Iterees d'applications lineaires par morceaux

A. Meritet

INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 124

ITÉRÉES D'APPLICATIONS LINÉAIRES PAR MORCEAUX

Alain MERITET

Avril 1982

ITEREES D'APPLICATIONS LINEAIRES PAR MORCEAUX

Alain MERITET

INRIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex

ABSTRACT

The n^{th} iterate is obtained by the not well-known position of the x point correlated to the iterate but by an association to the defined position with an application of $\mathbb{N}$ in a finite part included in $\mathbb{N}$. The result appears by using an explicit formula taking into account the belonging to the unit segment of this n^{th} iterate.

RESUME

La valeur de l'itération $n^{ième}$ est calculée en supposant non connue explicitement la position du point x lors des itérations mais en associant cette position à une application de $\mathbb{N}$ dans une partie finie de $\mathbb{N}$. Le résultat apparaît en utilisant une formule explicite et l'appartenance à l'intervalle unité de l'itérée à l'ordre n du point x.

ITEREES D'APPLICATIONS LINEAIRES PAR MORCEAUX

INTRODUCTION

La valeur de l'itérée $n^{\text{ième}}$ est calculée en supposant non connue explicitement la position du point x lors des itérations mais en associant cette position à une application de N dans une partie fine de N. Le résultat apparaît en utilisant une formule explicite et l'appartenance à l'intervalle unité de l'itérée à l'ordre n du point x.

On utilise en cela la notion de mesure invariante introduite par Rechard. Cette idée étant considérée dans le cadre de Dunford et Miller.

NOTATIONS

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels $I = [0,1]$, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $a \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $x = [x] + (x)$, $[x] \in \mathbb{N}$, $(x) \in I - \{1\}$. On appelle $[x]$ partie entière de x et (x) partie fractionnaire de x.

Soit $x \in I$, alors en base 3, on a :

$$x = \sum_{p=o}^{\infty} a_p \, 3^{-p}, \quad a_p \in \{0,1,2\} \tag{1}$$

Soit $d(0,1) = \{x | a_p \in \{0,1\}\}$ et $d(0,2) = \{x | a_p \in \{0,2\}\}$, si :

$$x_1 = \sum_{p=o}^{\infty} a'_p \, 3^{-p} \quad , \quad x_2 = \sum_{p=o}^{\infty} a''_p \, 3^{-p}$$

on pose :

$$x_1 \times x_2 = \sum_{p=o}^{\infty} a'_p \, a''_p$$

De plus $3^n x = [3^n x] + (3^n x)$ et d'après (1)

$$3^n x = \sum_{p=o}^{n} a_p \, 3^{n-p} + \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p \, 3^{n-p} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Notons :

$$B = \{x \in I \mid x = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \, 3^{-p}, \ a_p \in \{0,2\}\}$$

est l'ensemble triadique de Cantor. On a :

$$\frac{1}{3} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{2}{3^p} \in \mathfrak{Z}, \quad 1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{3^p} \in \mathfrak{Z}$$

Soit $\mathfrak{Z}^*$ un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un ensemble fermé non dénombrable, de dimension topologique nulle sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle.

Soit $y_i(x) = a_i x + b_i$, $i \in \mathbb{A}_2 = \{1,2,\dots,a\}$, $|a_i| = a$.

On vérifie immédiatement que :

$$y_i \circ y_j(x) = a_i \, a_j \, x + a_i \, b_j + b_i$$

$$y_k \circ y_i \circ y_j(x) = a_k \, a_i \, a_j \, x + a_k \, a_i \, b_j + a_k \, b_i + b_k$$

Soit $\mathcal{C}^{o}_{L}(I)$ l'ensemble des applications surjectives continues linéaires affinés par morceaux de I sur I à pente bornées et $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans A_2. Soit aussi $f \in \mathcal{C}^{o}_{L}(I)$, alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{a-1} y_i(x) \, I_{[\frac{a-1}{a}, \frac{i}{a})}(x) + y_a(x) \, I_{[\frac{a-1}{a}, 1]}(x) \tag{3}$$

où $I_B(x)$, $B \subset \mathbb{R}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble B. Alors on désigne par f^n l'itérée à l'ordre n de f en posant $f_\nu(x) = f(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f^{n\cdot}(x) = \coprod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$$
$$= f(\coprod_{\nu=1}^{n-1} f_\nu(x)) \qquad (4)$$

et la convention :

$$f^{1\cdot}(x) = f(x).$$

Soit alors $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{A}_2)$. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\coprod_{\nu=1}^{n.} y_{\tau(\nu)}\ (x) = y_{\tau(n)}\ (\coprod_{\nu=1}^{n-1} y_{\tau(\nu)}\ (x)) \qquad (5)$$

et la convention :

$$\coprod_{\nu=1}^{2} y_{\tau(\nu)}(x) = y_{\tau(2)} \circ y_{\tau(1)}\ (x).$$

Posons ensuite :

$$e_i(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i,\tau(\nu)} \qquad i \in \mathbb{A}_2$$

δ masse de Dirac.

Alors définissons $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{A}_2)$ de la façon suivante :

$$f(x) = y_{\tau(1)}(x)$$
$$f^{2\cdot}(x) = y_{\tau(2)}(f(x)) \qquad (6)$$
$$f^{n\cdot}(x) = y_{\tau(n)}(\coprod_{\nu=1}^{(n-1)} f(x))$$

ou en d'autre terme :

$$x \in [\frac{\tau(1)-1}{a}, \frac{\tau(1)}{a}) \text{ si } \tau(1) < a, \quad x \in [\frac{\tau(1)-1}{a}, \frac{\tau(1)}{a}] \text{ si } \tau(1) = a$$

$$f(x) \in [\frac{\tau(2)-1}{a}, \frac{\tau(2)}{a}) \text{ si } \tau(2) < a, \quad x \in [\frac{\tau(2)-1}{a}, \frac{\tau(2)}{a}] \text{ si } \tau(2) = a$$

$$f^{(n-1)\cdot}(x) \in [\frac{\tau(n-1)-1}{a}, \frac{\tau(n-1)}{a}) \text{ si } \tau(n-1)<a,$$

$$x \in [\frac{\tau(n-1)-1}{a}, \frac{\tau(n-1)}{a}] \text{ si } \tau(n-1)=a \qquad (7)$$

On en déduit en particulier :

$$\sum_{i=1}^{a} e_i(n) = n \qquad (8)$$

Et que les fonctions $e_i(n)$ sont croissantes au sens large. D'autre part, compte tenu de (3), (4), (5), (6), (7), en remplaçant $f_\nu(x)$ par sa valeur, on obtient :

$$f^{n\cdot}(x) = \coprod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$$

$$= \coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \qquad (9)$$

où τ est définie par (6) et (7).

Théorème : Soit f une fonction surjective continue linéaire affinée par morceaux de I dans I à pente bornée alors l'itérée à l'ordre n de f a pour valeur :

$$f^{n\cdot}(x) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{e_i(n)} x + \sum_{j=o}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell^{e_\ell(n)-e_\ell(n-j)}\right) b_{\tau(n-j)} \qquad (10)$$

où $\tau \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$.

En particulier, si a = 3 et $|a_i| = a$, $i \in \mathbb{A}_2$, alors :

$$|f^{n\cdot}(x) - \tfrac{1}{2}| = |(3^n x) - \tfrac{1}{2}|$$

et si a = 9 et $|a_i| = a$, $i \in \mathbb{A}_2$, alors

$$|f^{n\cdot}(x) - \tfrac{1}{2}| = |(9^n x) - \tfrac{1}{2}|$$

Lemme 1 : Supposons

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \prod_{i=1}^{a} a_i^{\varphi_i(n)} x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(k,j)}\right) b_{\mu_j(n)}$$

où :

$$\varphi_i(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$$

$$\sum_{i=1}^{a} \xi_\ell(n,j) = s_j(n) \ , \ \xi_\ell(n,j) \in \mathbb{N}, \ \ell \in A_2$$

$$s_j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$$

$$\mu_j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2), \ j \in \mathbb{A}_1 = \{0,1,\ldots,a-1\}.$$

Preuve : On effectue un raisonnement par récurrence. Supposons l'énoncée vérifiée à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, on a en appliquant l'égalité (9) :

$$\begin{aligned}
\coprod_{\nu=1}^{n+1} y_{\tau(\nu)}(x) &= y_{\tau(n+1)}\left(\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x)\right) \\
&= a_{\tau(n+1)}\left(\underset{\nu=1}{\overset{n}{}} y_{\tau(\nu)}(x)\right) + b_{\tau(n+1)} \\
&= a_{\tau(n+1)}\left[\prod_{i=1}^{a} a_i^{\varphi_i(n)} x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(nj)}\right) b_{\mu_j(n)} + b_{\tau(n+1)}\right. \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_i^{\varphi_i(n)} \quad a_{\tau(n+1)}) \ x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(n,j)} \quad a_{\tau(n+1)}\right) b_{\mu_j(n)} \\
&\qquad + b_{\tau(n+1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varphi_i(n+1)} x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n+1)=j}} \left(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(n+1,j)}\right) b_{\mu_j(n+1)}
\end{aligned}$$

ce qui détermine le raisonnement par récurrence.

Lemme 2 :

$$\begin{aligned}
&\varphi_i(n+1) = \varphi_i(n) + \delta_{i,\tau(n)}\\
&\varphi_i(1) = \delta_{i,\tau(1)}, \quad i \in \mathbb{A}_2,\ n \in \mathbb{N}^*\\
&s_o(n) = 0 \text{ et } \xi_\ell(n,0) = 0,\ n \in \mathbb{N}^*\\
&s_1(n) = 1 \text{ et } \xi_\ell(n,1) = \delta_{\ell,\tau(n)},\ n \in \mathbb{N}^*\\
&\mu_o(n) = \tau(n) \text{ et } \mu_o(1) = \tau(1) \quad ,\ n \in \mathbb{N}^*\\
&\mu_{j+1}(n+1) = \mu_j(n),\ n \in \mathbb{N}^*\\
&\xi_{\ell(n+1,j+1)} = \xi_{\ell(n,j)} + \delta_{\ell,\tau(n+1)} \quad \ell \in \mathbb{A}_2,\ n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en utilisant les identités données par la formule de récurrence à l'ordre n et itération de la formule à l'ordre n-1.

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varphi_i(n+1)}\, x + \sum_{\substack{j=o\\ s_j(n+1)=j}}^{n} \Big(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_j(n+1,j)}\Big) b_{\mu_j(n+1)}$$

$$= \prod_{i'=1}^{n} a_{i'}^{\varphi_{i'}(n)}\, a_{\tau(n+1)}\, x + \sum_{j'=o}^{n-1} \Big(\prod_{\ell'=1}^{a} a_{\ell'}^{\xi_\ell(n,j')}\, a_{\tau(n+1)}\Big) b_{\mu_j(n)} + b_{\tau(n+1)} \qquad (11)$$

On en déduit, pour les exposants de a_i :

$$\varphi_i(n+1) = \varphi_i(n) + \delta_{i,\tau(n)},\ \varphi_i(1) = \delta_{i,\tau(1)},\ i \in \mathbb{A}_2,\ n \in \mathbb{N}^* \qquad (12)$$

Pour les valeurs de ξ_o, μ_o, ξ_1 :

$$\begin{aligned}
&s_o(n) = \xi_\ell(n,o) = 0\\
&\mu_o(n+1) = \tau(n+1),\quad \mu_o(1) = \tau(1) \qquad (13)\\
&s_1(n+1) = \xi_\ell(n+1,1) = \delta_{\ell,\tau(n+1)}
\end{aligned}$$

Et finalement pour les valeurs de μ_j et ξ_j :

$$\mu_{j+1}(n+1) = \mu_j(n) \qquad (14)$$

$$\xi_\ell(n+1,j+1) = \xi_\ell(n,j) + \delta_{\ell,\tau(n+1)}. \qquad (15)$$

Lemme 3 :

$$\varphi_i(n) = e_i(n) \qquad i \in \mathbb{A}_2$$
$$\mu_j(n) = \tau(n-j) \qquad n \in \mathbb{N}^*,\ j \in \mathbb{A}_1$$
$$\xi_\ell(n,j) = e_\ell(n) - e_\ell(n-j) \qquad j \in \mathbb{A}_1,\ n \in \mathbb{N}^*, \ell \in A_2$$

Preuve : Utilisons le Lemme 2.1. d'après (12), on a :

$$\varphi_i(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i,\tau(\nu)} = e_i(n) \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Prenons $j \in \mathbb{N}_1$ alors $n-j \in \mathbb{N}_2$. Il en résulte en utilisant (14) :

$$\mu_j(n) = \mu_{j-1}(n-1) = \ldots = \mu_o(n-j) = \tau(n-j)$$

et finalement, à partir de ( ), ( ), on a en utilisant une récurrence inverse :

$$\xi_\ell(n,j) - \xi_\ell(n-1,j-1) = \delta_{\ell,\tau(n)}$$
$$\xi_\ell(n+1-j,1) - \xi_\ell(n-j,o) = \delta_{\ell,\tau(n-j+1)}$$

d'où comme $\xi_\ell(n-j,o) = 0$, on a :

$$\xi_\ell(n,j) = \sum_{\nu=n-j+1}^{n} \delta_{\ell,\tau(\nu)}$$
$$= e_\ell(n) - e_\ell(n-j).$$

Démonstrations du théorème : A partir du Lemme 1 et du Lemme 3, on obtient la formule :

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \prod_{i=1}^{a} a_i^{e_i(n)}\, x + \sum_{j=o}^{n-1} \Big(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \Big) b_{\tau(n-j)} \qquad (16)$$

Faisons alors $a = 3$, $|a_i| = a$ et $i \in \mathbb{A}_2$.

Prenons $b_1 = 0$, $b_2 = 2 \in \mathbb{N}$ et $-b_3 = 2 \in \mathbb{N}$. Il en résulte d'après (16), (18) :

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = (-1)^{e_2(n)} 3^n x + E$$

avec :

$$E = \sum_{j=o}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{3} a_\ell^{e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \in \mathbb{N}$$

D'autre part, $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in I$, il en résulte (2) :

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = (-1)^{e_2(n)} [3^n x] + (-1)^{e_2(n)} \left(3^n x\right) + E$$

Deux cas sont alors à distinguer :

i) $e_2(n)$ pair $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = E + [3^n x] + \left(3^n x\right) \in I$

1) Si $\left(3^n x\right) > 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \left(3^n x\right)$

2) Si $\left(3^n x\right) = 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

ii) $e_2(n)$ impair $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = E - [3^n x] - \left(3^n x\right) \in I$

1) Si $\left(3^n x\right) > 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1 - (3^n x)$

2) Si $\left(3^n x\right) = 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

Plus précisément, on constate dans le cas i.2) et ii.2) que si :

$\left(3^{n-1} x\right) = 3^{-1}$ soit $a_{n-1} = 1$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1$

$\left(3^{n-1} x\right) = 2.3^{-1}$ soit $a_{n-1} = 2$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 0$

On obtient alors la formule définitive à partir (9).

De même lorsque $a = 9$ et $|a_i| = a$, $i \in \mathbb{A}_2$, on a en prenant $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = -2$, $b_4 = 4$ $b_5 = -4$, $b_6 = 6$, $b_7 = -6$, $b_8 = 8$, $b_9 = -8$. Il en résulte à présent d'après (16), (18) avec :

$$e^{*}(n) = \sum_{\substack{i=1 \\ 2\nmid i}}^{n} e_i(n), \quad e^{**}(n) = \sum_{\substack{i=1 \\ 2\mid i}}^{n} e_i(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = (-1)^{e^{**}(n)}\, 9^n x + \Gamma$$

avec :

$$\Gamma = \sum_{j=o}^{n-1} \Big(\prod_{\ell=1}^{9} a_\ell^{\,e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \Big) b_{\tau(n-j)}$$

Distinguons à nouveau deux cas :

i) $e^{**}(n)$ pair $\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(n) = \Gamma + [9^n x] + \big(9^n x\big) \in I$

1) Si $\big(9^n x\big) > 0$ Alors $\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \big(9^n x\big)$

2) Si $\big(9^n x\big) = 0$ Alors $\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

ii) $e^{**}(n)$ impair $\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \Gamma - [9^n x] - \big(9^n x\big) \in I$

1) Si $\big(9^n x\big) > 0$ Alors $\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1 - \big(9^n x\big)$

2) Si $\big(9^n x\big) = 0$ Alors $\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

Plus précisément, on constate dans le cas i.2) et ii.2) que :

$$\text{si } \big(3^{n-1}x\big) = k.3^{-2} \quad k \in \mathbb{A}_2 \quad 2\nmid k \quad \text{alors } \prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1$$

$$\text{si } \big(3^{n-1}x\big) = k.3^{-2} \quad k \in \mathbb{A}_1 \quad 2\mid k \quad \text{alors } \prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1$$

On termine la démonstration en utilisant (9).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOOB J.L.
Stochashc Processes, New York, 1953

[2] DUNFORD N. and MILLER D.S.
On the ergodic theorem, Transactions of American Mathematical Society, vol. 67 (1949), pp. 217-240

[3] ITO K., MAC KEAN H.P. Jr
Diffusion Processes and their Sample Path-Springer Verlag, 1974.

[4] RECHARD O.W.
Invariant measures for many-one transformations. AMS presented September 2, 1954, Los Alamos.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique