Loi d'une variable aléatoire à valeurs dans R+ réalisant le minimum des moments d'ordre supérieur à deux lorsque les deux premiers sont fixes

Marek Kowalowka, Raymond Marie

IRIA

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 114

LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE À VALEURS DANS $\mathbb{R}^+$ RÉALISANT LE MINIMUM DES MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR À DEUX LORSQUE LES DEUX PREMIERS SONT FIXES

Marek KOWALOWKA
Raymond MARIE

Janvier 1982

LOI D'UNE VARIABLE ALEATOIRE A VALEUR DANS $\mathbb{R}^+$ REALISANT LE MINIMUM DES MOMENTS D'ORDRE SUPERIEUR A DEUX LORSQUE LES DEUX PREMIERS SONT FIXES

par

Marek KOWALOWKA* et Raymond MARIE**

Publication n° 157 - Décembre 1981 - 8 pages

RESUME

On s'intéresse à la famille des lois de probabilité des variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^+$. On détermine une loi qui réalise le minimum des moments d'ordre supérieur à deux lorsque les deux premiers sont fixés. On montre aussi que cette loi réalise le minimum du coefficient d'asymétrie pour un coefficient de variation fixé et on détermine ce minimum. On discute du choix d'un modèle lorsque la loi n'est connue que par ses deux ou trois premiers moments.

ABSTRACT

We consider the family of probability distribution functions (PDF) of random variables with values in $\mathbb{R}^+$. We determine a PDF which realizes the minimum of the n^{th} moments, $n = 3,4,...$ when the first two are given. We show that the same PDF also realizes the minimum of the coefficient of asymmetry for a given squared coefficient of variation. This minimum is determined. We also discuss the choice of a model when only the first two or three moments of a random variable are known.

* Polish Academy of Sciences, Department of Complex Automation Systems, 44-100 GLIWICE, ul. Baltycka 5 - Poland.

** IRISA/INRIA Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex - France

Secrétariat de Rédaction : Melle F. Moinet - IRISA - Lab. Informatique
UER Mathématiques et Informatique
IRISA - Campus de Beaulieu -

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L.A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

LOI D'UNE VARIABLE ALEATOIRE A VALEUR DANS

$\mathbb{R}^+$ REALISANT LE MINIMUM DES MOMENTS D'ORDRE

SUPERIEUR A DEUX LORSQUE LES DEUX PREMIERS SONT FIXES

INTRODUCTION ET NOTATIONS

On considère ici la famille des lois de probabilité des variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^+$. De telles variables aléatoires servent notamment à modéliser des temps de réalisation de processus.

Une étude antérieure ([1]) nous a montré que, dans un modèle de file d'attente, certaines performances d'un serveur de loi Cox-2 sont, à dispersion égale, d'autant moins bonnes que l'asymétrie de la loi de probabilité du temps de service est plus faible. Plus précisément, soit deux serveurs S_1 et S_2 de loi Cox-2, de mêmes moyenne et variance, et tels que le coefficient d'asymétrie de la loi de S_1 soit plus faible que celui de la loi de S_2. Considérons des caractéristiques telle la "probabilité asymptotique que le nombre de clients dans le système à un instant quelconque soit supérieur à n" ou encore la "probabilité asymptotique pour que l'attente d'un client quelconque soit supérieure à t". Alors, si on compare les performances de S_1 et de S_2 dans le même environnement, celles de S_1 sont moins bonnes que celles de S_2. En fait, cette constatation a constitué la motivation de l'étude présente.

Dans ce rapport, nous déterminons une loi qui réalise le minimum des moments d'ordre supérieur à deux lorsque les deux premiers sont fixés. Nous montrons aussi que cette loi réalise le minimum du coefficient d'asymétrie pour un coefficient de variation fixé et nous déterminons ce minimum.

Nous introduisons maintenant quelques notations. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Relativement à X, on note :

$f(x)$: la densité de probabilité

m_i : le moment d'ordre i

μ_i : le moment centré d'ordre i

c : le carré du coefficient de variation

γ : le coefficient d'asymétrie.

On rappelle qu'on a, par définition :

$$c \triangleq \frac{\mu_2}{m_1^2} \quad , \quad \gamma \triangleq \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

On note $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble des lois de probabilité des variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^+$. $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$ représente le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}$ tels que les deux premiers moments m_1 et m_2 soient respectivement égaux à $\bar{m}_1$ et $\bar{m}_2$. De la même façon, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(c)$ représente le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}$ tels que le carré du coefficient de variation soit égal à c.

