# Derivation par rapport au domaine dans les problemes unilateraux

Jan Sokolowski, J.P. Zolesio

INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:954 90 20

Rapports de Recherche

N° 132

# DÉRIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE DANS LES PROBLÈMES UNILATÉRAUX

Jan SOKOLOWSKI
Jean-Paul ZOLESIO

Mai 1982

# DERIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE DANS LES PROBLEMES UNILATERAUX

par

J. SOKOLOWSKI *
Systems Research Institute
01-447 WARSZAWA
ul. Newelska 6
POLOGNE

J.P. ZOLESIO
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 - NICE CEDEX
FRANCE

******

* Qui fut supporté par l'I.N.R.I.A. pour cette recherche.

# DERIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE DANS LES PROBLEMES UNILATERAUX

Jan SOKOLOWSKI

et

Jean-Paul ZOLESIO

RESUME : Dans ce travail, nous prouvons l'existence de la dérivée Eulérienne $\dot{y}$ pour des problèmes unilatéraux et en particulier pour le problème avec obstacle ; l'inéquation variationnelle de Sigonorini et pour l'élasticité linéaire plane (en milieu non isotrope) avec condition unilatérales sur une partie de la frontière. Nous caractérisons la dérivée Eulérienne $\dot{y}$ comme solution unique d'une inequation variationnelle associée à une partie convexe fermée $S(\Omega)$ indépendante de la direction $V$ de dérivation.

Nous caractérisons également la dérivée par rapport au domaine, dans la direction du champ $V$ , $y' = \dot{y} - \Delta y.V(0)$ , comme solution unique d'une autre inequation variationnelle associée à une partie convexe fermée $S_V(\Omega)$ qui elle dépend de $v = V(0)$. sur la frontière du domaine $\Omega$ .

ABSTRACT : In this paper, we prove existence of the material derivative $\dot{y}$ for problems with unilateral conditions, in particular for the obstacle problem, both with homogeneous and non homogeneous boundary conditions, Signorini variational inequality and for linear plane elasticity with unilateral boundary conditions. We caracterise the derivative $\dot{y}$ as the unique solution of a variational inequality associated to a closed convex set $S(\Omega)$ independant on the direction $V$ of the differentiation.

We also characterize the shape derivative $y' = \dot{y} - \Delta y.V(0)$ , as the solution of an other variational inequality associated to a closed convex set $S_V(\Omega)$ which actually depends on $v = V(0)$ on the boundary.

Nous suivons le plan suivant :



**************

## INTODUCTION

Les problèmes d'optimum design ont attiré beaucoup d'attention, voir par exemple J. CEA and Ed. HAUG[*] où les problèmes d'optimisation de domaine en particulier sont étudiés. (Voir également le livre de BANICHUK). Jusqu'à présent la théorie mathématique fut développée principalement pour les problèmes linéaires, cependant il y a plusieurs approches possibles pour certains problèmes non linéaires, par exemple dans un travail à paraître de DELFOUR-PAYRE-ZOLESIO.

Dans notre papier on se concentre sur le calcul de la dérivée matérielle $\dot{y}$ et de la dérivée par rapport au domaine $y'$ pour les problèmes unilatéraux elliptiques du second ordre. Le domaine étant déformé par l'action d'un champ $V$ on obtient en fait des dérivées coniques (au sens de MIGNOT [ 2 ]) des états dans la direction du champ $V$. Dans les exemples la caractérisation de $y'$ comme solution d'un problème aux limites unilatéral est très délicat et on peut toujours éviter les difficultés en choisissant des champs $V$ nuls au voisinage des régions où les contraintes unilatérales sont saturées.

Lorsqu'on envisage le problème du contrôle de la solution du problème unilatéral par rapport au domaine, on introduit une fonctionnelle coût et la caractérisation de $y'$ permet alors de calculer la semi-dérivée Eulerienne (voir J.P. ZOLESIO [7 ]) et d'écrire des conditions nécessaires d'optimalité.

(*) Optimization of Distributed Parameter Structures, J. CEA and Ed. HAUG eds, SIJTHOFF and NOORDHOF (1981).

## 1 . LES DONNEES .

$H$ désigne un espace de Hilbert, $\|\ .\ \|$ sa norme, $H'$ son dual et $<\ ,\ >$ la forme bilinéaire de dualité entre $H$ et $H'$ .

$K$ est une partie connexe fermée dans $H$ $t$ est un paramètre décrivant l'intervalle $[0,\delta]$ , $\delta > 0$ .

On suppose donnée une famille de formes bilinéaires sur $H$ : $a^t(.\ ,\ .) : H \times H \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $t$ :

$$(1) \qquad \begin{cases} a^t(\varphi\ ,\ \varphi) \geq \alpha\ \|\varphi\|^2\ , & \forall\ \varphi \in H \\ |a^t(\varphi\ ,\ \psi)| \leq M\ \|\varphi\|\ \|\psi\| & \forall\ \varphi\ ,\ \psi \in H \end{cases}$$

les constantes , $\alpha > 0$ , $M < +\infty$ , ne dépendant pas du paramètre $t$ ;

On note $\mathscr{A}(t) \in \mathscr{L}(H\ ,\ H')$ l'opérateur défini par :

$$<\mathscr{A}(t)\ .\ \varphi\ ,\ \psi> = a^t(\varphi\ ,\ \psi)\ , \quad \forall\ \varphi, \psi \in H \quad .$$

On suppose donnée une famille d'éléments de $H'$

$$F(t) \in H'\ , \quad t \in [0,\delta[$$

## 2 . LES HYPOTHESES DE REGULARITE : dérivabilité par rapport au paramètre.

On suppose l'existence d'un opérateur $\mathcal{B} \in \mathscr{L}(H\ ,\ H')$ tel que :

$$(2) \qquad \lim_{t \downarrow 0} \|(\mathscr{A}(t) - \mathscr{A}(0))/t - \mathcal{B}\|_{\mathscr{L}(H\ ,\ H')} = 0$$

de plus, on suppose l'existence d'un élément $F'$ de $H'$ tel que :

$$(3) \qquad \lim_{t \downarrow 0} \|(F(t) - F(0))/t - F'\|_{H'} = 0 \quad .$$

## 3 . INEQUATIONS VARIATIONNELLES.

Pour $t \in [0,\delta[$ , $y(t)$ est l'élément de $K$ vérifiant

$$(4) \qquad \begin{cases} y(t) \in K \quad , \quad \forall \varphi \in K \\ a^t(y(t) \; , \; \varphi - y(t)) \geq \langle F(t), \varphi - y(t) \rangle \end{cases}$$

On donne un résultat de dérivabilité à droite dans $H$ pour l'application $t \longmapsto y(t)$ , en $t = 0$ . Pour cela on suppose que la solution $P(f)$ de l'inequation variationnelle suivante

$$(5) \qquad \begin{cases} P(f) \in K \quad , \quad \forall \varphi \in K \\ a^o(P(f) \; , \; \varphi - P(f)) \geq \langle f \; , \; \varphi - P(f) \rangle \end{cases}$$

est dérivable par rapport à $f$ , $f$ dans $H'$ , au sens suivant :

(H.1) $\begin{cases} \text{Pour tous } f \text{ et } w \text{ dans } H', \text{ il existe un élément} \\ Q = Q(f \; ; \; w) \text{ vérifiant} \\ \qquad P(f + tw) = P(f) + t\, Q(f \; ; \; w) + O(t) \end{cases}$

où $O(t)$ est un élément de $H$ vérifiant

$$\|O(t)\| \; / \; t \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \downarrow 0$$

<u>THEOREME 1</u> . - Sous les hypothèses (1), (2), (3), (H.1) , la solution $y(t)$ du problème (4) est dérivable à droite en $t = 0$ . De façon précise on a le développement

$$(6) \qquad y(t) = y(0) + t\, Q(F(0) \; ; \; F' - \mathcal{B}\, y(0)) + O(t).$$

<u>Preuve</u> : On vérifie aisément que $y(t)$ vérifie la condition de Lipschitz :

$$(7) \qquad \|y(t) - y(0)\| \leq C( \|F(t) - F(0)\|_{H'} + \|\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(0)\|_{\mathcal{L}(H,\, H')}$$

Par ailleurs $y(t)$ satisfait l'inequation variationnelle suivante :

$$(8) \qquad a^o(y(t) \; , \varphi - y(t)) \geqq \langle F(0) + t(F' - By(0) \; , \; \varphi - y(0) \rangle$$
$$+ \langle r(t) \; , \varphi - y(t) \rangle \; , \; \forall \varphi \in K$$

En utilisant (2), (3), (7) on montre que le terme $r(t)$ figurant dans (8) vérifie

$$(9) \qquad \|r(t)\|_{H'} \; / \; t \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \downarrow 0$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} y(t) &= P(F(O) + t(F' - \mathcal{B}.\, y(O)) + r(t)) \\ &= P(F(O) + t(F' - \mathcal{B}.y(O)) + O(t) \\ &= P(F_o) + t\, Q\,(F(O)\ ;\ F' - \mathcal{B}.y(O)) + O(t) \end{aligned}$$

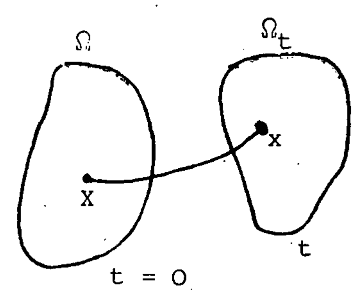
## 4 . PROBLEMES D'IDENTIFICATION DE DOMAINE

### 4.1. DEFORMATIONS CONTINUES

$\Omega$ est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ , $\Gamma$ sa frontière est supposée de régularité $C^{1,1}$ , $n$ la normale extérieure sur $\Gamma$ .

On étudie la déformation continue de cette configuration dépendant d'un paramètre $t$ , $t \in [0,\delta[$ , qui peut être considéré comme le temps :

tout point $X$ de $\Omega$ étant transformé en $x = x(t,X)$ au temps $t$ . Du point de vue Eulerien la vitesse de la particule $x$ est , au temps $t$ , $V(t,x) = \frac{d}{dt}\, x(t,X)$ .




La vitesse $V$ est considérée comme la direction de déformation. Cette déformation continue peut être construite à partir de la donnée du champ $V$ :

(10) Soit $V$ $C^o([0,\delta[\ ,\ C^1(\mathbb{R}^n\ ,\mathbb{R}^n))$

(on note $V(t)(x) = V(t,x))$ .

On associe à ce champ l'équation différentielle

(11) $$\frac{d}{dt}\, x(t,X) = V(t,\ x(t,X))\ ,\quad x(O,X) = X\ .$$

En supposant de plus le champ $V$ borné sur $\mathbb{R}^n$ on montre (voir [7] ) que la solution $x(t,X)$ est définie pour $t \in [0,\delta\ [$ et $X \in \mathbb{R}^2$ et on définit l'application

(12) $$T_t\ :\ X \longmapsto x = x(t,X)$$

qui, pour $t \in [0,\delta[$, est une transformation inversible de $\mathbb{R}^n$, avec $T_t$ et $T_t^{-1}$ appartenant à $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Le domaine déformé est $\Omega_t = T_t(\Omega)$ , soit

(13) $$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(t,X) \text{ avec } X \in \Omega\}$$

On note $DT_t(X)$ la matrice Jacobienne de l'application $T_t$ au point $X$ .

Notons que $\varphi_t \in H^1(\Omega_t)$ si et seulement si $\varphi = \varphi_t \circ T_t \in H^1(\Omega)$ .

## 4.2. LES FORMES BILINEAIRES $a^t$ POUR LES PROBLEMES D'ORDRE 2

On définit les formes bilinéaires $a_t(.\,,\,.)$ sur $H^1(\Omega_t)$

(14) $$a_t(\varphi_t, \psi_t) = \int_{\Omega_t} a_{ij}\, \partial_i \varphi_t\, \partial_j \psi_t dx + \int_{\Omega_t} b_i\, \varphi_t \partial_i \psi_t dt + \int_{\Omega_t} c\, \varphi_t \psi_t dx$$
$$+ \int_{\Gamma_t} d\, \varphi_t \psi_t d\gamma_t \quad \text{pour} \quad \varphi_t, \psi_t \in H^1(\Omega_t)$$

où $a_{ij}(x)$ , $b_i(x)$ , $c(x)$ , $d(x)$ sont des éléments de $C^1(\mathbb{R}^N)$ avec

(14') $$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \nu\xi_i\xi_j \quad , \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } x \text{ dans } \mathbb{R}^N, \quad \nu > 0$$

Notons $A(x)$ la matrice $[a_{ij}(x)]$ , $b(x)$ le vecteur $\{b_i(x)\}$ on définit les formes bilinéaires $a^t(.\,,\,.)$ sur l'espace fixe $H^1(\Omega)$ par

(15) $$a^t(\varphi,\psi) = \int_\Omega < A^t\, \nabla\varphi\, , \nabla\psi > dx + \int_\Omega \varphi < b^t, \nabla\psi > dx$$
$$+ \int_\Omega c^t \varphi\psi\, dx + \int_\Gamma d^t\, \varphi\,\psi\, d\gamma$$

pour $\varphi, \psi$ dans $H^1(\Omega)$ où $A^t$ est la matrice $n \times n$ définie dans $\Omega$ par

(16) $$A^t = \det(DT_t) \,.\, {}^tDT_t^{-1} \,.\, A \circ T_t \,.\, DT_t^{-1}$$

$b^t$ est le vecteur défini dans $\Omega$ par

(17) $$b^t = \det(DT_t)\ {}^tDT_t^{-1} \cdot (b \circ T_t)$$

$c^t$ est la fonction définie dans $\Omega$ par

(18) $$c^t = \det(DT_t) \quad c \circ T_t$$

et $d^t$ est la fonction définie sur $\Gamma$ par

(19) $$d^t = \|M(DT_t) \cdot n\|_{\mathbb{R}^n} \quad d \circ T_t$$

où $M(DT_t)$ est la matrice des cofacteurs de la matrice Jacobienne $DT_t$ (voir J.P. Zolesio [6]) .

On vérifie facilement l'identité suivante

(20) $$\begin{cases} a_t(\varphi_t , \psi_t) = a^t(\varphi , \psi) \\ \text{où} \quad \varphi = \varphi_t \circ T_t \quad \text{et} \quad \psi = \psi_t \circ T_t \end{cases}$$

et $a_o(\varphi , \psi) = a^o(\varphi , \psi) = a(\varphi , \psi)$ pour tout $\varphi , \psi$ dans $H^1(\Omega)$ .

On définit l'opérateur $\mathscr{A}(t) \in \mathscr{L}(H^1(\Omega) , (H^1(\Omega))')$ associé à la forme bilinéaire $a^t(\varphi,\psi)$ par

$$< \mathscr{A}(t).\varphi,\psi > = a^t(\varphi,\psi) , \quad \forall \varphi , \psi \in H^1(\Omega)$$

<u>LEMME 1</u> : L'opérateur $\mathcal{B} \in \mathscr{L}(H^1(\Omega) , (H^1(\Omega))')$ qui vérifie l'hypothèse (2) est défini par

(21) $$< \mathcal{B} . \varphi , \psi > = \int_\Omega < A' . \nabla\varphi , \nabla\psi > dx + \int_\Omega \varphi < b', \nabla\varphi > dx + \int_\Omega \operatorname{div}(cV)\ \varphi\ \psi\ dx + \int_\Gamma d'\varphi\ \psi\ d\gamma$$

où $V = V(o,x)$ , $x$ dans $\Omega$ et $A'$ désigne la matrice

(22) $$A'(x) = \operatorname{div} V\ A - ({}^* DV.A + A.DV) + \nabla A.V$$

$\nabla A.V$ étant la matrice de coefficient $\partial_k\, a_{ij}\, V_k$ et $b'$ le vecteur

(23) $$b' = \operatorname{div} V\ b - {}^*DV.b + \nabla b.V$$

$\nabla b.V$ étant le vecteur de composante $\partial_k b_i V_k$

et $d'$ est la fonction définie sur la frontière $\Gamma$ par

(24) $d' = \mathrm{div}(dV) - < DV.n \, , n > d$ sur $\Gamma$ ,

$d'$ est la dérivée par rapport à $t$ , en $t = 0$ , de $d^t$ défini en (19) , pour le calcul de $d'$ on renvoie à J.P. Zolesio [6]

4.3. LES SECONDS MEMBRES

Aux formes bilinéaires $a^t(\varphi,\psi)$ définies sur $H^1(\Omega)^2$ sont associés des seconds membres $F(t)$ , éléments de $H^1(\Omega)'$ définis de la façon suivante :

$f$ et $P$ sont deux fonctions données, $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $P \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et pour $t \in [0,\delta]$ , $F_t$ est l'élément de $H^1(\Omega_t)'$ défini par

(24)' $$< F_t \, , \varphi_t >_t \; = \int_{\Omega_t} f(x) \, \varphi_t(x) dx \; + \int_{\Gamma_t} P(x) \, \varphi_t(x) \, d\gamma_t(x) \quad ,$$

pour toute fonction $\varphi_t$ dans $H^1(\Omega_t)$ .

On pose alors :

(24)" $$F(t) \in H^1(\Omega)'$$

$$< F(t), \varphi > \; = \int_{\Omega} f^t \varphi \, dx \; + \int_{\Gamma} P^t \varphi \, d\gamma \quad , \quad \forall \, \varphi \in H^1(\Omega)$$

où

$$f^t = \det(DT_t) \; f \circ T_t$$

$$p^t = \| M(DT_t).n \|_{\mathbb{R}^N} \; p \circ T_t \quad .$$

notons que $F(0) = F_0$

LEMME 2 : L'élément $F'$ de $H^1(\Omega)'$ vérifiant (3) est défini par

(25) $$< F',\varphi > \; = \int_{\Omega} \mathrm{div}(fV)\varphi \, dx + \int_{\Gamma} \mathrm{div}(pV)\varphi \, d\gamma$$

$$- \int_{\Gamma} < DV. \, n, \, n > p\varphi \, d\gamma \quad , \quad \forall \, \varphi \in H^1(\Omega)$$

REMARQUE 1 :

Notons que l'expression $< DV.n\ ,\ n >$ sur $\Gamma$ qui apparaît dans (24) et (25) se simplifie lorsque le champ $V$ est proportionnel au champ normal $n$ sur $\Gamma$ (voir J.P. Zolesio [ 7 ] ) :

Si est de régularité $C^2$ et $V = v\,n$ sur $\Gamma$ alors $< DV.n\ ,\ n > = v\,H$ sur $\Gamma$ où $H$ est la courbure moyenne de $\Gamma$ .

### 4.4. LES FORMES BILINEAIRES $a^t$ POUR LES PROBLEMES VECTORIELS D'ORDRE 2 DE L'ELASTICITE LINEAIRE PLANE

$c$ désigne un champ de tenseur d'ordre 4 défini sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour $i, j, k, \ell = 1,2$

$$c_{ijk\ell} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \qquad \text{avec}$$

$$c_{ijk\ell}(x) = c_{jik\ell}(x) = c_{k\ell ij}(x) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et}$$

avec la convention de sommation des indices répétés,

$$c_{ijk\ell}(x)\ e_{ij} e_{k\ell} \geq \alpha_o\ e_{ij}\ e_{ij} \quad \text{pour tout tenseur } e$$

d'ordre 2 (matrice) sysmétrique, $\alpha_o > 0$ , $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$ .

Pour $u$ et $v$ dans $L^2(\Omega_t)^4$ on note

$$\int_{\Omega_t} u..\ c\ ..\ v\ dx = \int_{\Omega_t} u_{ij}(x)\ c_{ijk\ell}(x)\ v_{k\ell}(x)\ dx$$

Pour $y$ dans $H_t = (H^1(\Omega_t))^2$ , $y = (y_1\ ,\ y_2)$ , on note

$$Dy = \begin{pmatrix} \partial_1 y_1 & , & \partial_2 y_1 \\ \partial_1 y_2 & , & \partial_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\nabla y_1 \\ {}^t\nabla y_2 \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobienne de $y$ , élément de $L^2(\Omega_t)^4$ et sa symétrisée

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{2}\ (Dy + {}^tDy) \qquad \text{élément de } L^2(\Omega_t)^4$$

on définit les formes bilinéaires $\underline{a}_t(.,.)$ sur $H^1(\Omega_t)^2$

(27) $\quad \underline{a}_t(\varphi_t , \psi_t) = \int_{\Omega_t} \varepsilon(\varphi_t) .. C .. \varepsilon(\psi_t) dx$ , pour $\varphi_t , \psi_t \in H^1(\Omega_t)^2$

quelques identités pour les changements de variables

$$(\nabla y) \circ T = {}^t DT^{-1} \ \nabla(y \circ T) \qquad y \in H^1(\Omega_t) ,$$

$$(Dy) \circ T = D(y \circ T) . DT^{-1} \qquad y \in H^1(\Omega_t)^2$$

$$\varepsilon(y) \circ T = \frac{1}{2} (D(y \circ T) DT^{-1} + {}^t DT^{-1} . {}^t D(y \circ T)) .$$

On pourrait alors définir les formes bilinéaires $\underline{a}_t$ sur l'espace fixe $H = (H^1(\Omega))^2$ comme en (20) mais on souhaite définir le transport $\varphi_t \longmapsto \varphi$ respectant les composantes normales des champs sur $\Gamma$ , c'est-à-dire avec la propriété :

$$(\varphi_t . n_t) \circ T_t = \alpha \ \varphi . n \qquad \text{sur } \Gamma$$

où $\alpha$ est une fonction positive, pour cela on pose le changement de fonction suivant :

(28) $\qquad \varphi = DT_t^{-1} . \varphi_t \circ T_t \quad , \quad \varphi \in (H^1(\Omega))^2 , \ \varphi_t \in (H^1(\Omega_t))^2$

alors

(29) $\qquad \varphi . n = \| {}^t DT_t . n_t \circ T_t \|^{-1}_{\mathbb{R}^2} (\varphi_t . n_t) \circ T_t$

On pose donc :

(30) $$\underline{a}^t(\varphi,\psi) = \frac{1}{4} \int_\Omega \left[ D(DT_t . \varphi) . DT_t^{-1} + {}^t DT_t^{-1} \ {}^t D(DT_t \varphi) \right] .. C^t .. \left[ D(DT_t . \psi) . DT_t^{-1} + {}^t DT_t^{-1} \ {}^t D(DT_t . \psi) \right] dx$$

où $C^t$ est le champ de tenseur d'ordre 4 dont les composantes sont définies par

$$C^t_{ijk\ell} = \det(DT_t) \ C_{ijk\ell} \circ T_t$$

On a alors

$$\underline{a}_t(\varphi_t , \psi_t) = \underline{a}^t(\varphi , \psi)$$

pour toutes fonctions $\varphi_t$ , $\psi_t$ dans $(H^1(\Omega_t))^2$

avec $\varphi = DT_t^{-1} . \varphi_t \circ T_t$ dans $(H^1(\Omega))^2$

La forme bilinéaire $\underline{a}^t$ (voir 30) définit un opérateur $\underline{\mathscr{A}}(t)$ dans $\mathscr{L}(H,H')$

avec $H = (H^1(\Omega))^2$

<u>LEMME 3</u> :

L'opérateur $\underline{B} \in \mathscr{L}(H, H')$ avec $H = (H^1(\Omega))^2$

qui vérifie (2) , est défini par

(31)
$$< \underline{B} . \varphi , \psi > = \int_\Omega \varepsilon(\varphi) \;..C'..\; \varepsilon(\psi)\, dx + \int_\Omega \varepsilon'(\varphi) \;..\; C \;..\; \varepsilon(\psi)\, dx + \int_\Omega \varepsilon(\varphi) \;..\; C \;..\; \varepsilon'(\psi)\, dx$$

pour toutes fonctions $\varphi$ et $\psi$ dans $H^1(\Omega)^2$

où

(32)
$$\begin{cases} \varepsilon^t(\varphi) = \frac{1}{2}\left\{D(DT_t . \varphi)DT_t^{-1} + {}^*DT_t^{-1} \;.\; {}^*(D(DT_t . \varphi))\right\} \\ \varepsilon^o(\varphi) = \varepsilon(\varphi) \\ \varepsilon'(\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}\, \varepsilon^t(\varphi)\Big|_{t=o} \\ \qquad\quad = \frac{1}{2}\left\{D(DV.\varphi) + {}^*(D(DV.\varphi)) - D\varphi.DV - {}^*DV.{}^*D\varphi\right\} \\ C' = \frac{\partial}{\partial t}\, C^t\Big|_{t=o} \text{ est le champ de tenseurs d'ordre 4 défini de la façon suivante :} \\ C'_{ijk\ell} = \frac{\partial}{\partial t}\, C^t_{ijk\ell}\Big|_{t=o} = \operatorname{div} V\, C_{ijk\ell} + \nabla C_{ijk\ell} . V \end{cases}$$

## 4.5. <u>LES SECONDS MEMBRES POUR L'ELASTICITE PLANE.</u>

Aux formes bilinéaires $\underline{a}^t(\varphi, \psi)$ définies sur $(H^1(\Omega))^4$ sont associées des seconds membres $\underline{F}(t)$ , éléments de $(H^1(\Omega)^2)'$ , définis de la façon suivante :

$\underline{f}$ et $\underline{P}$ sont donnés, $\underline{f} = (f_1,f_2) \in (L^2(\mathbb{R}^2))^2$ , $\underline{P} = (P_1,P_2) \in (H^1(\mathbb{R}^2))^2$ et pour $t \in [0,\delta]$ , $\underline{F}_t$ est l'élément de $(H^1(\Omega_t)^2)'$ défini par :

( $\Gamma_1$ étant une partie ouverte de $\Gamma$ et $\Gamma_1^t = T_t(\Gamma_1)$) .

$$(33) \qquad < \underline{F}_t , \varphi_t >_t = \int_{\Omega_t} < \underline{f}(x) , \varphi_t(x) >_{\mathbb{R}^2} dx + \int_{\Gamma_t^1} < \underline{P}(x), \varphi_t(x) >_{\mathbb{R}^2} d\gamma_t(x)$$

pour toute fonction $\varphi_t$ dans $(H^1(\Omega_t))^2$ .

On pose alors :

$$\underline{F}(t) \in (H^1(\Omega)^2)'$$

$$(34) \qquad < \underline{F}(t), \varphi > = \int_\Omega < \underline{f}^t, \varphi >_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\Gamma_1} < \underline{P}^t, \varphi >_{\mathbb{R}^2} d\gamma$$

pour toute $\varphi$ dans $(H^1(\Omega))^2$

où :

$$(35) \qquad \underline{f}^t = \det(DT_t)\, \underline{f} \circ T_t \qquad \text{et}$$

$$(36) \qquad \underline{P}^t = \|M(DT_t) \,.\, n\|_{\mathbb{R}^2}$$

notons que $\underline{F}(0) = \underline{F}_0$

<u>LEMME 4</u> : L'élément $\underline{F}'$ de $(H^1(\Omega)^2)'$ vérifiant (3) est défini par :

$$< \underline{F}', \varphi > = \int_\Omega \operatorname{div}(f_i V)\varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}(P_i V)\varphi_i \, d\gamma$$

$$- \int_{\Gamma_1} < DV.\, n, n >_{\mathbb{R}^2} < \underline{P}, \varphi >_{\mathbb{R}^2} d\gamma$$

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega)^2$$

## 5 . <u>PROBLEME AVEC OBSTACLE</u>

### 5.1. <u>LES INEQUATIONS SUR L'ESPACE FIXE</u>

Pour $t \in [0,\delta[$ , $H_t = H^1(\Omega_t)$ , $\psi$ donnée dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

(38) $$K_\psi(\Omega_t) = \{\varphi \in H^1(\Omega_t) \mid \varphi(x) \geq \psi(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega_t\}$$

Soit une partie convexe fermée non vide de $H_t$ .

