



# Iterees d'applications lineaires par morceaux

A. Meritet

► **To cite this version:**

| A. Meritet. Iterees d'applications lineaires par morceaux. RR-0124, INRIA. 1982. <inria-00076436>

**HAL Id: inria-00076436**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076436>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

## Rapports de Recherche

N° 124

### ITÉRÉES D'APPLICATIONS LINÉAIRES PAR MORCEAUX

Alain MERITET

Avril 1982

## ITEREE D'APPLICATIONS LINEAIRES PAR MORCEAUX

Alain MERITET

INRIA

Domaine de Voluceau

Rocquencourt

B.P. 105

78153 Le Chesnay Cedex

### ABSTRACT

The  $n^{\text{th}}$  iterate is obtained by the not well-known position of the  $x$  point correlated to the iterate but by an association to the defined position with an application of  $N$  in a finite part included in  $N$ . The result appears by using an explicit formula taking into account the belonging to the unit segment of this  $n^{\text{th}}$  iterate.

### RESUME

La valeur de l'itération  $n^{\text{ième}}$  est calculée en supposant non connue explicitement la position du point  $x$  lors des itérations mais en associant cette position à une application de  $N$  dans une partie finie de  $N$ . Le résultat apparaît en utilisant une formule explicite et l'appartenance à l'intervalle unité de l'itérée à l'ordre  $n$  du point  $x$ .



## ITERÉES D'APPLICATIONS LINEAIRES PAR MORCEAUX

### INTRODUCTION

La valeur de l'itérée  $n^{\text{ième}}$  est calculée en supposant non connue explicitement la position du point  $x$  lors des itérations mais en associant cette position à une application de  $N$  dans une partie fine de  $N$ . Le résultat apparaît en utilisant une formule explicite et l'appartenance à l'intervalle unité de l'itérée à l'ordre  $n$  du point  $x$ .

On utilise en cela la notion de mesure invariante introduite par Rechar. Cette idée étant considérée dans le cadre de Dunford et Miller.

### NOTATIONS

Soit  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels  $I = [0,1]$ ,  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  alors  $x = [x] + (x)$ ,  $[x] \in \mathbb{N}$ ,  $(x) \in I - \{1\}$ . On appelle  $[x]$  partie entière de  $x$  et  $(x)$  partie fractionnaire de  $x$ .

Soit  $x \in I$ , alors en base 3, on a :

$$x = \sum_{p=0}^{\infty} a_p 3^{-p}, \quad a_p \in \{0,1,2\} \quad (1)$$

Soit  $d(0,1) = \{x | a_p \in \{0,1\}\}$  et  $d(0,2) = \{x | a_p \in \{0,2\}\}$ , si :

$$x_1 = \sum_{p=0}^{\infty} a'_p 3^{-p}, \quad x_2 = \sum_{p=0}^{\infty} a''_p 3^{-p}$$

on pose :

$$x_1 \times x_2 = \sum_{p=0}^{\infty} a'_p a''_p$$

De plus  $3^n x = [3^n x] + (3^n x)$  et d'après (1)

$$3^n x = \sum_{p=0}^n a_p 3^{n-p} + \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p 3^{n-p} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Notons :

$$B = \{x \in I \mid x = \sum_{p=1}^{\infty} a_p 3^{-p}, a_p \in \{0,2\}\}$$

est l'ensemble triadique de Cantor. On a :

$$\frac{1}{3} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{2}{3^p} \in \mathfrak{B}, \quad 1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{3^p} \in \mathfrak{B}$$

Soit  $\mathfrak{B}^*$  un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un ensemble fermé non dénombrable, de dimension topologique nulle sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle.

Soit  $y_i(x) = a_i x + b_i$ ,  $i \in A_2 = \{1, 2, \dots, a\}$ ,  $|a_i| = a$ .

On vérifie immédiatement que :

$$y_i \circ y_j(x) = a_i a_j x + a_i b_j + b_i$$

$$y_k \circ y_i \circ y_j(x) = a_k a_i a_j x + a_k a_i b_j + a_k b_i + b_k$$

Soit  $\mathcal{C}_L^0(I)$  l'ensemble des applications surjectives continues linéaires affines par morceaux de  $I$  sur  $I$  à pente bornées et  $\mathfrak{F}(\mathbb{N}^*, A_2)$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{N}^*$  dans  $A_2$ . Soit aussi  $f \in \mathcal{C}_L^0(I)$ , alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{a-1} y_i(x) I_{\left[\frac{a-1}{a}, \frac{i}{a}\right]}(x) + y_a(x) I_{\left[\frac{a-1}{a}, 1\right]}(x) \quad (3)$$

où  $I_B(x)$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $B$ . Alors on désigne par  $f^n$  l'itérée à l'ordre  $n$  de  $f$  en posant  $f_v(x) = f(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{aligned}
 f^{n \cdot}(x) &= \prod_{v=1}^n f_v(x) \\
 &= f\left(\prod_{v=1}^{n-1} f_v(x)\right)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

et la convention :

$$f^{1 \cdot}(x) = f(x).$$

Soit alors  $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{A}_2)$ . Posons pour  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = y_{\tau(n)}\left(\prod_{v=1}^{n-1} y_{\tau(v)}(x)\right) \tag{5}$$

et la convention :

$$\prod_{v=1}^2 y_{\tau(v)}(x) = y_{\tau(2)} \circ y_{\tau(1)}(x).$$

Posons ensuite :

$$e_i(n) = \sum_{v=1}^n \delta_{i, \tau(v)} \quad i \in \mathbb{A}_2$$

$\delta$  masse de Dirac.

Alors définissons  $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{A}_2)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= y_{\tau(1)}(x) \\
 f^{2 \cdot}(x) &= y_{\tau(2)}(f(x)) \\
 f^{n \cdot}(x) &= y_{\tau(n)}\left(\prod_{v=1}^{n-1} f(x)\right)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

ou en d'autre terme :

$$\begin{aligned}
 x \in \left[\frac{\tau(1)-1}{a}, \frac{\tau(1)}{a}\right) \text{ si } \tau(1) < a, & \quad x \in \left[\frac{\tau(1)-1}{a}, \frac{\tau(1)}{a}\right] \text{ si } \tau(1) = a \\
 f(x) \in \left[\frac{\tau(2)-1}{a}, \frac{\tau(2)}{a}\right) \text{ si } \tau(2) < a, & \quad x \in \left[\frac{\tau(2)-1}{a}, \frac{\tau(2)}{a}\right] \text{ si } \tau(2) = a
 \end{aligned}$$

$$f^{(n-1)}(x) \in \left[ \frac{\tau(n-1)-1}{a}, \frac{\tau(n-1)}{a} \right) \text{ si } \tau(n-1) < a,$$

$$x \in \left[ \frac{\tau(n-1)-1}{a}, \frac{\tau(n-1)}{a} \right] \text{ si } \tau(n-1) = a \quad (7)$$

On en déduit en particulier :

$$\sum_{i=1}^a e_i(n) = n \quad (8)$$

Et que les fonctions  $e_i(n)$  sont croissantes au sens large. D'autre part, compte tenu de (3), (4), (5), (6), (7), en remplaçant  $f_\nu(x)$  par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} f^{n \cdot}(x) &= \prod_{\nu=1}^n f_\nu(x) \\ &= \prod_{\nu=1}^n y_{\tau(\nu)}(x) \end{aligned} \quad (9)$$

où  $\tau$  est définie par (6) et (7).

Théorème : Soit  $f$  une fonction surjective continue linéaire affinée par morceaux de  $I$  dans  $I$  à pente bornée alors l'itérée à l'ordre  $n$  de  $f$  a pour valeur :

$$f^{n \cdot}(x) = \prod_{i=1}^n a_i^{e_i(n)} x + \sum_{j=0}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^n a_\ell^{e_\ell(n) - e_\ell(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \quad (10)$$

où  $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$ .

En particulier, si  $a = 3$  et  $|a_i| = a$ ,  $i \in \mathbb{A}_2$ , alors :

$$\left| f^{n \cdot}(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| (3^n x) - \frac{1}{2} \right|$$

et si  $a = 9$  et  $|a_i| = a$ ,  $i \in \mathbb{A}_2$ , alors

$$\left| f^{n \cdot}(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| (9^n x) - \frac{1}{2} \right|$$

Lemme 1 : Supposons

$$\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = \prod_{i=1}^a \varphi_i(n) x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^a \alpha_{\ell}^{\xi_{\ell}(k,j)} \right) b_{\mu_j(n)}$$

où :

$$\varphi_i(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, A_2)$$

$$\sum_{i=1}^a \xi_{\ell}(n,j) = s_j(n), \quad \xi_{\ell}(n,j) \in \mathbb{N}, \quad \ell \in A_2$$

$$s_j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, A_2)$$

$$\mu_j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, A_2), \quad j \in A_1 = \{0, 1, \dots, a-1\}.$$

Preuve : On effectue un raisonnement par récurrence. Supposons l'énoncée vérifiée à l'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a en appliquant l'égalité (9) :

$$\begin{aligned} \prod_{v=1}^{n+1} y_{\tau(v)}(x) &= y_{\tau(n+1)} \left( \prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \right) \\ &= a_{\tau(n+1)} \left( \prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \right) + b_{\tau(n+1)} \\ &= a_{\tau(n+1)} \left[ \prod_{i=1}^a \varphi_i(n) x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^a \alpha_{\ell}^{\xi_{\ell}(nj)} \right) b_{\mu_j(n)} \right] + b_{\tau(n+1)} \\ &= \prod_{i=1}^a \varphi_i(n) a_{\tau(n+1)} x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^a \alpha_{\ell}^{\xi_{\ell}(n,j)} \right) a_{\tau(n+1)} b_{\mu_j(n)} \\ &\quad + b_{\tau(n+1)} \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} \varphi_i(n+1) x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n+1)=j}}^a \left( \prod_{\ell=1}^a \alpha_{\ell}^{\xi_{\ell}(n+1,j)} \right) b_{\mu_j(n+1)} \end{aligned}$$

ce qui détermine le raisonnement par récurrence.