Introduisons une loi particulière de X que nous appellerons par la suite loi bivalente et que nous notons P_B ; cette loi est définie comme suit :

$$X = \begin{cases} a & \text{avec la probabilité } q \\ b & \text{avec la probabilité } (1-q) \end{cases}$$

avec $b \geq a$

Le sous-ensemble $\mathcal{P}_B$ des lois P_B contient lui-même le sous-ensemble $\mathcal{P}^*$ des lois (notées P^*) telles que $a = 0$. Pour un couple donné $(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$, il existe une loi unique $P^*(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$ ayant ces deux premiers moments ; ses paramètres s'obtiennent de façon immédiate :

$$b = \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} \quad , \quad q = 1 - \frac{\bar{m}_1^2}{\bar{m}_2}$$

<u>LEMME I</u>

Si X est une variable aléatoire à valeur sur $\mathbb{R}^+$, alors ses moments vérifient les inégalités

$$m_n^2 \leq m_k\, m_{2n-k} \quad , \quad k=0,1,\ldots,n \ ; \qquad n=1,2,\ldots$$

<u>Preuve</u> :

Soit g et h 2 fonctions numériques à valeur sur $\mathbb{R}^+$. D'après l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\left[\int_0^{\infty} g(x)\ h(x)\ dx\right]^2 \leqslant \int_0^{\infty} g^2(x)\ dx \int_0^{\infty} h^2(x)\ dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, et $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, on pose

$$g^2(x) = x^k\ f(x)$$

$$h^2(x) = x^{2n-k}\ f(x)$$

Comme $f(x)$ est une densité de probabilité et comme x prend ses valeurs sur $\mathbb{R}^+$, ceci entraîne :

$$g(x)\ h(x) = x^n\ f(x)$$

Dans ce cas, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\left[\int_0^{\infty} x^n\ f(x)\ dx\right]^2 \leqslant \int_0^{\infty} x^k\ f(x)\ dx \int_0^{\infty} x^{2n-k}\ f(x)\ dx$$

Soit encore :

$$m_n^2 \leqslant m_k - m_{2n-k}$$

ce qui correspond au résultat recherché.

Dans le cas où k=n, on a trivialement l'égalité.

<u>LEMME II</u>

Si X suit une loi P^*, on a les égalités strictes :

$$m_n^2 = m_k \cdot m_{2n-k}\ ,\quad \forall k=1,2,\ldots,n\ ;\quad n=1,2,\ldots$$

<u>Preuve</u> :

Si $\overline{m}_1$ est l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X de loi P^*, on a :

$$b = \frac{\overline{m}_1}{1-q}$$

et donc

$$m_\ell = \bar{m}_1^\ell \frac{1}{(1-q)^{\ell-1}} \quad , \quad \ell=1,2,\ldots$$

Ce qui entraîne immédiatement le résultat précédent.

THEOREME I

Soit P un élément quelconque de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$, et $m_i(P)$ le moment d'ordre i de la variable aléatoire de loi P, quelque soit $n > 2$, on a :

$$\underset{P \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(\bar{m}_1,\bar{m}_2)}{Inf} m_n(P) = m_n(P^*(\bar{m}_1,\bar{m}_2))$$

Preuve :

D'après le lemme I, pour tout élément $P \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$, on a :

$$m_{n+1}(P) \geq \frac{m_n^2(P)}{m_{n-1}(P)} \qquad n=2,3,\ldots$$

Ce qui entraîne

$$m_{n+1}(P) \geq \frac{\bar{m}_2^n}{\bar{m}_1^{n-1}} \qquad n=2,3,\ldots$$

Or, d'après le lemme II, on a pour la loi $P^*(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$:

$$m_{n+1}(P^*) = \frac{m_n^2(P^*)}{m_{n-1}(P^*)} \qquad n=2,3,\ldots$$

Ce qui entraine

$$m_{n+1}(P^*) = \frac{\bar{m}_2^n}{\bar{m}_1^{n-1}} \qquad n=2,3,\ldots \qquad (a)$$

Ce qui achève la démonstration.

Remarque :

D'après le lemme I, les données $\bar{m}_1$ et $\bar{m}_2$ vérifieront l'inégalité :

$$\bar{m}_2 \geq \bar{m}_1^2$$

Dans le cas particulier où $\bar{m}_2 = \bar{m}_1^2$, la loi $P^*(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$ est la loi déterministe :

$X = \bar{m}_1$ avec probabilité 1

Dans ce cas, on a aussi les égalités strictes :

$$m_{2n} = m_n^2 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

c'est à dire que toutes les inégalités du lemme I sont des égalités strictes pour la loi déterministe.

Autrement dit, la loi déterministe réalise le minimum des moments d'ordre supérieur à un sur $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(\bar{m}_1)$.

Par contre, pour le cas général où $\bar{m}_2 > \bar{m}_1^2$, on a pour la loi $P^*(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$, les inégalités strictes :

$$m_{2n} > m_n^2 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

ceci se déduit immédiatement de la relation (a).

<u>THEOREME II</u>

Soit P un élément de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(c)$ *; on a :*

$$\operatorname*{Inf}_{P\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(c)} \gamma(P) = \frac{c-1}{\sqrt{c}}$$

l'Inf est réalisé pour tout $P \in \mathcal{P}^*(c)$.

<u>Preuve</u> :

Pour toute loi P, on a par définition

$$\gamma(P) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

Soit

$$\mu_2^{3/2}\,\gamma(P) = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

D'après le lemme I, on a :

$$m_3 \geqslant \frac{m_2^2}{m_1}$$

ce qui entraîne

$$\gamma(P) \geq \frac{\mu_2^{1/2}}{m_1} - \frac{m_1}{\mu_2^{1/2}}$$

Si $P \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(c)$, alors, par définition :

$$\mu_2^{1/2} = m_1 \ c^{1/2}$$

D'où

$$\gamma(P) \geq \frac{c-1}{\sqrt{c}} \quad , \quad \forall P \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^+}(c)$$

D'après le lemme II, si $P \in \mathcal{P}^*(x)$, on a

$$m_3 = \frac{m_2^2}{m_1}$$

et donc $\gamma(P) = \dfrac{c-1}{\sqrt{c}} \quad \forall P \in \mathcal{P}^*(c)$

ce qui achève la démonstration.

Les paramètres b et q de la loi P^* qui a une moyenne $\bar{m}_1$ et un carré du coefficient de variation c sont obtenus facilement :

$$q = \frac{c}{1+c} \quad , \quad b = \bar{m}_1 (1+c)$$

<u>Remarque</u> :

Il est montré dans [2] que, pour un couple $(\bar{m}_1,\bar{m}_2)$ donné, il existe toujours une loi P_B telle que son coefficient d'asymétrie γ soit égal à une valeur prise arbitrairement sur l'intervalle $\left[\frac{c-1}{\sqrt{c}}, +\infty\right[$ et telle que ses deux premiers moments soient égaux respectivement à $\bar{m}_1$ et $\bar{m}_2$.

On déduit alors du théorème précédent que pour toute loi P d'une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^+$, il existe une loi P_B dont les trois premiers moments sont égaux aux trois premiers moments de la loi P.

CONCLUSIONS

La loi bivalente se simule très facilement et peut se modéliser relativement bien dans un modèle analytique. Compte tenu des résultats précédents, il nous paraît opportun de l'utiliser pour modéliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^+$ dont on connaît uniquement les trois premiers moments.

Si on s'intéresse à la modélisation d'un processus mettant en évidence un phénomène d'attente et si le processus de service, défini comme une loi de probabilité de la "durée de service" n'est identifié que par les deux premiers moments de cette loi de probabilité, alors il semble intéressant d'utiliser une loi P^*. En effet, par rapport au sous-ensemble $\mathcal{P}_B$, c'est avec la loi P^* (i.e. l'élément de $\mathcal{P}_B$ qui réalise le minimum du coefficient d'asymétrie) que les performances du service seront les moins bonnes. Et au niveau de la modélisation il est intéressant d'obtenir des résultats pessimistes par rapport à ce que donnera la réalité.

REFERENCES

[1] R. MARIE et BERE : "Sur l'utilisation de la loi Cox-2 comme loi de service dans une file d'attente". Rapport de Recherche IRISA (à paraître).

[2] B. BERE "Sur l'influence du moment d'ordre 3 sur les files d'attente à loi de services générales", Thèse de 3e cycle, Université de Rennes, France, Décembre 1981.