On suppose $a_t(.\ ,\ .)$ donnée par (14) et vérifiant

(38') $$a_t(\varphi_t\ ,\ \varphi_t) \geq c_o \|\varphi_t\|^2_{H_t} \quad , \quad c_o > 0 \quad ,$$

et le second membre $F_t$ définit par (24'). On considère l'inéquation variationnelle :

(39) $$\begin{cases} y_t \in K_\psi(\Omega_t) \\ a_t(y_t, \varphi_t - y_t) \geq \langle F_t, \varphi_t - y_t \rangle \ , \quad \forall\, \varphi_t \in K_\psi(\Omega_t) \end{cases}$$

Notons que

(40) $$\varphi_t \in K_\psi(\Omega_t) \quad \text{n'est pas équivalent à : } \varphi = \varphi_t \circ T_t \in K_\psi(\Omega)$$

on pose alors

(41) $$z_t = y_t - \psi \in K(\Omega_t) = \{\varphi \in H^1_o(\Omega_t) \mid \varphi(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega_t\}$$

qui est solution de l'inéquation variationnelle suivante

(42) $$\begin{cases} z_t \in K(\Omega_t) \\ a_t(z_t\ , \varphi - z_t) \geq \langle F_t\ , \varphi - z_t \rangle - a_t(\psi, \varphi - z_t) \\ \text{pour toute } \varphi \text{ dans } K(\Omega_t) \end{cases}$$

notons que $\varphi_t \in K(\Omega_t) \Longleftrightarrow \varphi = \varphi_t \circ T_t \in K(\Omega)$

On pose alors

$$z^t = z_t \circ T_t$$

qui est solution de , avec notations (15), (24") ,

l'inequation variationnelle .

$$
(43) \quad \begin{cases} z^t \in K(\Omega) = \{\varphi \in H_o^1(\Omega) \mid \varphi \geqq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega\} \\ a^t(z^t , \varphi - z^t) \qquad < F(t), \varphi - z^t > \\ \qquad\qquad\qquad - a^t(\psi \circ T_t , \varphi - z^t) \\ \forall \varphi \in K(\Omega) \end{cases}
$$

on pose

$$
(44) \qquad z = z^o = z_o = y - \psi \qquad \text{avec} \qquad y = y_o
$$

On vérifie avec l'hypothèse (38') que les formes bilinéaires $a^t$ définies en (43) vérifient l'hypothèse (1) .

### 5.2. LA DERIVEE EULERIENNE $\dot{y}$

L'application $t \longmapsto y^t$ est dérivable à droite, en $t = 0$ , dans $H_o^1(\Omega)$ , on note alors,

$$
(45) \qquad \dot{y} = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} (y_t \circ T_t - y)/t \quad , \quad \text{limite dans } H_o^1(\Omega)
$$

Soit $\dot{y} = \frac{d}{dt} y^t \Big|_{t=0}$ . On note de même $\dot{z} = \frac{d}{dt} z^t \Big|_{t=0}$ .

On caractérise alors $\dot{z}$ par l'inéquation (46) puis $\dot{y}$ par (47) .

<u>COROLLAIRE 1</u> : Considérons la partie convexe fermée dans $H_o^1(\Omega)$ ,

$$
(46)_1 \qquad \tilde{S}(\Omega) = \{\varphi \in H_o^1(\Omega) \mid \varphi \geqq 0 \text{ q.p. sur } Z(z) \text{ et } a^o(z+\psi,\varphi) = < F(0),\varphi >\}
$$

$\dot{z}$ est solution de

$$
(46)_2 \qquad \begin{cases} \dot{z} \in \tilde{S}(\Omega) , \\ a^o(\dot{z}, \varphi-\dot{z}) \geqq < F' - B.(z + \psi), \varphi-\dot{z} > - a^o(\nabla\psi.V, \varphi-\dot{z}) \\ \forall \varphi \in \tilde{S}(\Omega) . \end{cases}
$$

et on obtient avec $y^t = z^t + \psi \circ T_t$ ,

<u>COROLLAIRE 2</u> : $\dot{y} = \dot{z} + \nabla\psi.V$ est un élément de la partie fermée convexe de $H_o^1(\Omega)$ définie par

$$(47)_1 \quad S(\Omega) = \{\varphi \in H^1_o(\Omega) \mid \varphi \geq \nabla\psi.V \quad \text{q.p. sur} \quad Z(y-\psi) \;, \quad a^o(y,\varphi) = \langle F(0) \;,\; \varphi - \nabla\psi.V \rangle + a^o(y, \nabla\psi.V)\}$$

$$(47)_2 \quad \begin{cases} \dot{y} \in S(\Omega) \\ a^o(\dot{y} \;,\; \varphi - \dot{y}) \geq \langle F' - B.y \;,\; \varphi - \dot{y}) \;, \quad \forall \varphi \in S(\Omega) \end{cases}$$

La preuve du corollaire 2 est immédiate avec le corollaire 1 : Nous referons à F. Mignot [2] pour vérifier l'hypothèse (H1) pour la forme bilinéaire $a^o(.\,,\,.)$ avec le second membre $f$, associé à l'inéquation (43) suivant les notations de (5), qui à la forme :

$$\langle f,\varphi \rangle = \langle F(0), \varphi \rangle - a^o(\psi, \varphi)$$

On peut vérifier d'après F. Mignot [2] que $Q(f\,;\omega) \in \tilde{S}(\Omega)$ est solution de

$$\begin{cases} a^o(Q(f\,;\omega) \;,\; \varphi - Q(f\,;\omega)) \geq \langle \omega, \varphi - Q(f\,;\omega) \rangle \\ \forall \varphi \in \tilde{S}(\Omega) \end{cases}$$

Par ailleurs la vérification des hypothèses (2) et (3) de dérivabilité en $t = 0$ des formes bilinéaires $a^t$ et des seconds membres de (43) résulte des Lemmes 2 et 3 et du lemme suivant :

<u>LEMME 5</u> :

$$\lim_{t \downarrow 0} \; \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \frac{a^t(\psi \circ T_t,\varphi) - a^o(\psi,\varphi)}{t} - \langle B.\psi, \varphi \rangle - a^o(\nabla\psi.V, \varphi) \right| = 0$$

où $B$ est défini au Lemme 2 .

<u>PREUVE DU LEMME 5</u> :

$$\lim_{t \downarrow 0} \; \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \frac{a^t(\psi,\varphi) - a^o(\psi,\varphi)}{t} - \langle B.\psi \;,\; \varphi \rangle \right| = 0 \quad \text{d'après}$$

le lemme 2 . E d'après (2) on a :

$$\sup_{\|\varphi\| \geq 1} |a^t(\psi \circ T_t,\varphi) - a^o(\psi,\varphi)| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle (\mathscr{A}(t) - \mathscr{A}(0))u^t + \mathscr{A}(0).(u^t-u) ,\varphi \rangle| \to 0$$

lorsque $t \downarrow 0$ avec

$$u^t = (\psi \circ T_t - \psi)/t \to u = \nabla\psi.V \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega)$$

ce qui achève la preuve du corollaire 1 .

## 5.3. LES INEQUATIONS AVEC CONDITIONS NON HOMOGENES

On considère le problème avec obstacle $\psi$ et condition de Dirichlet $g$ sur la frontière $\partial\Omega_t = \Gamma_t$ . Pour cela on suppose données deux fonctions régulières $g$ et $\psi$ dans $C^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$(48) \qquad g > \psi$$

REMARQUE : La fonction $g$ est en fait arbitraire hors d'un voisinage de $\Gamma$ et donc la condition (48) n'intervient qu'au voisinage de $\Gamma$ .

La partie convexe fermée de $H_t = H^1(\Omega_t)$ est

$$(49) \qquad K_{\psi,g}(\Omega_t) = \{\varphi_t \in H_t \ , \ \varphi_t \geq \psi \ \text{ p.p. dans } \Omega_t \ \text{ et } \ \varphi_t = g \ \text{ sur } \ \Gamma_t\}$$

L'inequation variationnelle posée sur $\Omega_t$ :

$$(50) \qquad \begin{cases} y_t \in K_{\psi,g}(\Omega_t) \\ a_t(y_t \ , \ \varphi_t - y_t) \geq \ < F_t \ , \ \varphi_t - y_t > \ , \quad \forall\, \varphi_t \in K_{\psi,g}(\Omega_t) \end{cases}$$

où la forme bilinéaire $a_t$ est donnée en (14) et le second membre $F_t$ est donné en (24') avec les notations usuelles, $y^t = y_t \circ T_t$ est solution de

$$(50') \qquad \begin{cases} y^t \in K_{\psi_t,g_t}(\Omega) \quad \text{où} \quad \psi_t = \psi \circ T_t \ , \ g_t = g \circ T_t \\ a^t(y^t, \varphi - y^t) \geq \ < F(t), \varphi - y^t > \ , \quad \forall\, \varphi \in K_{\psi_t,g_t}(\Omega) \end{cases}$$

On note $\mathscr{A}(t) \in \mathscr{L}(H^1(\Omega) \ , \ H^1(\Omega)')$ l'opérateur défini par

$$(50'') \qquad <\mathscr{A}(t).\varphi,\phi> = a^t(\varphi,\phi) \quad \text{pour toutes} \quad \varphi \ , \ \phi \in H^1(\Omega) \ .$$

L'opérateur $B$ associé à $\mathscr{A}(t)$ et vérifiant (2) est donné au lemme 1 (voir (21)).

<u>REMARQUE</u> : La difficulté associée au problème (50') est que le convexe $K_{\psi_t,g_t}(\Omega)$ est variable dans l'espace fixe $H^1(\Omega)$ . Par un changement de variable convenable on va obtenir un convexe fixe.

<u>THEOREME 2</u> :

$t \longmapsto y^t = y_t \circ T_t$ est dérivable en $t = 0$ dans $H^1(\Omega)$ et

(51) $$\dot{y} = \frac{d}{dt} y_t \circ T_t \Big|_{t=0} = (\psi-g)\dot{z} + \nabla\psi . V$$

où

(52) $$\begin{cases} \dot{z} \in S(\Omega) = \{\varphi \in H_o^1(\Omega) \mid \varphi \leq 0 \quad \text{q.p. sur } Z(y_o - \psi) \text{ et} \\ a_o(g_o, g-\varphi) = \langle F_o, g-\varphi \rangle\} \quad \text{vérifie} \\ a_o((\psi-g)\dot{z}, (\psi-g)(\varphi-\dot{z})) \geqq \langle \tilde{F}' + \tilde{B} . \frac{y-g}{\psi-g} , \varphi - \dot{z} \rangle , \quad \forall \varphi \in S(\Omega) \end{cases}$$

où $\tilde{F}$ et $\tilde{B}$ sont donnés par (61) et (62).

<u>La preuve se fait en deux étapes</u> :

On introduit une inequation variationnelle auxiliaire :

Notons d'abord que

(53) $$\varphi_t \in K_{\psi,g}(\Omega_t) \Longleftrightarrow \theta_t = \frac{\varphi_t - g}{\psi - g} \in K(\Omega_t)$$

où

(54) $$K(\Omega_t) = \{\theta_t \in H_o^1(\Omega_t) \mid \theta_t \leq 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega_t\}$$

On définit la forme bilinéaire sur $H_o^1(\Omega_t)$ :

(55) $$\tilde{a}_t(\theta_t, \eta_t) = a_t((\psi-g)\theta_t , (\psi-g)\eta_t)$$

et la forme linéaire sur $H_o^1(\Omega_t)$ :

(56) $$\langle \tilde{F}_t, \theta_t \rangle = \langle F_t , (\psi-g)\theta_t \rangle - a_t(g, (\psi-g)\theta_t)$$

<u>LEMME 6</u> :

On suppose que (38') a lieu pour les formes bilinéaires $a_t$ , alors il en est de même pour les formes bilinéaires $\tilde{a}_t$ .

<u>Preuve</u> : Voir Appendice 2 .

<u>REMARQUE</u> : $\dot{y}$ défini par (51) est solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$(52')\quad \begin{cases} \dot{y} \in S(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi_{|\Gamma} = g \quad \text{sur } \Gamma \ , \ \varphi \geqq 0 \quad \text{q.p.} \\ \qquad\qquad \text{sur } \ Z(y-\psi) \ , \ a^o(y, \varphi-y) = < F(0), \varphi-g >\} \\ a^o(\dot{y}, \varphi-\dot{y}) \qquad < \hat{F}' - \hat{B}.y, \varphi-\dot{y} > \ , \quad \forall\, \varphi \in S(\Omega) \end{cases}$$

où $\hat{F}$ et $\hat{B}$ sont définis par :

$$(52'')\quad \begin{cases} < \hat{F} \ , \ \phi > \ = \ < \tilde{F}', \ \dfrac{\phi}{\psi-g} > \ + \ a^o( \nabla\psi.V, \ \phi) \\ < \hat{B}.y, \phi > \ = \ < \tilde{B} \ . \ \dfrac{y-g}{\psi-g} \ , \ \phi> \quad , \quad \forall\, \phi \in S(\Omega) \ . \end{cases}$$

On définit $z_t$ comme solution de l'inéquation

$$(57)\quad \begin{cases} z_t \quad K(\Omega_t) \\ \tilde{a}_t(z_t \ , \ \theta_t - z_t) \geqq \ < \tilde{F}_t \ , \ \theta_t - z_t > \ , \quad \forall\, \theta_t \in K(\Omega_t) \end{cases}$$

en vertu (53) on a

$$(58)\qquad y_t = (\psi-g)z_t + g$$

et il est clair que (51) est vérifié si $t \longmapsto z_t \circ T_t = z^t$ est dérivable à droite en $t = 0$ dans $H^1_o(\Omega)$ . Pour vérifier cela on transporte l'inéquation (57) sur $\Omega$ . Avec les notations usuelles on a :

$$(59)\quad \begin{cases} z^t \in K(\Omega) = \{\theta \in H^1_o(\Omega) \mid \theta \leqq 1 \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega\} \\ \tilde{a}^t(z^t, \theta - z^t) \ \geqq \ < F(t), \ \theta - z^t > \ , \quad \forall\, \theta \in K(\Omega) \end{cases}$$

Dans la deuxième étape de la démonstration on montre l'existence de $\dot{z}$ . Pour cela on doit vérifier d'une part les hypothèses (2), (3) et d'autre part l'hypothèse H1 . Pour cette dernière on peut utiliser les résultats de F. Mignot [ 2 ] comme au paragraphe précédent. Nous allons donner les preuves des points (2) et (3) :

On définit $\tilde{\mathscr{A}}(t) \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega) , H^{-1}(\Omega))$ par

(60) $$< \mathscr{A}(t) . \theta, \eta > = \tilde{a}^t(\theta, \eta) \text{ , pour toutes } \theta , \eta \in H_0^1(\Omega) .$$

<u>LEMME 7</u> : L'opérateur $\tilde{B} \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega) , H^{-1}(\Omega))$ associé à $\tilde{\mathscr{A}}(t)$ et vérifiant l'hypothèse (2) est donné par :

(61) $$\begin{aligned} < \tilde{B} .\theta , \eta > &= < B. (\psi - g)\theta , (\psi - g)\eta > \\ &+ < \mathscr{A}(0).(\nabla(\psi-g)V)\theta , (\psi-g)\eta > \\ &+ < \mathscr{A}(0) (\psi-g)\theta , (\nabla(\psi-g).V)\eta > \end{aligned}$$

où $\mathscr{A}(0)$ et B sont associés à l'opérateur (50')

A l'équation (59) on a associé un second membre F(t) de la forme suivante :

$$< \tilde{F}(t), \varphi > = < F(t), (\psi-g)\varphi > - a^t(g \circ T_t , (\psi-g) \circ T_t \varphi) , \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

où F(t) est associé à l'inéquation (50').

<u>LEMME 8</u> : L'élément F' associé à F(t) et vérifiant (3) est donné par

(62) $$\begin{aligned} < \tilde{F}', \varphi > = &\int_\Omega \operatorname{div}((\psi-g)fV)\varphi dx + \int_\Gamma \operatorname{div}((\psi-g)P)\varphi \, d\gamma \\ &- \int_\Gamma < DV. n, n > (\psi-g) P\varphi \, d\gamma \\ &- < Bg, (\psi-g)\varphi > - < \mathscr{A}(0) \nabla g.V, (\psi-g)\varphi > \\ &- < \mathscr{A}(0)g , \nabla(\psi-g).V\varphi > \end{aligned}$$

où $\mathscr{A}(0)$ et B sont associés à l'opérateur (50').

## 6 . PROBLEME DE SIGNORINI

Les formes bilinéaires $a_t$ sont définies en (14) sur l'espace $H_t = H^1(\Omega_t)$. La partie fermée convexe :

(63) $$K(\Omega_t) = \{\varphi_t \in H^1(\Omega_t) \mid \varphi_{|\Gamma} \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma\} .$$

On suppose les formes $a_t$ coercitives sur $H^1(\Omega_t)$ donc, avec les notations (14) , $C(x) \geq C_o > 0$ p.px dans $\mathbb{R}^2$ les seconds membres $F_t \in H^1(\Omega_t)'$ sont de la forme suivante :

(64) $$< F_t , \varphi_t > = \int_{\Omega_t} \underline{f} \cdot \nabla\varphi_t \, dx + \int_{\Omega_t} f_o \varphi_t \, dx$$

pour toute $\varphi_t$ dans $H_t$

avec $f_o \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $\underline{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ .

L'inéquation variationnelle

(65) $$\begin{cases} y_t \in K(\Omega_t) \\ a_t(y_t , \varphi_t - y_t) \geq < F_t , \varphi_t - \varphi_t > , \quad \forall \varphi_t \in H_t \end{cases}$$

notons que

$$\varphi_t \in K(\Omega_t) \quad \text{ssi} \quad \varphi = \varphi_t \circ T_t \in K(\Omega)$$

On pose donc

$$y^t = y_t \circ T_t \quad \text{élément de } K(\Omega)$$

La dérivée par rapport au domaine, dans la direction du champ $V$ est définie par (voir [ 6 ] ) .

(66) $$y' = \dot{y} - \nabla y . V$$

<u>REMARQUE</u> :

Si $\Omega$ est régulier, il existe $Y(t,x)$ définie sur $[0,\delta[ \times \mathbb{R}^2_x$

et $y_t(x) = Y(t,x) \quad x \in \Omega_t \quad , \quad t \in [0,\delta[$

et $y' = \frac{\partial}{\partial t} Y(t,.) \Big|_{t=0,\ \Omega}$

On montre dans J.P. Zolesio [6] qu'il existe de tels prolongements réguliers $Y$ et que $y'$ ne dépend pas du choix de ce représentant .

$(t,x) \longrightarrow y_t(x)$ est définie sur la partie $\tilde{Q} = \bigcup_{0 \leq t < \delta} (t \times \Omega_t)$ du cylindre $Q = [0,\delta] \times \mathbb{R}^2$ sur lequel est défini l'application $(t,x) \longmapsto Y(t,x)$ et

$$Y(t,x)\Big|_{\tilde{Q}} = y_t(x)$$

Enfin, notons que $\frac{\partial}{\partial t} y_t(x)$ n'a pas de sens en général mais que $\frac{\partial}{\partial t} Y$ est bien défini .

<u>PROPOSITION 1</u> : L'application $t \longmapsto y^t$ est dérivable à droite en $t = 0$ dans $H^1(\Omega)$ , la dérivée $\dot{y} = \frac{d}{dt} y^t\Big|_{t=0}$ est caractérisée par l'inéquation variationnelle

$$\dot{y} \in S(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid a_o(y,\varphi) = \langle F(0), \varphi \rangle \ ,$$
$$\varphi \geq 0 \text{ p.p. sur } Z(y) = \{x \in \Gamma | y(x) = 0\}\}$$

(67) $$a_o(\dot{y}, \varphi-\dot{y}) \geq \langle F' - B.y, \varphi-\dot{y} \rangle$$

pour toute fonction $\varphi$ dans $S(\Omega)$

où $B$ est l'opérateur défini en (21) et associé aux formes bilinéaires $a_t$ , $F'$ est donné par .

(68) $$\langle F', \varphi \rangle = \int_\Omega \langle D\underline{f}.\ V, \nabla\varphi \rangle_{\mathbb{R}^2} dx + \int_\Omega \langle \underline{f}\ , (\text{div } V\ I_d - {}^tDV).\ \nabla\varphi \rangle dx + \int_\Omega \text{div}(f_o V)\varphi\ dx$$

pour toute fonction $\varphi$ dans $H^1(\Omega)$ .

La preuve est similaire à celle du corollaire 1 .

## 7 . ELASTICITE LINEAIRE PLANE

### 7.1. LES INEQUATIONS SUR L'ESPACE FIXE

est un ouvert régulier, de classe $C^{1,1}$ , dans $\mathbb{R}^2$ . Sa frontière $\Gamma$ s'écrit

(69) $$\Gamma = \overline{\Gamma}^o \cup \overline{\Gamma}^1 \cup \Gamma^c \; .$$

où $\Gamma^o$ , $\Gamma^1$ et $\Gamma^c$ sont des parties ouvertes de $\Gamma$ deux à deux disjointes.

On considère, à l'instant $t$ , la configuration

$$\Omega_t \; , \; \Gamma_t = \overline{\Gamma_t^o} \cup \overline{\Gamma}_t^1 \cup \Gamma_t^c \qquad \text{avec}$$

$$\Omega_t = T_t(\Omega) \; , \; \Gamma_t = T_t(\Gamma) \; , \quad \Gamma_t^i = T_t(\Gamma^i) \quad \text{pour } i = 0,1,c$$

On définit l'espace

(70) $$H(\Omega_t) = \{\varphi_t \in (H^1(\Omega_t))^2 \mid \varphi_t\big|_{\Gamma_t^o} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_t^o\}$$

et la partie convexe fermée :

(71) $$K(\Omega_t) = \{\varphi_t \in H_t \mid n_t.\varphi_t \leq 0 \;\; \text{p.p. sur } \Gamma_t^c\}$$

où $n_t$ est le champ normal sur $\Gamma_t$ (extérieur à $\Omega_t$) .

On introduit alors l'inéquation variationnelle de l'élasticité linéaire, plane, avec condition unilatérale :

(72) $$\begin{cases} y_t \in K(\Omega_t) \; , \\ \underline{a}_t(y_t, \; \varphi_t - y_t) \geq \; < \underline{F}_t \; , \varphi_t - y_t > \; , \quad \forall \varphi_t \in K(\Omega_t) \end{cases}$$

où la forme bilinéaire $\underline{a}_t$ est définie par (27) et le second membre $\underline{F}_t$ par (33) .

Notons que sur $\Gamma_o^t$ le champ de déplacement $y_t$ est nul, c'est la condition classique bilatérale ; la traction $P$ est donnée sur $\Gamma_1^t$ ; la condtion unilatérale $n_t.y_t \leq 0$ agit sur la région de contact $\Gamma_t^c$ .

Notons que, d'après (29) ,

(73) $$\varphi_t \in K(\Omega_t) \iff \varphi = DT_t^{-1} \cdot \varphi_t \circ T_t \in K(\Omega)$$

alors on pose

(74) $$y^t = (DT_t)^{-1} \cdot y_t \circ T_t \quad , \text{ élément de } K(\Omega)$$

qui est solution de l'inéquation variationnelle suivante :

(75) $$\begin{cases} y^t \in K(\Omega) = \{\varphi \in H(\Omega) \mid n.\varphi \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma^c\} \\ \underline{a}^t(y^t, \varphi - y^t) \geq \langle \underline{F}(t), \varphi - y^t \rangle , \quad \forall \varphi \in K(\Omega) \end{cases}$$

où $\underline{a}^t$ est définie par (30) et $\underline{F}(t)$ par (34) .

On pose $y = y^o = y_o$ .

On suppose que le tenseur c est tel que l'hypothèse (1) est vérifiée sur $H(\Omega)$ pour les formes bilinéaires $\underline{a}^t$ , voir par exemple J. Necas et Hlavacek [1] .

## 7.2. LA DERIVEE EULERIENNE

**THEOREME 3** : L'application $t \longrightarrow y^t$ est dérivable à droite en $t = 0$ dans $H(\Omega)$ , cette dérivée que l'on note $\partial y$ est la solution de l'inequation variationnelle suivante :

La partie convexe :

(76) $$S(\Omega) = \{\varphi \in H(\Omega) \mid n.\varphi \leq 0 \quad \text{p.p. sur } Z(y) \subset \Gamma^c$$

$$\text{et } \underline{a}^o(y,\varphi) = \langle \underline{F}(0), \varphi \rangle\}$$

où $Z(y) = \{x \in \Gamma^c \mid n(x).y(x) = 0\}$

L'inéquation

(77) $$\begin{cases} \partial y \in S(\Omega) , \\ \underline{a}^o(\partial y, \varphi - \partial y) \geq \langle \underline{F}' - \underline{\mathcal{B}}.y, \varphi - \partial y \rangle , \quad \forall \varphi \in S(\Omega) \end{cases}$$

où l'élément $\underline{F}'$ et l'opérateur $\underline{\mathcal{B}}$ sont définis par (37) et (31).

Preuve :

Dans cette situation l'hypothèse (H1) est vérifiée dans J. SOKOLOWSKI [3], voir en appendice et on conclut en appliquant le théorème 1 de façon similaire aux exemples précédents.

COROLLAIRE 3 : L'application $t \longrightarrow y_t \circ T_t$ est dérivable à droite dans $H(\Omega)$, la dérivée Eulérienne $\dot{y}$ est donnée par

(78) $$\dot{y} = \partial y + DV.y$$

où $\partial y$ est donnée par (77)

## 8 . CARACTERISATION DE LA DERIVEE PAR RAPPORT AU DOMAINE y'

La dérivée par rapport au domaine dans la direction du champ V est

(79) $$y' = \dot{y} - \nabla y.V \qquad \text{pour les situations où } y \in H^1(\Omega)$$

(80) $$y' = \dot{y} - Dy.V$$
$$= \partial y + DV.y - Dy.V \qquad \text{pour l'élasticité plane}$$

$y'$ ainsi défini existe toujours pour les exemples précédents et est un élément de $L^2(\Omega)$ dans le cas (79), un élément de $(L^2(\Omega))^2$ dans le cas (80). Pour caractériser $y'$ on formule l'hypothèse de régularité sur le champ V :

(H2) $$\nabla y.V \in H^1(\Omega) \qquad \text{dans la situation (79)}$$
$$Dy.V \in (H^1(\Omega))^2 \qquad \text{dans la situation (80)} .$$

LEMME 9 : L'hypothèse (H2) est toujours vérifiée dans les exemples précédents si $V.n = 0$ sur $\Gamma$.

Preuve : Lorsque $V.n = 0$, l'application $t \longrightarrow \Omega_t$ est constante, c'est-à-dire $\Omega_t = \Omega$, donc $y_t = y$ et $\dot{y} = \nabla y.V$ dans la situation (79), $\dot{y} = DV.y$ dans la situation (80) ; or dans les exemples on a établi que $\dot{y}$ est un élément de $H^1(\Omega)$, ou de $(H^1(\Omega))^2$ .

<u>REMARQUE</u> : L'hypothèse (H2) est une restriction sur l'ensemble des vitesses admissibles pour lesquelles on sait caractériser $y'$ comme solution d'une inéquation variationnelle. Si l'élément $y$ est suffisamment régulier au voisinage de la frontière $\Gamma$ on montre que tous les champs sont admissibles.

On considère d'abord les situations où $y \in H^1(\Omega)$. On peut alors définir la partie convexe fermée, dépendant du champ $V$ ;

(81) $$S_V(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = \varphi - \nabla y.V , \quad \varphi \in S(\Omega)\}$$

Notons que pour tout champ $V$ vérifiant (H2) on a :

$$S_V(\Omega) - S_V(\Omega) = S(\Omega) - S(\Omega) ,$$

ainsi

(82) $$y' - \phi \in S(\Omega) - S(\Omega) , \quad \forall \phi \in S_V(\Omega) .$$

Dans les exemples précédents on a obtenu $\dot{y}$ solution d'une inequation variationnelle de la forme

(83) $$\begin{cases} \dot{y} \in S(\Omega) \\ a^o(\dot{y} , \varphi-\dot{y}) \geq \langle H(y,V) , \varphi-\dot{y} \rangle , \quad \forall \varphi \in S(\Omega) \end{cases}$$

où $H(y,V)$ est linéaire par rapport au champ $V$ et linéaire affine par rapport à $y$ , et est donné par

$$H(y,V) = F' - B.y \quad \text{en (47) et (67) et}$$

$$H(y,V) = \hat{F}' - \hat{B}.y \quad \text{en (52')} .$$

Avec la définition (79) et l'hypothèse (H2) on vérifie que $y'$ est solution de l'inequation variationnelle :

(84) $$\begin{cases} y' \in S_V(\Omega) \\ a^o(y', \phi-y') \geq G(y, V, \phi-y') , \quad \forall \phi \in S_V(\Omega) \end{cases}$$

où

(85) $$\begin{cases} G(y,\ V,\ \phi) = \ < H(V,y),\ \phi > - a^{o}(\ \nabla y.V,\ \phi) \\ \forall\ \phi\ \in\ S(\Omega) - S(\Omega)\ . \end{cases}$$

<u>LEMME 10</u> : Si le champ $V$ est tangent à la frontière $\Gamma$, c'est-à-dire

$V.n = 0$ sur $\Gamma$, alors

$$G(y,\ V,\ \phi) = 0\ ,\quad \forall\ \phi\quad S(\Omega) - S(\Omega)\ .$$

<u>Preuve</u> : avec le lemme on a $y' = 0$ et on conclut en prenant $+V$ et $-V$ dans (84)

<u>PROPOSITION 2</u> : La frontière $\Gamma$ étant supposée suffisamment régulière, il existe une distribution $g_n$ sur la frontière $\Gamma$ telle que

(86) $$\forall\ \phi \in S(\Omega) - S(\Omega)\quad ,\quad G(g,\ V,\ \phi) = < g_n(y,\phi)\ ,\ V.n >_{\mathscr{D}_1'(\Gamma)\ \times\ \mathscr{D}_1(\Gamma)}$$

où $\mathscr{D}_1(\Gamma)$ désigne l'espace des distributions vectorielles d'ordre 1 sur $\Gamma$.

$g_n$ est linéaire par rapport à $\phi$ et linéaire affine par rapport à $y$.

<u>Preuve</u> : Voir JP Zolesio [6]

<u>COROLLAIRE 4</u> : Sous l'hypothèse (H2), $y'$ ne dépend que de $V.n|_{\Gamma}$ .

<u>Preuve</u> : en utilisant le lemme l'inequation (84) s'écrit

(87) $$\begin{cases} y' \in S_V(\Omega) \\ a^{o}(y',\ \phi-y') \geq\ < g_n(y,\ \phi-y'),\ V.n >_{\mathscr{D}_1'(\Gamma)\ \times\ \mathscr{D}_1(\Gamma)} \\ \forall\ \phi \in S_V(\Omega) \end{cases}$$

<u>Orientation</u>. Nous allons caractériser la distribution $g_n$ pour un exemple. (Voir également Sokolowski et Zolesio [4].

## 9 . CARACTERISATION DE y' POUR LE PROBLEME AVEC OBSTACLE $\psi$ ET CONDITION DE DIRICHLET HOMOGENE.

La forme bilinéaire $a_t$ définie en (14) est considérée avec les termes de bord nuls, soit $b = 0$ et $d = 0$ ainsi que pour le second membre $F_t$ défini en (24') avec $p = 0$ .

La matrice $A$ étant définie en (14) et sa dérivée $A'$ en (22), avec (81) et $S(\Omega)$ défini en (47) on obtient, avec $v = V.n$ sur $\Gamma$

(88) $$\left\{\begin{aligned} S_V(\Omega) &= \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = -\frac{\partial y}{\partial n} v \quad \text{sur } \Gamma \quad , \\ &\int_\Omega < A.\nabla y,\ \nabla(\phi + \nabla(y-\psi).V) > dx + \int_c y(\phi + \nabla(y-\psi).V)dx \\ &= \int_\Omega f(\phi + \nabla(y-\psi).V)dx \quad \text{et} \quad \phi \geq 0 \quad \text{q.p. sur} \quad Z(y-\psi)\} \end{aligned}\right.$$

mais d'après Stampocchia-Brezis [5] l'hypothèse (H2) est toujours vérifiée car $y \in H^2(\Omega)$ et est solution, dans l'ouvert $\Omega - Z(y-\psi)$ de l'équation

(89) $-\mathrm{div}\ (A\ \nabla y) + C\, y = f$ , d'après Stampacchia [8] .

(90) On a $\nabla(y-\psi) = 0$ p.p. dans $Z(y-\psi)$ ainsi que $\mathrm{div}(A\ \nabla y) = 0$ , et donc la condition dans $S_V(\Omega)$ se simplifie et on obtient

(91) $$\int_\Omega (\mathrm{div}\ (A\nabla y) + f - cy)(\phi + \nabla(y-\psi).V) = 0$$

mais le premier facteur est nul sur $\Omega \setminus Z(y-\psi)$ , égal à $f - C\psi$ sur $Z(y-\psi)$ , le second facteur est égal à $\phi$ sur $Z(y-\psi)$ et donc on obtient

(92) $$\left\{\begin{aligned} &S_V(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = -\frac{\partial y}{\partial n} v \quad \text{sur } \Gamma , \\ &\int_{Z(y-\psi)} (f - C\psi)\ \phi\ dx = 0 \quad , \quad \phi \geq 0 \quad \text{q.p. sur} \quad Z(y-\psi) \end{aligned}\right.$$

L'inequation (84) caractérisant $y'$ s'écrit alors

$$y' \in S_V(\Omega)$$

(93) $$\int_\Omega < A.\ \nabla y',\ \nabla(\phi - y') > dx \ + \int_\Omega c\ y'(\phi - y')dx \geq G(y,\ V,\ \phi - y') \ , \quad \forall\ \phi \in S_V(\Omega)$$

où, $\forall\ \varphi \in S(\Omega) - S(\Omega)$ ,

(94) $$\begin{cases} G(y,\ V,\ \varphi) = \int_\Omega \operatorname{div}(fV)\varphi\ dx \ + \int_\Omega < A'\ \nabla y,\ \nabla\varphi > dx \\ + \int_\Omega \operatorname{div}\ (cV)\ y\varphi\ dx - \int_\Omega < A\ \nabla(\nabla y.V)\ ,\nabla\varphi > dx \\ \text{pour} \quad \varphi \in H^2(\Omega) \end{cases}$$

et en faisant des intégrations par parties on obtient

(95) $$G(g,\ V,\ \varphi) = \int_\Omega K(y,\varphi).V\ dx \ + \int_\Gamma g_n(y,\varphi)\ V.n\ d\gamma$$

on sait par la Proposition 2 que $K(y,\varphi) = 0$ et on ne s'intéresse qu'au terme intégral sur $\Gamma$ et on obtient, avec $v = V.n$ sur $\Gamma$ , et $\varphi \in H^1_o(\Omega)$

$$\int_\Gamma g_n(y,\varphi)\ V.n\ d\gamma = + \int_\Gamma v < A\nabla y,\ \nabla\varphi > - 2\int_\Gamma < A.n,n > \frac{\partial y}{\partial n}\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\ v\ d\gamma \ + + \int_\Gamma v\ \frac{\partial y}{\partial n}\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} < {}^*A\ n,\ n > d\gamma \quad = 0$$

car $\nabla y = \frac{\partial y}{\partial n}\ n$ , $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\ n$ , on obtient le

<u>LEMME 11</u> : $\forall\ \varphi \in H^2(\Omega) \cap \{S(\Omega) - S(\Omega)\}$ , $G(y,\ V,\ \varphi) = 0$

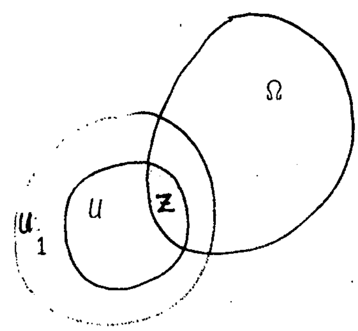
On obtient la caractérisation de $y'$ pour les champs $V$ nuls au voisinage de $Z(y-\psi)$ .

<u>THEOREME 4</u> : On suppose le champ $V$ nul dans un voisinage $\mathcal{U}_1$ de $\overline{Z(y-\psi)}$ (voisinage dans $\mathbb{R}^N$) . Pour $f$ $L^2(\Omega)$ , $y' \in H^1(\Omega)$ est solution de l'inequation variationnelle, avec $v = V.n$ sur $\Gamma$,

$$(96)\quad \left\{ \begin{array}{l} y' \in S_V(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = -\frac{\partial}{\partial n} y\, v \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad , \\ \quad \int_{Z(y-\psi)} (f - C\psi)\phi\, dx = 0 \quad , \quad \phi \geqq 0 \quad \text{q.p.} \quad \text{sur} \quad Z(y-\psi) \\ \int_\Omega ( < A.\nabla y', \nabla(\phi - y') > + C\, y'\, (\phi - y'))dx \geqq 0 \qquad \forall\, \phi \in S_V(\Omega) \end{array} \right.$$

<u>Preuve</u> : On pose $Z = Z(y-\psi)$ , $\overline{Z}$ est une partie compacte dans $\overline{\Omega}$ , et dans $\mathbb{R}^2$ , on prend $\mathcal{U}$ un ouvert dans $\mathbb{R}^N$ tels que

$$\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U} \supset \overline{Z}$$




$\eta_1$ , $\eta_2 = 1 - \eta_1$ une partition de l'unité régulière avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = 1 \quad \text{sur} \quad \mathcal{U} \\ \text{Supp}\ \eta_1 \subset \mathcal{U}_1 \end{array} \right.$$

Toute fonction $\phi \in S(\Omega) - S(\Omega) \subset H_o^1(\Omega)$ est décomposée en $\phi = \phi_1 + \phi_2$ où $\phi_i = \eta_i\, \phi$ et on a le

<u>LEMME 12</u> : $\forall\, \phi \in S(\Omega) - S(\Omega)$ il existe $\varphi_n \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ , $\varphi_n$ nulle sur $\overline{\mathcal{U}}$ , $\varphi_n \to \phi_2$ dans $H_o^1(\Omega)$ et $\varphi_n \in S(\Omega) - S(\Omega)$

<u>Preuve</u> : $\phi \in H_o^1(\Omega)$ , il existe donc $\phi_n \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ telle que $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $H_o^1(\Omega)$ et on pose $\varphi_n = \phi_n\, \eta_2 \longrightarrow \phi\eta_2 = \phi_2$ dans $H_o^1(\Omega)$ ; par ailleurs $\varphi_n \mid \overline{\mathcal{U}} = 0$ car sur $\overline{\mathcal{U}}$ $\eta_2$ est nulle et en considérant les conditions (52) qui définissent la partie $S_V(\Omega) - S_V(\Omega) = S(\Omega) - S(\Omega)$ on vérifie que $\varphi_n \in S(\Omega) - S(\Omega)$ .

D'après la proposition 2 on sait que $G(y, V, \phi)$ , pour $\phi \in S(\Omega) - S(\Omega)$, ne dépend que de $v = V.n$ sur $\Gamma$ .

Alors si le champ $V$ est donné tel que $V(0)$ est un champ dans $\mathbb{R}^2$ nul dans $\mathcal{U}_1$, pour toute fonction $\phi$ dans $S(\Omega) - S(\Omega)$ on a

$G(y, V, \phi) = G(y, V, \phi_1) + G(y, V, \phi_2)$ mais $V$ étant nul sur $\mathcal{U}_1$ on a $G(y, V, \phi_1) = 0$ car les supports de $V$ et de $\phi_1$ sont disjoints (voir l'expression intégrale de $G$ en (94) ) .

Donc
$$G(y, V, \phi) = G(y, V, \phi_2)$$
$$= \lim_{n \to \infty} G(y, V, \varphi_n)$$

où $\varphi_n$ est la suite définie par le lemme 12.

On conclut alors par le Lemme 11 avec $G(y, V, \varphi_n) = 0$ .

# APPENDICE

## ANNEXE 1

On considère d'abord $\Gamma^c$ telle que $n(x) = (1,0)$ pour $x \in \Gamma^c$. Ainsi on a l'espace de Hilbert

$$H = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in (H^1(\Omega))^2 \mid \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0 \text{ , p.p. } x \in \Gamma^o\}$$

et la partie convexe fermée

$$K = K(\Omega) = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in H \mid \varphi_1(x) \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma^c\}$$

et on considère l'inéquation variationnelle (75) pour $t = 0$ et $f \in H'$ :

$$(*) \qquad \begin{cases} P(f) \in K \quad , \\ a^o(P(f), \varphi - P(f)) \geq \langle f, \varphi - P(f) \rangle, \quad \forall \varphi \in K \end{cases}$$

On note alors $R \in \mathscr{L}(H, H^{1/2}(\Gamma^c)$ l'opérateur trace de la première composante :

$$R\varphi \doteq \varphi_1 \Big|_{\Gamma^c} \quad , \quad \forall \varphi \in H$$

Soit $H_1 = \operatorname{Ker} R$ , $H_2 = H_1^\perp$ alors $H = H_1 \oplus H_2$ et il existe l'opérateur inverse $R^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, H_2)$ avec $\mathscr{H} = R\, H_2$ , c'est-à-dire

$$= \{h \in H^{1/2}(\Gamma^c) \mid \exists\ \varphi \in H, \text{ tel que } \varphi_1 \Big|_{\Gamma^c} = h\}$$

on pose

$$((h_1, h_2))_{\mathscr{H}} = a(R^{-1}h_1, R^{-1}h_2) \quad , \quad \forall\ h_1, h_2 \in \mathscr{H}$$

et on décompose la solution de l'inequation (*) :

$$P(f) = y_1 + y_2 \qquad \text{avec } y_i \in H_i$$

où $y_1$ est la solution de l'inequation variationnelle

$$\begin{cases} y_1 \in H_1 \\ a(y_1 , \phi_1) = \langle f, \phi_1 \rangle , \quad \forall\ \phi_1 \in H_1 \end{cases}$$

et

$y_2 = R^{-1}\ \omega \in H_2$ avec $\omega \in \mathscr{H}$ solution de l'inequation variationnelle suivante :

$$(**)\quad \begin{aligned} &\omega \in K = \{h \in \mathscr{H} \mid h(x) \leq 0 ,\ \text{p.p. } x \in \Gamma^c\} \\ &((\omega, h-\omega))_{\mathscr{H}} \geq \langle f, R^{-1}(h-\omega)\rangle ,\quad \forall h \in K \end{aligned}$$

On voit aisément que la solution de l'inequation (*), $y = P(f)$ , est coniquement dérivable par rapport à $f$ dans $H'$ si et seulement si la solution de l'inequation (**) est coniquement dérivable par rapport à $f$ . Sokolowski a vérifié dans [3] que $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert ayant les propriétés :

i) $h^+ , h^- \in \mathscr{H}$ , $\forall h \in \mathscr{H}$ , où $h^+ = \max \{0,h\}$

ii) $((h^+ , h^-))_{\mathscr{H}} \leq 0$ , $\forall h \in \mathscr{H}$

iii) $\mathscr{H} \cap C_{comp}(\Gamma^c)$ est dense dans $C_{comp}(\Gamma^c)$ .

On peut alors déduire des résultats de F. Mignot [2] que la solution $\omega$ de (**) est coniquement dérivable par rapport au second membre $f$ .

Dans le cas général, avec $\Gamma^c \in C^{1,1}$ on peut transformer le champ de déplacement $\varphi$ dans la forme bilinéaire de l'élasticité plane

$$(H^1(\Omega))^2 \longrightarrow (H^1(\Omega))^2$$

$$(\psi_1 , \psi_2) \longmapsfrom (\varphi_1 , \varphi_2)$$

avec

$$\psi_1 = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2$$

$$\psi_2 = -N_2\varphi_1 + N_1\varphi_2$$

où $N$ est prolongement du champ normal sur $\Gamma$ et ainsi on obtient $n(x).\varphi(x) = \psi_1(x)$ sur $\Gamma^c$ avec $N \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^2$ et en considérant le problème dans les variables $\psi$ on est ramené à la situation précédente.

## ANNEXE 2 .

Uniforme continuité et coercitivité des formes bilinéaires $a^t$

Soit $a_t(.,.)$ une famille de formes bilinéaires uniformément continues et coercitives sur $H_o^1(\Omega_t)$ au sens suivant : il existe $\alpha > 0$ et $M$ tels que, $\forall\, t \in [0,\delta[$

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \,\|\varphi_t\|^2_{H_o^1(\Omega_t)} \leqq a_t(\varphi_t, \varphi_t) \leqq M \,\|\varphi_t\|^2_{H_o^1(\Omega_t)} \\ \forall\, \varphi_t \in H_o^1(\Omega_t) \end{cases}$$

Par changement de variable on pose $\varphi = \varphi_t \circ T_t \in H_o^1(\Omega)$ et

$$(2) \qquad a^t(\varphi,\psi) = a_t(\varphi \circ T_t^{-1}, \psi \circ T_t^{-1}) , \quad \forall\, \varphi,\psi \in H_o^1(\Omega)$$ et on obtient

$$(3) \qquad \alpha \int_\Omega < A(t)\, \nabla\varphi \,, \nabla\varphi > dx \leqq a^t(\varphi,\varphi) \leqq M \int_\Omega < A(t).\nabla\varphi, \nabla\varphi > dx$$

où $A(t)$ est la matrice symétrique

$$(4) \qquad A(t)(x) = \det(DT_t(x))\, DT_t^{-1}(x) \;.\; DT_t^{-1}(x) \;, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n$$

On suppose le champ $V$ défini sur $\mathbb{R}^n$ , $V \in C^o([0,\delta[\, , C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ , on a le

<u>LEMME</u> : Pour $\delta$ assez petit, il existe $\varepsilon$ , $0 < \varepsilon < 1$ , tel que

$\forall\, x \quad \Omega$ ,

$1-\varepsilon \leqq \det DT_t(x) \leqq 1+\varepsilon$

$1-\varepsilon \leqq \|DT_t(x)\| \;,\; \|DT_t^{-1}(x)\| \leqq 1+\varepsilon$

<u>Preuve</u> : On sait (voir J.P. Zolesio [6]) que $DT_t$ et $DT_t^{-1}$ convergent vers $Id$, lorsque $t \to 0$ , dans $C^o(\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^{n^2})$ .

On a alors pour tout $x \in \Omega$ , et $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,\delta]$

(5) $$\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \| \xi \|^2_{\mathbb{R}^n} \leqq < A(t).\xi, \xi> \leqq (1+\varepsilon)^3 \| \xi \|^2_{\mathbb{R}^n}$$

en utilisant (5) dans (3) on obtient, $\forall \varphi \in H^1_o(\Omega)$ ,

$$\alpha \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \| \varphi \|^2_{H^1_o(\Omega)} \leqq a^t(\varphi, \varphi) \leqq (1+\varepsilon)^3 M \| \varphi \|^2_{H^1_o(\Omega)}$$

Soit la

<u>PROPOSITION</u> : $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ , $V \in C^o([0,\delta[ , C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ si la famille de formes bilinéaires $a_t$ vérifie (1) ; alors, pour $\delta$ assez petit, il existe deux constantes $\alpha'$ et $M'$ , indépendantes de $t$ telles que

$$\alpha' \|\varphi\|^2_{H^1_o(\Omega)} \leqq a^t(\varphi,\varphi) \leqq M' \|\varphi\|^2_{H^1_o(\Omega)}$$

$$\forall \varphi \in H^1_o(\Omega)$$

# REFERENCES


[1] I. Hlavacek, J. Necas : On inequalities of Korn's type. Arch. Publ. Mech. Anal., 36 (1970) pp. 305-334.

[2] F. Mignot : Contrôle dans les inequations variationnelles, J. Functional Analysis, 22 (1976) .

[3] J. Sokolowski : Conical differentiability of projection on convex sets - an application to sensitivity analysis of Signorini V.I., Technical Report, Institute of Mathematics of the University of Genova (ITALY), (1981) .

[4] J. Sokolowski, J.P. Zolesio : Shape sensitivity analysis for variational inequalities, Proceedings of $X^{th}$ IFIP , Conference on Optimization. Techniques, New-York (1981), Springer Verlag (to appear).

[5] G. Stampacchia, H. Brezis : Inequations elliptiques, Bull. Soc. Math. de France, t. 86 (1968) .

[6] J.P. Zolesio : Thèse d'Etat, Université de Nice (1979) .

[7] J.P. Zolesio : The material derivative in shape optimization, in "Optimization of Distributed Parameter Structures", J. Céa and E.J. Hang eds, Sijthoff and Noordhof, (1981) . pp. 1089-1194.

[8] G. Stampacchia : Equation elliptique du second ordre à coefficients discontinus, Presses de l'Université de Montréal, (1966)

[9] A. DERIVIEUX, C. SAGUEZ, Rapport INRIA N° 57 1981 .


*********