Lemme 2 :

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(n+1) &= \varphi_i(n) + \delta_{i,\tau(n)} \\
 \varphi_i(1) &= \delta_{i,\tau(1)}, \quad i \in \mathbb{A}_2, \quad n \in \mathbb{IN}^* \\
 s_0(n) &= 0 \text{ et } \xi_\ell(n,0) = 0, \quad n \in \mathbb{IN}^* \\
 s_1(n) &= 1 \text{ et } \xi_\ell(n,1) = \delta_{\ell,\tau(n)}, \quad n \in \mathbb{IN}^* \\
 \mu_0(n) &= \tau(n) \text{ et } \mu_0(1) = \tau(1), \quad n \in \mathbb{IN}^* \\
 \mu_{j+1}(n+1) &= \mu_j(n), \quad n \in \mathbb{IN}^* \\
 \xi_\ell(n+1,j+1) &= \xi_\ell(n,j) + \delta_{\ell,\tau(n+1)} \quad \ell \in \mathbb{A}_2, \quad n \in \mathbb{IN}^*
 \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en utilisant les identités données par la formule de récurrence à l'ordre  $n$  et itération de la formule à l'ordre  $n-1$ .

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varphi_i(n+1)} x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n+1)=j}}^n \left( \prod_{\ell=1}^a a_\ell^{\xi_\ell(n+1,j)} \right) b_{\mu_j(n+1)} \\
 = \prod_{i'=1}^n a_{i'}^{\varphi_{i'}(n)} a_{\tau(n+1)} x + \sum_{j'=0}^{n-1} \left( \prod_{\ell'=1}^a a_{\ell'}^{\xi_{\ell'}(n,j')} a_{\tau(n+1)} \right) b_{\mu_{j'}(n)} + b_{\tau(n+1)} \quad (11)
 \end{aligned}$$

On en déduit, pour les exposants de  $a_i$  :

$$\varphi_i(n+1) = \varphi_i(n) + \delta_{i,\tau(n)}, \quad \varphi_i(1) = \delta_{i,\tau(1)}, \quad i \in \mathbb{A}_2, \quad n \in \mathbb{IN}^* \quad (12)$$

Pour les valeurs de  $\xi_0, \mu_0, \xi_1$  :

$$\begin{aligned}
 s_0(n) &= \xi_\ell(n,0) = 0 \\
 \mu_0(n+1) &= \tau(n+1), \quad \mu_0(1) = \tau(1) \\
 s_1(n+1) &= \xi_\ell(n+1,1) = \delta_{\ell,\tau(n+1)}
 \end{aligned} \quad (13)$$

Et finalement pour les valeurs de  $\mu_j$  et  $\xi_j$  :

$$\mu_{j+1}(n+1) = \mu_j(n) \quad (14)$$

$$\xi_\ell(n+1,j+1) = \xi_\ell(n,j) + \delta_{\ell,\tau(n+1)}. \quad (15)$$

Lemme 3 :

$$\begin{aligned} \varphi_i(n) &= e_i(n) & i \in A_2 \\ \mu_j(n) &= \tau(n-j) & n \in \mathbb{N}^*, j \in A_1 \\ \xi_\ell(n,j) &= e_\ell(n) - e_\ell(n-j) & j \in A_1, n \in \mathbb{N}^*, \ell \in A_2 \end{aligned}$$

Preuve : Utilisons le Lemme 2.1. d'après (12), on a :

$$\varphi_i(n) = \sum_{v=1}^n \delta_{i,\tau(v)} = e_i(n) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Prenons  $j \in \mathbb{N}_1$  alors  $n-j \in \mathbb{N}_2$ . Il en résulte en utilisant (14) :

$$\mu_j(n) = \mu_{j-1}(n-1) = \dots = \mu_0(n-j) = \tau(n-j)$$

et finalement, à partir de ( ), ( ), on a en utilisant une récurrence inverse :

$$\begin{aligned} \xi_\ell(n,j) - \xi_\ell(n-1,j-1) &= \delta_{\ell,\tau(n)} \\ \xi_\ell(n+1-j,1) - \xi_\ell(n-j,0) &= \delta_{\ell,\tau(n-j+1)} \end{aligned}$$

d'où comme  $\xi_\ell(n-j,0) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \xi_\ell(n,j) &= \sum_{v=n-j+1}^n \delta_{\ell,\tau(v)} \\ &= e_\ell(n) - e_\ell(n-j). \end{aligned}$$

Démonstrations du théorème : A partir du Lemme 1 et du Lemme 3, on obtient la formule :

$$\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = \prod_{i=1}^a a_i^{e_i(n)} x + \sum_{j=0}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^a a_\ell^{e_\ell(n) - e_\ell(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \quad (16)$$

Faisons alors  $a = 3$ ,  $|a_i| = a$  et  $i \in A_2$ .

Prenons  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 2 \in \mathbb{N}$  et  $-b_3 = 2 \in \mathbb{N}$ . Il en résulte d'après (16), (18) :

$$\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = (-1)^{e_2(n)} 3^n x + E$$

avec :

$$E = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^3 a_{\ell}^{e_{\ell}(n) - e_{\ell}(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \in \mathbb{N}$$

D'autre part,  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \in I$ , il en résulte (2) :

$$\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = (-1)^{e_2(n)} [3^n x] + (-1)^{e_2(n)} \binom{3^n x}{3} + E$$

Deux cas sont alors à distinguer :

i)  $e_2(n)$  pair  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = E + [3^n x] + \binom{3^n x}{3} \in I$

1) Si  $\binom{3^n x}{3} > 0$  alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = \binom{3^n x}{3}$

2) Si  $\binom{3^n x}{3} = 0$  alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \in F_r(I)$

ii)  $e_2(n)$  impair  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = E - [3^n x] - \binom{3^n x}{3} \in I$

1) Si  $\binom{3^n x}{3} > 0$  alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = 1 - \binom{3^n x}{3}$

2) Si  $\binom{3^n x}{3} = 0$  alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \in F_r(I)$

Plus précisément, on constate dans le cas i.2) et ii.2) que si :

$$\binom{3^{n-1} x}{3} = 3^{-1} \text{ soit } a_{n-1} = 1 \text{ alors } \prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = 1$$

$$\binom{3^{n-1} x}{3} = 2 \cdot 3^{-1} \text{ soit } a_{n-1} = 2 \text{ alors } \prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = 0$$

On obtient alors la formule définitive à partir (9).

De même lorsque  $a = 9$  et  $|a_i| = a$ ,  $i \in \mathbb{A}_2$ , on a en prenant  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 2$ ,  $b_3 = -2$ ,  $b_4 = 4$ ,  $b_5 = -4$ ,  $b_6 = 6$ ,  $b_7 = -6$ ,  $b_8 = 8$ ,  $b_9 = -8$ . Il en résulte à présent d'après  $(1_6)$ ,  $(1_8)$  avec :

$$e^*(n) = \sum_{i=1}^n e_i(n), \quad e^{**}(n) = \sum_{\substack{i=1 \\ 2|i}}^n e_i(n)$$

$$\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = (-1)^{e^{**}(n)} 9^{n_x} + \Gamma$$

avec :

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \prod_{\ell=1}^9 a_{\ell}^{e_{\ell}(n) - e_{\ell}(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)}$$

Distinguons à nouveau deux cas :

i)  $e^{**}(n)$  pair  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(n) = \Gamma + [9^{n_x}] + (9^{n_x}) \in I$

1) Si  $(9^{n_x}) > 0$  Alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = (9^{n_x})$

2) Si  $(9^{n_x}) = 0$  Alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \in F_r(I)$

ii)  $e^{**}(n)$  impair  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = \Gamma - [9^{n_x}] - (9^{n_x}) \in I$

1) Si  $(9^{n_x}) > 0$  Alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = 1 - (9^{n_x})$

2) Si  $(9^{n_x}) = 0$  Alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) \in F_r(I)$

Plus précisément, on constate dans le cas i.2) et ii.2) que :

si  $(3^{n-1}_x) = k.3^{-2}$   $k \in \mathbb{A}_2$   $2 \nmid k$  alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = 1$

si  $(3^{n-1}_x) = k.3^{-2}$   $k \in \mathbb{A}_1$   $2 | k$  alors  $\prod_{v=1}^n y_{\tau(v)}(x) = 1$

On termine la démonstration en utilisant (9).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DOOB J.L.  
Stochastic Processes, New York, 1953
  
- [2] DUNFORD N. and MILLER D.S.  
On the ergodic theorem, Transactions of American Mathematical Society, vol. 67 (1949), pp. 217-240
  
- [3] ITO K., MAC KEAN H.P. Jr  
Diffusion Processes and their Sample Path-Springer Verlag, 1974..
  
- [4] RECHARD O.W.  
Invariant measures for many-one transformations. AMS presented September 2, 1954, Los Alamos.

