}_f^o)$ dans Y_f) donne

$$2\mu \int_{Y_f} e_{ij}(w_f^{k-1})\, e_{ij}(\bar{\phi})\, dy + \lambda \int_{Y_f} p^{k-1} \operatorname{div} \bar{\phi}\, dy = 0 \quad \forall \phi \in \underline{\mathcal{D}}_{per}(\bar{Y}_f^o)$$

d'où

$$b(w^{k-1}, \phi) = \lambda \left(\int_{Y_f} \operatorname{div} w_f^{k-1} \operatorname{div} \bar{\phi}\, dy - \int_{Y_f} p^{k-1} \operatorname{div} \bar{\phi}\, dy \right)$$

et cela pour tout $\phi \in \underline{\mathcal{D}}_{per}(\bar{Y}_f^o)$, prolongé par 0 à $\bar{Y}$. Prenant alors dans (3.12) $v = \{v_s, v_f\}$ de la forme $v_s = 0$, $v_f = \phi$, ϕ quelconque dans $\underline{\mathcal{D}}_{per}(\bar{Y}_f^o)$, on obtient

$$\text{(5.4)} \qquad \int_{Y_f} [\gamma \operatorname{div} w_f^k - \lambda\omega(p^{k-1} - \operatorname{div} w_f^{k-1})] \operatorname{div} \bar{\phi}\, dy = 0 \quad \forall \phi \in \underline{\mathcal{D}}_{per}(\bar{Y}_f^o) .$$

En reprenant le raisonnement qui a conduit à l'obtention de g^o (dans (5.2)) à partir de (5.1), on montre que la fonction dans le crochet de (5.4) est une fonction constante. D'où (en partant de (4.10) et en utilisant la formule de Stokes qui ramène l'intégration de div w_s^{k-1} sur Y_s à celle de div w_f^{k-1} sur Y_f)

$$\operatorname{div} w_f^k = \frac{\lambda\omega}{\gamma}\left(p^{k-1} - \operatorname{div} w_f^{k-1}\right) - \frac{1}{|Y_f|}\int_{Y_s} \operatorname{div} w_s^k \, dy.$$

Il suffit alors de définir ℓ^k par (4.8), puis ℓ_s^k comme au point (3.5). Ainsi, on obtient bien (4.6) en partant de (3.12). Les formules (4.7), quant à elles, s'obtiennent aussi sans difficulté à partir de (3.12) en suivant une démarche calquée sur le raisonnement précèdent pour k = 0.

Nous venons ainsi de montrer que les formules (3.10)-(3.12) impliquent les relations (4.1), (4.2), (4.6), (4.7). Il est aisé de remonter les opérations que nous venons d'effectuer ; de sorte qu'en partant de (4.1), (4.2), (4.6), (4.7), on retrouve (3.10)-(3.12), établissant ainsi une équivalence entre les deux groupes d'équations.

La démonstration de la Proposition 3.1, ainsi que le calcul des termes du développement (3.9) sont donc achevés.

6. - APPLICATION A UN PROBLEME D'HOMOGENEISATION DE MELANGES DE SOLIDE ET FLUIDE

Dans cette section, la forme hermitienne a_s définie dans la section 3 est explicitement donnée par

$$a_s(u,v) = \int_{Y_s} a^s_{ijkh}\, e_{kh}(u)\, e_{ij}(\bar{v})\, dy$$

où les coefficients a^s_{ijkh} sont des fonctions réelles satisfaisant à

$$a^s_{ijkh} \in L^\infty(Y_s)$$

$$a^s_{ijkh} = a^s_{ijhk} = a^s_{khij}$$

$$a^s_{ijkh}\,\xi_{kh}\,\xi_{ij} \geq \alpha\, \xi_{ij}\,\xi_{ij} \quad ; \quad \alpha > 0 \ , \quad \forall\, \xi_{ij} = \xi_{ji}$$

Les formes a et b du point (3.6) peuvent alors s'exprimer par

$$(6.1) \qquad a(u,v) = \int_Y a_{ijkh}\, e_{hk}(u)\, e_{ij}(\bar{v})\, dy$$

$$b(u,v) = \int_Y b_{ijhk}\, e_{kh}(u)\, e_{ij}(\bar{v})\, dy$$

où

$$a_{ijkh}(y) = \begin{cases} a^s_{ijkh} & \text{si} \quad y \in Y_s \\ \gamma\delta_{ij}\delta_{kh} & \text{si} \quad y \in Y_f \end{cases}$$

$$b_{ijkh}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \in Y_s \\ 2\mu\delta_{ik}\delta_{jh} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} & \text{si} \quad y \in Y_f \, . \end{cases}$$

Si les a^s_{ijkh} sont des coefficients d'élasticité, $\eta\mu$ et $\eta\lambda$ des coefficients de viscosité, et γ un coefficient associé à la compressibilité d'un fluide, nous considérons le comportement limite (dans le cadre habituel de la méthode d'homogénéisation) des vibrations d'un mélange de solide élastique et de fluide visqueux compressible (voir [9], sect. 8.1 ou [8] pour détails). La loi de comportement homogénéisée donnant le tenseur des contraintes σ_{ij} en fonction du tenseur des déformations E_{kh} est une loi de convolution dans le temps, dont l'image de Laplace est

$$(6.2) \qquad \hat{\sigma}^\eta_{ij}(\omega) = \beta^\eta_{ijkh}(\omega)\, \hat{E}_{kh}(\omega)$$

où le symbole $\hat{}$ désigne la transformée de Laplace de t en ω. Les coefficients β^η_{ijkh} sont définis par

$$(6.3) \qquad \beta^\eta_{ijkh}(\omega) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (a_{ijlm}(y) + \omega\eta b_{ijlm}(y))(\delta_{kl}\delta_{hm} + e_{lm}(w^{kh}_\eta))\, dy$$

où w^{kh}_η est solution du Problème

$$(6.4) \qquad \begin{aligned} & w^{kh}_\eta \in \underline{H}_{per}(Y) \\ & \int_Y (a_{ijlm}(y) + \omega\eta b_{ijlm}(y))(\delta_{kl}\delta_{hm} + e_{lm}(w^{kh}_\eta))\, e_{ij}(\bar{v})\, dy = 0 \quad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y) \end{aligned}$$

Remarque 6.1. :

La relation (6.3) montre que les coefficients β^{η}_{ijkh} dépendent bien de ω. La loi de comportement, image inverse de Laplace de (6.2), est un produit de convolution par rapport au temps. D'un point de vue mécanique, la loi de comportement homogénéisée est viscoélastique. Nous verrons par la suite que les coefficients β_{ijkh} correspondant au cas limite $\eta \to 0$ sont indépendants de ω, de sorte que la loi de comportement associée au cas limite (pour $\eta \to 0$) est de type élastique. □

En fait il est plus simple d'exprimer directement la (transformée de Laplace (6.2) de la) loi de comportement par

$$(6.5) \qquad \hat{\sigma}^{\eta}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (a_{ijkh}(y) + \omega\eta b_{ijkh}(y))(E_{kh} + e_{kh}(w^{\eta}))\, dy$$

où w^{η} est solution du Problème :

$$(6.6) \qquad \begin{cases} w^{\eta} \in \underline{H}^1_{per}(Y) \\ \int_Y (a_{ijkh}(y) + \omega\eta b_{ijkh}(y))(E_{kh} + e_{kh}(w^{\eta}))e_{ij}(\bar{v})\, dy = 0 \quad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y). \end{cases}$$

Ceci étant, nous allons étudier le comportement limite de la loi (6.2), lorsque $\eta \to 0$ (donc dans le cas d'un fluide faiblement visqueux) à l'aide des résultats des sections précédentes.

L'équation (6.6) se ramène facilement à la formulation (3.8). D'autre part, définissons $\ell^a, \ell^b \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y)$ par

$$(6.7) \qquad (\ell^a, v) = - \int_Y a_{ijkh}(y)\, E_{kh}\, e_{ij}(\bar{v})\, dy$$

et une expression analogue (à l'aide de b_{ijkh}) pour ℓ^b. Si nous notons w^{η}_a (resp. w^{η}_b) la solution de (3.8) associée au second membre ℓ^a (resp. ℓ^b), alors w^{η}, définie par (6.6) (avec $\int_Y w^{\eta}\, dy = 0$) est donnée par

$$(6.8) \qquad w^{\eta} = w^{\eta}_a + \omega\eta w^{\eta}_b \quad .$$

Remarque 6.2. :

Les formes ℓ^a et ℓ^b s'expriment explicitement par

$$(\ell^a,v) = -\gamma E_{ii} \int_{Y_f} \operatorname{div} \bar{v}\, dy - E_{ij} \int_{Y_s} a^s_{ijkh}\, e_{kh}(\bar{v})\, dy$$

$$(\ell^b,v) = -\lambda E_{ii} \int_{Y_f} \operatorname{div} \bar{v}\, dy - 2\mu\, E_{ij} \int_{Y_f} e_{ij}(\bar{v})\, dy .$$

Sous cette forme, il apparait clairement qu'elles satisfont à la condition (3.4). □

Ainsi, les résultats des sections précédentes sont applicables. Désignons par w^o le terme d'ordre zéro de la série (3.9) correspondant au problème (3.8) avec ℓ^a au second membre. On a (cf. le point (6.8))

(6.9) $$w^\eta \to w^o \text{ dans } \underline{H}^1_{per}(Y) \text{ fort lorsque } \eta \to 0$$

d'où l'on déduit la forme limite de la loi de comportement (6.2) :

(6.10) $$\lim_{\eta\to 0} \hat{\sigma}^\eta_{ij}(\omega) = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ijhk}(y)(E_{kh} + e_{kh}(w^o))\, dy .$$

Explicitons la quantité au second membre de (6.10). Les formules (4.1), (4.2), (4.3) et (6.7) donnent

(6.11) $$\operatorname{div} w^o_f = g^o = -\frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_s} \operatorname{div} w^o_s\, dy$$

(6.12) $$a_s(w^o_s,v) + \frac{\gamma}{|Y_f|} \left(\int_{Y_s} \operatorname{div} w^o_s\, dy\right)\left(\int_{Y_s} \operatorname{div} \bar{v}\, dy\right)$$
$$= -\int_{Y_s} a^s_{ijkh}\, E_{kh}\, e_{ij}(\bar{v})\, dy - \gamma E_{ii} \int_{Y_s} \operatorname{div} \bar{v}\, dy,\ \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y_s)$$

Définissant

(6.13) $$P = -\gamma\left(E_{ii} - \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_s} \operatorname{div} w^o_s\, dy\right)$$

la relation (6.12) devient

$$(6.14) \qquad 0 = \int_{Y_s} a^s_{ijkh} \, (E_{kh} + e_{kh}(w^o_s)) \, e_{ij}(\bar{v}) \, dy + P \int_{Y_s} \mathrm{div}\, \bar{v} \, dy \quad \forall v \in \underline{H}^1_{per}(Y_s$$

D'autre part, en intégrant (6.13) sur Y_f on a immédiatement

$$(6.15) \qquad \frac{|Y_f|}{|Y|} \, \frac{P}{\gamma} + \frac{|Y_f|}{|Y|} E_{ii} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_s} \mathrm{div}\, w^o_s \, dy \quad .$$

En se référant à [3] ou à la section 8.5 de [9] ("connected elastic solid with canals filled with a slightly vicous fluid") où les coefficients de viscosité sont de l'ordre de ε^2, on voit que (6.14) et (6.15) coïncident respectivement avec les points (5.19) et (5.10) de [9] (sect. 8.5) si l'on y considère nul le déplacement relatif du fluide par rapport au solide. Nous reviendrons sur l'interprétation de ce comportement limite dans l'article accompagnant de E. Sanchez-Palencia et de l'auteur. Nous avons alors la

<u>Proposition 6.1.</u> : La loi de comportement, de type viscoélastique, dont (6.2) est la transformée de Laplace converge lorsque $\eta \to 0$ vers une loi de type élastique qui coïncide avec celle de la sect. 8.5 de [9] si le déplacement relatif dans cette dernière est nul.

Cet article n'aurait pas vu le jour sans le soutien permanent de E. SANCHEZ-PALENCIA. Qu'il me soit permis ici de le remercier pour sa disponibilité à mon égard.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., and PAPANICOLAOU G., "Asymptotic Analysis for Periodic Structures" North Holland, Amsterdam (1978).

[2] GEYMONAT G., LOBO-HIDALGO M., and SANCHEZ-PALENCIA E., "Spectral properties of Certain Stiff Problems in Elasticity and Acoustics" Math. Meth. App. Sci. 4 (1982) p. 291-306.

[3] LEVY T., "Propagation of waves in a fluid-satured porous elastic solid "Intern. J. Engng. Sci. 17 (1979) p. 1005-1014.

[4] LIONS J.L., "Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal" Springer, Berlin (1973).

[5] LIONS J.L. et MAGENES E., "Problèmes aux limites non homogènes et applications" Dunod, Paris (1968).

[6] NGUETSENG G., "Problème raide périodique et application à l'étude des coefficients homogénéisés pour un mélange de solide et fluide" C.R. Acad. Sc. Paris, série I (1982) p. 205.

[7] NGUETSENG G., "Espaces de Distributions sur des ouverts périodiques et applications" Rapport INRIA n° 172 (1982).

[8] SANCHEZ-HUBERT J., "Asymptotic Study of the macroscopic behaviour of a solid-liquid mixture" Math. Meth. Appl. Sci. 2 (1980).

[9] SANCHEZ-PALENCIA E., "Non-Homogeneous Media and Vibration Theory" Springer, Berlin (1980).

[10] TEMAM R., "Navier-Stokes Equations" North Holland, Amsterdam

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique