Comportement limite des solutions de certains problèmes mixtes pour des équations paraboliques

A. Damlamian, T.T. Li

IRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 61

COMPORTEMENT LIMITÉ DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES MIXTES POUR DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES

Alain DAMLAMIAN
LI TA-TSIEN

Avril 1981

COMPORTEMENT LIMITE DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLEMES MIXTES POUR DES EQUATIONS PARABOLIQUES

-II-

Alain DAMLAMIAN

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex (France)
"Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 169"

et

LI Ta-tsien

Collège de France, 75231 Paris cedex 05 (France)
et
I. N. R. I. A. 78150 LE CHESNAY
et
Université Fudan, Shangai (Chine)

Janvier 1981

COMPORTEMENT LIMITE DES SOLUTIONS DE CERTAINS
PROBLEMES MIXTES POUR DES EQUATIONS PARABOLIQUES

Alain DAMLAMIAN

et

LI Ta - Tsien

RESUME : On considère l'approximation (par excision d'un cylindre à base étoilée de diamètre tendant vers zéro) d'un problème parabolique avec second membre singulier du type suivant :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = v(z,t)\delta(x) & \text{dans} \quad \mathcal{O}_x \times G_z \times (0,T) \\ y = 0 \quad \text{sur la frontière parabolique.} \end{cases}$$

Deux autres problèmes associés sont étudiés et les résultats sont appliqués pour démontrer la convergence du contrôle optimal approché vers la solution du problème de contrôle optimal associé à (I).

ABSTRACT : An approximation by excision (of a cylinder with small star-shaped base) for the following parabolic problem is considered :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = v(z,t)\,\delta(x) & \text{in} \quad \mathcal{O}_x \times G_x \times (0,T) \\ y = 0 \quad \text{on the parabolic boundary.} \end{cases}$$

Two other associated problems are studied with respect to excision and the results are applied to prove the convergence of the approximate optimal controls to the solution of the optimal control problem associated with (I).

---

§ 1 Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de la forme $\Omega = \mathcal{O} \times G$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et contenant l'origine, et G est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^m$. La variable dans $\mathcal{O}$ sera notée x, celle dans G z. On désigne par Q le cylindre $\Omega \times (0,T)$, où T est un réel positif fixé. On note :

$$\Gamma = \partial\mathcal{O}, \quad \Sigma = \Gamma \times \overline{G} \times (0,T) \ , \ \Xi = \overline{\mathcal{O}} \times \partial\, G \times (0,T) \ .$$

La frontière latérale de Q est donc $\Sigma \cup \Xi$, noté $\partial_L\, Q$.

Soit $A = A_x + A_z$ un opérateur elliptique du deuxième ordre donné par

$$(1.1) \qquad A_x = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) ,$$

$$(1.2) \qquad A_z = - \sum_{k,\ell=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(b_{k\ell}(z) \frac{\partial}{\partial z_\ell}\right) ,$$

avec les hypothèses suivantes :

(1.3) $\quad a_{ij}$ lipschitziens sur $\mathcal{O}$ pour tout (i,j) ,

(1.4) $\quad b_{k\ell}$ lipschitziens sur G pour tout (k,ℓ) ,

(1.5) il existe α positif tel que pour tout x de $\mathcal{O}$ et ξ de $\mathbb{R}^n$ on ait :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq \alpha\, |\xi|^2$$

et pour tout z de G et tout ξ de $\mathbb{R}^m$ on ait :

$$\sum_{k,\ell=1}^{m} b_{k\ell}(z)\, \xi_k\, \xi_\ell \geq \alpha\, |\xi|^2 \ .$$

On s'intéresse alors à l'approximation par excision (cf.[2] [3]) du problème suivant :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = v(z,t)\ \delta\ (x) \text{ dans } Q \ (\text{où } v \in L^2(G\times(0,T)), \\[2ex] y = o \text{ sur } \partial_L\, Q \ , \\[2ex] y(x,\ z,\ o) = o \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Le problème (I) admet une solution unique dans $L^2(Q)$ par transposition pour $n \leq 3$ grâce à la formule de Green suivante :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \forall \Psi \in L^2(Q) , \\ \int_Q y \, \Psi \, dx \, dz \, dt = \int_G \int_0^T \varphi(o,z,t) \, v(z,t) \, dz \, dt , \end{cases}$$

où φ est la solution forte du problème suivant dans lequel A^* est l'adjoint formel de A :

$$(II) \quad \begin{cases} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A^* \varphi = \Psi \text{ dans } Q \ (\Psi \in L^2(Q)) , \\ \varphi = o \text{ sur } \partial_L Q , \\ \varphi \ (x,z,T) = o \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit B_ε un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathcal{O}$, de la forme

(1.7) $B_\varepsilon = \{ x = r \, s, \ s \in S$ sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, $r \in [o,\varepsilon \, R_\varepsilon(s) \ ) \}$,

où R_ε est une fonction lipschitzienne sur la sphère unité S vérifiant de plus, uniformément en ε positif voisin de zéro :

$$(1.8) \quad \begin{cases} 0 < a_1 \leq R_\varepsilon \ (s) \leq a_2 , \\ \| R_\varepsilon \|_{\text{Lips } (S)} \leq b, \end{cases}$$

où a_1, a_2 et b sont indépendants de ε.

On pose : $\quad \mathcal{O}_\varepsilon = \mathcal{O} \setminus \overline{B}_\varepsilon$, $\Omega_\varepsilon = \mathcal{O}_\varepsilon \times G$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$

$$Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T) \ , \ \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times \overline{G} \times (0,T)$$

et $\quad \Xi_\varepsilon = \overline{\mathcal{O}}_\varepsilon \times \partial G \times (0,T)$.

L'approximation choisie pour (I) est

$$
(\mathrm{I}_\varepsilon)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + A y_\varepsilon = o \text{ dans } Q_\varepsilon \,, \\ y_\varepsilon = C_\varepsilon(z,t) \text{ fonction inconnue de } (z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon \text{ et} \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}}\, d\sigma = v_\varepsilon(z,t) \text{ p.p. } (z,t) \in G\times(0,T) \,, \\ y_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon \,, \\ y_\varepsilon(x,z,o) = o \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \,, \end{cases}
$$

où v_ε est donné dans $L^2\ (G\times(0,T))$ et où $\dfrac{\partial}{\partial \nu_{A_x}}$ désigne la dérivée conormale associée à A_x c'est à dire

$$
(1.9)\qquad \frac{\partial}{\partial \nu_{A_x}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x)\ \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \,,
$$

où $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots \nu_n)$ est la normale unité à Γ_ε dirigée vers l'intérieur de B_ε .

Le problème (I_ε) admet une solution variationnelle unique pour v donné dans $L^2\ (G \times (0,T))$ et admet aussi un problème adjoint :

$$
(\mathrm{II}_\varepsilon)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} + A^*\, \varphi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon \text{ dans } Q_\varepsilon \ (\Psi_\varepsilon \text{ donné dans } L^2(Q_\varepsilon)) \,, \\ \varphi_\varepsilon = d_\varepsilon\ (z,t) \text{ fonction inconnue de } (z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon \text{ et} \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*_x}}\, d\sigma = o \text{ p.p. } (z,t) \in G \times (0,T) \,, \\ \varphi_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon \,, \\ \varphi_\varepsilon\ (x,z,T) = o \text{ dans } \Omega_\varepsilon \,. \end{cases}
$$

La formule de Green reliant (I_ε) et $(\mathrm{II}_\varepsilon)$ s'écrit alors :

$$
(1.10)\quad \int_{Q_\varepsilon} y_\varepsilon\, \Psi_\varepsilon\, dx\, dz\, dt = \int_o^T \int_G d_\varepsilon(z,t)\ v_\varepsilon(z,t)\ dz\ dt.
$$

Un des résultats essentiels de ce travail est la démonstration de la convergence de y_ε vers y, solution de (I), et de $d_\varepsilon(z,t)$ vers $\varphi(o,z,t,)$ (trace de la solution de (II)) .

On introduit les notations suivantes :

(1.11) . $V_\varepsilon = \{\ u \in H_0^1\ (\mathcal{O})\ ,\ \nabla_x\ u{=}o \text{ p.p. sur } B_\varepsilon\ \}$ sous-espace fermé de $H_o^1(\mathcal{O})$ muni de la norme induite ;

. $\mathcal{V}_\varepsilon = L^2(G; V_\varepsilon)$ sous espace fermé de $\mathcal{V} = L^2(G; H_o^1(\mathcal{O}))$;

. $\widetilde{H_o^1}(\Omega_\varepsilon) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon)\ ,\ u = o \text{ sur } \partial\,\Omega \cap \overline{\Omega}_\varepsilon\}$;

. Pour toute fonction θ définie (presque partout) dans Ω_ε (resp. Q_ε) on note $\tilde{\theta}$ son prolongement par zéro à Ω.(resp. Q).

On considère alors y_ε solution de (I_ε) (resp. φ_ε solution de (II_ε)) comme une fonction de $(0,T)$ à valeurs dans $\mathcal{V}_\varepsilon \subset \mathcal{V}$, vérifiant de plus $\widetilde{\nabla y_\varepsilon} : (0,T) \to L^2(\Omega)$, au lieu de la considérer comme une fonction de $(0,T)$ dans $\widetilde{H_o^1}(\Omega_\varepsilon)$, car ce dernier espace n'est pas un sous-espace (dépendant de ε) d'un espace fixe.

On a alors le

(1.12) <u>Théorème 1</u> (resp. théorème 1bis). Pour $n = 2$ et 3, si, lorsque ε tend vers zéro, v_ε converge faiblement (resp. fortement) vers v dans $L^2(G\times(0,T)$, alors y_ε, solution de (I_ε), converge faiblement (resp. fortement) vers y, solution de (I), dans $L^2(Q)$.

(1.13) <u>Théorème 2</u> (resp. théorème 2bis) :Pour $n = 2$ et 3, si lorsque ε tend vers zéro, Ψ_ε (prolongée par zéro à $Q\setminus Q_\varepsilon$) converge faiblement (resp. fortement) vers Ψ dans $L^2(Q)$, alors :

(1.14) φ_ε, solution de (II_ε), converge étoile-faiblement (resp.fortement) vers φ, solution de (II), dans $L^\infty(0,T;\mathcal{V})$ et $\widetilde{\nabla\varphi_\varepsilon}$ converge étoile-faiblement (resp.fortement) vers $\nabla\varphi$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;

(1.15) $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ converge faiblement (resp. fortement) vers φ dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$;

(1.16) La trace $d_\varepsilon(z,t)$ de φ_ε sur Σ_ε converge faiblement (resp. fortement) vers $\varphi(o,z,t)$ dans $L^2(G\times(0,T))$.

On a aussi le

(1.17) <u>Corollaire (du théorème 1)</u>. Si de plus, sous les hypothèses du théorème 1, $\tilde{y}_\varepsilon(T)$ est borné dans $L^2(\Omega)$, alors v appartient à l'espace fonctionnel

(1.18) $\mathcal{U} = \{ v \in L^2 (G \times (0,T))$; y solution de (I) associée à v, admet une trace $y(T)$ dans $L^2(\Omega)$ $\}$ et $\tilde{y}_\varepsilon(T)$ converge faiblement vers $y(T)$ dans $L^2(\Omega)$.

La considération de certains problèmes de contrôle optimal (cf. § 6) conduit à étudier également l'approximation du problème suivant :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + A\, p = o \text{ dans } Q, \\ p = o \text{ sur } \partial_L Q, \\ p(x,z,o) = f(x,z) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où f est donné dans $L^2(\Omega)$,

par

$$(\text{III}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + A\, p_\varepsilon = o \text{ dans } Q_\varepsilon\ , \\ p_\varepsilon = e_\varepsilon(z,t) \text{ fonction inconnue de } (z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon \text{ et} \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}}\, d\sigma = o \text{ p.p. } (z,t) \in G \times (0,T)\ , \\ p_\varepsilon = o \quad \text{sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon\ , \\ p_\varepsilon\ (x,z,o) = f_\varepsilon\ (x,z) \text{ dans } \Omega_\varepsilon\ . \end{cases}$$

Ici encore p_ε est considéré comme à valeurs dans $\mathcal{V}_\varepsilon$ et on note $\tilde{p}_\varepsilon$ le prolongement par zéro de p_ε à $Q \setminus Q_\varepsilon$.

(1.19) <u>Théorème 3 (resp. théorème 3bis)</u> : Pour $n = 2$ et 3, si, lorsque ε tend vers zéro, f_ε (prolongé par zéro à $\Omega - \Omega_\varepsilon$) converge faiblement (resp. fortement) vers f dans $L^2(\Omega)$, alors :

. p_ε, solution de (III_ε), converge vers p, solution de (III), faiblement dans $L^2(0,T;\mathcal{V})$ (resp. fortement dans $L^2(G \times (0,T)\ ;\ H^s(\mathcal{O}_\eta))$ pour tout $s < 1$, $\eta > o$);

. $\widetilde{\nabla p_\varepsilon}$ converge vers ∇p faiblement dans $L^2(Q)$ (resp. fortement dans $L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))$ pour tout $s > o$) ;

. $\tilde{p}_\varepsilon$ converge vers p étoile-faiblement dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (resp. fortement dans $L^\infty(0,T;H^{-s}(\Omega))$ pour tout $s > o$).

En outre on a le

(1.20) Corollaire (du théorème 3) : Si de plus, dans le théorème 3 $e_\varepsilon(z,t)$ est borné dans $L^2(G \times (0,T))$, alors f appartient à l'espace fonctionnel

$\mathcal{K} = \{f \in L^2(\Omega)$; p, solution de (III) associée à f, admet une trace $p(o,z,t)$ dans $L^2(G \times (0,T))\}$ et $e_\varepsilon(z,t)$ converge faiblement vers $p(o,z,t)$ dans $L^2(G \times (0,T))$.

Aux paragraphes 2 et 3 on donnera les démonstrations des théorèmes 2bis et 2. On en déduira au paragraphe 4 la démonstration des théorèmes 1 et 1bis ainsi que du corollaire (1.17). Le paragraphe 5 est consacré aux démonstrations des théorèmes 3, 3bis et du corollaire (1.20). Au paragraphe 6 est étudié l'approximation d'un problème de contrôle optimal.

Les démonstrations sont données pour le cas n = 3 (le cas n = 2 étant semblable).

Dans ce qui suit les lettres C et K désignent diverses constantes indépendantes de ε.

Les résultats de cet article généralisent ceux de [2] [4] qui concernent le cas où m = 0. Le cas m = 1 semble le mieux adapté à l'étude de certains problèmes pétroliers (cf. [1]). Les résultats analogues sont valables pour le cas hyperbolique (extension au cas m > o des résultats de [3]).

§ 2 Démonstration du théorème 2bis

Pour le problème (II) le résultat suivant est classique (cf.[5]).

(2.1) Lemme : Pour Ψ dans $L^2(Q)$, le problème (II) admet une solution unique dans $H^{2,1}(Q)$ et il existe une constante C telle que

(2.2) $$|\varphi|_{H^{2,1}(Q)} \leq C\, |\Psi|_{L^2(Q)} ,$$

d'où pour n = 2 ou 3

(2.3) $$|\varphi(o,z,t)|_{L^2(G\times OT)} \leq C\, |\Psi|_{L^2(Q)} .$$

Le lemme suivant montre que l'on a presque les mêmes estimations pour la solution de (II_ε).

(2.4) <u>Lemme</u> : Pour Ψ_ε dans $L^2(Q_\varepsilon)$, le problème (II_ε) admet une solution unique qui est dans $H^{2,1}(Q_\varepsilon)$ et il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$(2.5)\quad |\varphi_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_\varepsilon)}, |\nabla\varphi_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}, \left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t}\right|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C\,|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} ;$$

$$(2.6)\quad |A_z^*\varphi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)}, |A_x^*\varphi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C\,|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)}$$

$$(2.7)\quad |d_\varepsilon(z,t)|_{L^2(G\times(0,T))} \leq C\,|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} .$$

<u>Démonstration</u> : On obtient (2.5) classiquement en multipliant l'équation (II_ε) par φ_ε puis $(A + A^*)\,\varphi_\varepsilon$.

Pour obtenir (2.6), et d'après l'équation (II_ε) il suffit d'obtenir :

$$|A_z^*\varphi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C\,|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} .$$

A cet effet, on multiplie l'équation par $\left(\frac{A_z + A_z^*}{2}\right)\varphi_\varepsilon = S_z\,\varphi_\varepsilon$ et on intègre d'abord par parties sur $\mathcal{O}_\varepsilon$, les termes sur les bords Γ_ε et Γ étant nuls à cause des conditions aux limites imposées à φ_ε sur ces frontières. On obtient donc :

$$(2.8)\quad \int_{\mathcal{O}_\varepsilon} a_x^*(\varphi_\varepsilon, S_z\varphi_\varepsilon) + |S_z\varphi_\varepsilon|^2 + S_z\varphi_\varepsilon\left(\frac{A_z^* - A_z}{2}\right)\varphi_\varepsilon = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon}\left(\Psi_\varepsilon + \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t}\right) S_z\varphi_\varepsilon ;$$

où $a_x^*(u,v) = a_{ji}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}$. On intègre ensuite par parties sur G, et, ici aussi, les termes sur le bord sont nuls :

$$(2.9)\quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ji}(x)\left(\frac{b_{k\ell}(z) + b_{\ell k}(z)}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_i\,\partial z_k}\,\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_j\,\partial z_\ell}$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon}|S_z\varphi_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} S_z\,\varphi_\varepsilon \times \left(\frac{A_z^* - A_z}{2}\right)\varphi_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon}\left(\Psi_\varepsilon + \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t}\right) S_z\,\varphi_\varepsilon .$$

La première intégrale est positive ou nulle car l'intégrande l'est : en effet pour z fixé, on peut diagonaliser la matrice symétrique $\frac{b_{k\ell}(z) + b_{\ell k}(z)}{2}$ et notant $\xi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial z_k}(x,z)$ on a alors (avec $B_k \geq \alpha$ par (1.5), et $p_{k,\ell}(z)$ la matrice de passage):

$$a_{ji}(x) \left(\frac{b_{k\ell}(z)+b_{\ell k}(z)}{2}\right) \xi_{ik}\, \xi_{j\ell} = a_{ji}(x)\, B_k(z)\, p_{k,\lambda}(z)\, \xi_{i\lambda}\, p_{k,\ell}(z)\, \xi_{j\ell}$$

$$= B_k(z)\, a_{ji}(x)\, p_{k,\lambda}(z)\, \xi_{i\lambda}\, p_{k,\ell}(z)\, \xi_{j\ell}$$

$$\geq B_k(z)\, \alpha \sum_i |p_{k,\lambda}(z)\, \xi_{i\lambda}|^2 \geq 0 .$$

Ainsi on obtient

$$(2.10) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} |S_z \varphi_\varepsilon|^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Psi_\varepsilon + \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t}\right) S_z \varphi_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} |S_z \varphi_\varepsilon| \left| \frac{A_z^* - A_z}{2} \varphi_\varepsilon \right| .$$

On intègre enfin cette inégalité sur (0,T) et utilisant

$$(2.11) \begin{cases} \left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t}\right|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \quad \text{et} \\ \left|\frac{A_z^* - A_z}{2} \varphi_\varepsilon\right|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq K\, |\nabla \varphi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} , \end{cases}$$

on obtient bien :

$$(2.12) \qquad |A_z^* \varphi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} .$$

Enfin, à nouveau grâce à (2.11) et à l'équation, (2.12) implique

$$|A_x^* \varphi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} .$$

Pour démontrer (2.7) on utilise le lemme suivant démontré dans [2] :

(2.13) Lemme : Soit ρ_ε l'unique solution dans V_ε du problème elliptique suivant ,

$$(2.14)\begin{cases} A_x\rho_\varepsilon = o \text{ dans } \mathcal{O}_\varepsilon , \\ \rho_\varepsilon = c_\varepsilon (\text{constante inconnue}) \text{ sur } \Gamma_\varepsilon \text{ , et } \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}} d\sigma = 1, \\ \rho_\varepsilon = o \text{ sur } \Gamma . \end{cases}$$

Alors ρ_ε converge fortement dans $L^2(\mathcal{O})$ vers ρ solution de

$$(2.15) \qquad \begin{cases} A_x \rho = \delta(x) \text{ dans } \mathcal{O} , \\ \rho = o \text{ sur } \Gamma ; \end{cases}$$

. $\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}}$ est une mesure positive de support Γ_ε convergeant étroitement vers $\delta(x)$;

. En outre il existe deux constantes D_1 et D_2 indépendantes de ε telles que

$$(2.16) \qquad o < D_1 \leq \varepsilon \; c_\varepsilon \leq D_2 \quad \blacksquare$$

Multipliant l'équation (II_ε) par ρ_ε et intégrant par parties sur $\mathcal{O}_\varepsilon$; on obtient

$$(2.17) \qquad d_\varepsilon(z,t) = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon} (\Psi_\varepsilon + \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - A_z^* \varphi_\varepsilon) (x,z,t) \; \rho_\varepsilon(x) \; dx .$$

Cette dernière formule permet alors de déduire (2.7) grâce aux propriétés de ρ_ε et aux estimations (2.5) et (2.6) ■

Grâce aux lemmes (2.1) (2.4), il suffit de démontrer le théorème 2bis pour Ψ_ε indépendant de ε et assez régulier (dans un sous-ensemble dense ou total de $L^2(Q)$. Nous prendrons par exemple Ψ fixé dans $\mathcal{D}$ (]0,T[; $D^\infty(A_x^*) \otimes D^\infty(A_z^*)$) , ou $D^\infty(A_x^*)$ et le domaine commun de toutes les puissances de A_x^* sur $L^2(\mathcal{O})$, dont on sait qu'il est dense dans $L^2(\mathcal{O})$ (de même pour $D^\infty(A_z^*)$). Cette hypothèse "Ψ régulier" sera utilisé jusqu'à la fin de ce paragraphe. Grâce à cette hypothèse, la solution φ du problème (II) vérifie la propriété suivante :

$$\forall \; k \in \mathbb{N} \quad (\frac{\partial}{\partial t})^k \varphi \; , \; (A_z^*)^k \varphi, \; (A_x^*)^k \varphi \text{ et } (A^*)^k \varphi$$

sont solution du problème analogue à (II) mais associés respectivement à

$(\frac{\partial}{\partial t})^k \Psi$, $(A_z^*)^k \Psi$, $(A_x^*)^k \Psi$, et $(A^*)^k \Psi$.

En particulier, et c'est sous cette seule forme que nous utiliseront "Ψ régulier", grâce aux théorèmes d'injection de Sobolev :

(2.18) : φ, $(\frac{\partial}{\partial t})^k \varphi$, $(A_z^*)^k \varphi$ sont continus dans Q pour $k \leq 4$.

On introduit alors le problème auxiliaire suivant

$$(\overline{II}_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial\overline{\varphi}_\varepsilon}{\partial t} + A^* \overline{\varphi}_\varepsilon = \Psi \text{ dans } Q_\varepsilon , \\ \overline{\varphi}_\varepsilon = \varphi(o,z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon , \\ \overline{\varphi}_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon , \\ \overline{\varphi}_\varepsilon (x,z,t) = o \text{ dans } \Omega_\varepsilon , \end{cases}$$

où φ est la solution de (II) associée à Ψ.

Si on pose $w_\varepsilon = \varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon$, il vérifie donc

$$(2.19) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + A^* w_\varepsilon = o \text{ dans } Q_\varepsilon , \\ w_\varepsilon = \varphi(x,z,t) - \varphi(o,z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon , \\ w_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon , \\ w_\varepsilon (x,z,T) = o \text{ dans } \Omega_\varepsilon . \end{cases}$$

(2.20) <u>Lemme</u> : La solution $\overline{\varphi}_\varepsilon$ de $(\overline{II}_\varepsilon)$ vérifie

(2.21) $\sup\limits_{Q_\varepsilon} | \varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon | \leq \varepsilon C$, $\quad \sup\limits_{\overline{G}\times[0,T]} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial\overline{\varphi}_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x^*}} d\sigma \right| \leq \varepsilon^2 C$,

(2.22) $\sup\limits_{Q_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial t} (\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon) \right| \leq \varepsilon C$, $\quad \sup\limits_{\overline{G}\times[0,T]} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_{A_x^*}} (\frac{\partial\overline{\varphi}_\varepsilon}{\partial t}) d\sigma \right| \leq \varepsilon^2 C$,

(2.23) $\sup\limits_{Q_\varepsilon} | A_z^*(\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon) | \leq \varepsilon C$, $\quad \sup\limits_{\overline{G}\times[0,T]} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_{A_x^*}} (A_z^* \overline{\varphi}_\varepsilon) d\sigma \right| \leq \varepsilon^2 C$

pour une constante C convenablement choisie .

<u>Démonstration</u> : Le principe du maximum, appliqué à (2.19) donne $\sup\limits_{Q_\varepsilon} | \varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon | = \sup\limits_{\Sigma_\varepsilon} | \varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon | \leq \varepsilon C$ car φ est lipschitzienne. Le même

raisonnement s'applique aux fonctions $\frac{\partial}{\partial t} w_\varepsilon$ et $A_z^* w_\varepsilon$ qui vérifient une équation analogue à (2.19).

Multipliant (2.19) par ρ_ε, solution de (2.14), et intégrant par parties sur $\mathcal{O}_\varepsilon$ on obtient

(2.24) $$c_\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_{A_x^*}} (\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon)\, d\sigma = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon} (A_z^* (\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial t} (\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon))\, \rho_\varepsilon$$
$$+ \int_{\Gamma_\varepsilon} (\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon) \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}}\, d\sigma \,.$$

Utilisant alors (2.13) et les estimations démontrées ci-dessus ainsi que

(2.25) $$\sup_{(z,t) \in \overline{G} \times [0,T]} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{A_x^*}}\, d\sigma \right| \le \varepsilon^2 C \quad (n=3)$$

qui provient de la continuité de $\nabla \varphi$, on déduit la seconde partie de (2.21).

En appliquant la même méthode aux fonctions $\frac{\partial \overline{\varphi}_\varepsilon}{\partial t}$ et $A_z^* \overline{\varphi}_\varepsilon$ on conclut la démonstration du lemme (2.20) ■

Pour comparer φ_ε à $\overline{\varphi}_\varepsilon$ on introduit une seconde fonction auxiliaire :

(2.26) $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon - \overline{\varphi}_\varepsilon$ qui vérifie

(2.27) $$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A^* u_\varepsilon = o \text{ dans } Q_\varepsilon \,, \\ u_\varepsilon = d_\varepsilon(z,t) - \varphi(o,z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon \,, \\ u_\varepsilon\,(x,z,t) = o \text{ dans } \Omega_\varepsilon \,. \end{cases}$$

(2.28) <u>Lemme</u> : Sous les hypothèses précédentes on a

(2.29) $$|u_\varepsilon|_{L^\infty(O,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(O,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le \varepsilon\, C \,,$$

(2.30) $$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|_{L^\infty(O,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(O,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le \varepsilon\, C \,,$$

(2.31) $$|A^*_z u_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq \varepsilon\, C.$$

<u>Démonstration</u> : Par (2.21) et la condition sur Σ_ε pour φ_ε on a

(2.32) $$\sup_{G\times[0,T]} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*_x}} \, d\sigma \right| \leq \varepsilon^2 \; C.$$

Multipliant (2.27) par u_ε, on obtient facilement

$$\frac{1}{2} |u_\varepsilon|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} + \alpha\, |\nabla u_\varepsilon|^2_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq \Big| \int_{\Sigma_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*_x}} \, d\sigma\, dz\, dt \Big).$$

Utilisant alors (2.32) et le fait que $u_{\varepsilon|\Sigma_\varepsilon} = d_\varepsilon(z,t) - \varphi(o,z,t)$

est indépendant de x et est borné dans $L^2(G\times(0,T))$ (cf.(2.3) et (2.7)) on obtient bien (2.29) .

Comme pour le lemme (2.20), on obtient (2.30) et (2.31) en appliquant le raisonnement précédent à $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ et à $A^*_z u_\varepsilon$, ce qui est loisible grâce à la "régularité de Ψ" ∎

Pour démontrer la partie (1.15) du théorème (2bis) toujours dans le cadre $\Psi_\varepsilon \equiv \Psi$ et régulière, il suffit de regrouper (2.29), (2.21) et (2.22) pour obtenir

(2.33) $$|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \varepsilon\, C \text{ et}$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{\varphi}_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \varepsilon\, C\, .$$

Pour démontrer la partie (1.16) du théorème (2bis) on multiplie (2.27) par ρ_ε et intégrant par parties sur $\mathcal{O}_\varepsilon$ on obtient

$$d_\varepsilon(z,t) - \varphi(o,z,t) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}} \, d\sigma = c_\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*_x}} \, d\sigma + \int_{\mathcal{O}_\varepsilon} \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - A^*_z u_\varepsilon\Big)\rho_\varepsilon \, dx.$$

d'où on conclut

(2.34) $$|d_\varepsilon(z,t) - \varphi(o,z,t)|_{L^\infty(0,T;L^2(G))} \leq \varepsilon\, C$$

grâce à (2.16), (2.32),(2.31) et (2.30) ∎

Enfin pour démontrer la partie (1.14) du théorème (2bis), on utilise d'abord (2.19) (2.21) et (2.23) pour en déduire

(2.35) $$\sup_{\overline{Q}_\varepsilon} | \nabla (\varphi - \overline{\varphi}_\varepsilon) | \leq \varepsilon\, C.$$

Grâce à (2.29) et (2.30) on a aussi

(2.36) $$| \nabla (\varphi_\varepsilon - \overline{\varphi}_\varepsilon) |_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \varepsilon\, C\ ,$$

d'où par (2.35) et (2.36)

(2.37) $$|\nabla \varphi_\varepsilon - \nabla\varphi|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \varepsilon\, C.$$

Ceci implique la convergence de $\widetilde{\nabla\varphi_\varepsilon}$ vers $\nabla\varphi$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

De (2.37), en utilisant seulement la partie $\nabla_x(\varphi_\varepsilon - \varphi)$, on obtient également

(2.38) $$|\varphi_\varepsilon - \varphi|_{L^\infty(0,T;L^2(G;\ V_\varepsilon))} = |\varphi_\varepsilon - \varphi|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})} \leq \varepsilon\, C,$$

ce qui achève la démonstration de (1.14) et celle du théorème 2bis ■

<u>(2.39) Remarque :</u> On peut de facon analogue démontrer que si Ψ_ε converge fortement vers Ψ dans $L^2(Q)$, alors $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ converge fortement vers φ dans l'espace

$$L^2(\mathcal{O} \times (0,T)\ ;\ H^2 \cap H^1_0\ (G))\ .$$

§ 3 <u>Démonstration du théorème 2</u>

Grâce au théorème 2bis et à la linéarité des problèmes (II) et (II_ε), on ramène facilement la démonstration du théorème 2 à celle du lemme suivant.

(3.1) <u>Lemme :</u> Si, lorsque ε tend vers zéro, Ψ_ε (prolongé par zéro dans $Q \setminus Q_\varepsilon$) tend faiblement vers zéro dans $L^2(Q)$, alors

(3.2) φ_ε tend étoile-faiblement vers zéro dans $L^\infty(0,T;\mathcal{V})$ et $\widetilde{\nabla\varphi_\varepsilon}$ tend faiblement vers zéro dans $L^2(Q)$;

(3.3) $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ tend faiblement vers zéro dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$;

(3.4) $d_\varepsilon(z,t)$ converge faiblement vers zéro dans $L^2(G\times(0,T))$.

Démonstration du lemme (3.1) :

D'après les estimations du lemme (2.4), il suffit pour (3.3) de démontrer la convergence vers zéro de $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'(Q)$. La formule (2.17) permet alors d'en déduire (3.4).

Pour montrer que $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(Q)$, on met en dualité les problèmes (II) et (II_ε) respectivement avec les problèmes analogues à temps renversé ci-dessous, où f est fixé dans $\mathcal{D}(Q)$:

$$(II_{bis}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + A\, h = f \text{ dans } Q, \\ h = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi \ , \\ h(x,z,o) = o \text{ dans } \Omega \ ; \end{cases}$$

$$(II_{\varepsilon bis}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + A\, h_\varepsilon = f \text{ dans } Q_\varepsilon \ , \\ h_\varepsilon = \text{une fonction inconnue de } (z,t) \text{ seul sur } \Sigma_\varepsilon \text{ et} \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}} d\sigma = o \text{ p.p.} (z,t) \in G \times (0,T) \ , \\ h_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon \ , \\ h_\varepsilon(x,z,o) = o \text{ dans } \Omega_\varepsilon . \end{cases}$$

Pour ces problèmes le théorème 2bis s'applique . Les formules de Green (II) et (II_{bis}) (resp.(II_ε) et ($II_{\varepsilon bis}$)) sont :

$$(3.5) \qquad \int_Q f\, \varphi \, dx\, dz\, dt = \int_Q \Psi\, h \, dx\, dz\, dt \ (\text{ici} = o) \ ,$$

$$(3.6) \qquad \int_{Q_\varepsilon} f\, \varphi_\varepsilon \, dx\, dz\, dt = \int_{Q_\varepsilon} \Psi_\varepsilon\, h_\varepsilon \, dx\, dz\, dt \ .$$

Le théorème 2bis appliqué à (II_{bis}) ($II_{\varepsilon bis}$) implique donc que $\tilde{h}_\varepsilon$ converge fortement dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$. Comme $\tilde{\Psi}_\varepsilon$ converge faiblement dans $L^2(Q)$ vers zéro, on en déduit par (3.6) $\lim\limits_{\varepsilon\to o} \int_Q f\, \tilde{\varphi}_\varepsilon \, dx\, dz\, dt = o$, ce qui établit bien (3.3).

(3.7) <u>Remarque</u> : Comme pour (2.39), on peut vérifier que si Ψ_ε converge faiblement vers Ψ, alors $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ converge faiblement vers φ dans

$$L^2(\mathcal{O}\times(0,T)\ ;\ H^2 \cap H^1_o\ (G))\ .$$

Pour démontrer (3.2) il suffit, toujours grâce aux estimations du lemme (2.4) de montrer que $\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(Q)$. Pour cela on utilise le lemme suivant dont la démonstration se trouve dans [2] (lemme 2).

(3.8) <u>Lemme</u> : Il existe une constante K indépendante de ε telle que pour tout f de V_ε on a (avec n = 3)

$$|f|_{L^2(B_\varepsilon)} \leq K\ \varepsilon\ |\nabla f|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon)}\ , \tag{3.9}$$

$$|f|_{\Gamma_\varepsilon}| \leq K\ \varepsilon^{-1/2}\ |\nabla f|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon)} \tag{3.10}$$ ∎

De l'estimation (2.5) on déduit :

$$|\nabla\varphi_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^2(G;L^2(\mathcal{O}_\varepsilon)))} \leq C\ |\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)}\ ,$$

d'où par (3.9)

$$|\varphi_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^2(G;L^2(B_\varepsilon))} = |\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \varepsilon\ K\ C|\Psi_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)}\ .$$

Par suite, $\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon$ tend fortement vers zéro dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega\ )$.

ceci achève la démonstration du théorème 2 ∎

§ 4 <u>Démonstration des théorèmes 1 et 1bis</u>

On commence par les estimations suivantes

(4.1) <u>Lemme</u> : Le problème (I) admet une solution unique dans $L^2(Q)$ par transposition et il existe une constante C telle que, pour y solution de (I) associée à v dans $L^2(G\ \times(0,T))$, on a

$$|y|_{L^2(Q)} \leq C\ |v|_{L^2(G\times(0,T))}. \tag{4.2}$$

<u>Démonstration</u> : Par transposition du lemme (2.1) on obtient l'existence et l'unicité de y grâce à la formule de Green (1.6). On obtient alors (4.2) comme dual de (2.3) (cf.[5]) ∎

De même on a pour (I_ε).

(4.3) <u>Lemme</u> : Pour tout v_ε de $L^2(G\times(0,T))$ (I_ε) admet une solution y_ε unique par transposition dans $L^2(Q_\varepsilon)$ et il existe C indépendant de ε tel que

(4.4) $$|y_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \le C\, |v_\varepsilon|_{L^2(G\times(0,T))}.$$

<u>Démonstration</u> : Il est clair que (I_ε) admet une solution variationnelle. Mais, par la formule de Green (1.10), on peut retrouver l'existence de cette solution par dualité dans $L^2(Q_\varepsilon)$.
Toujours grâce à (1.10) et à (2.7) on obtient bien la majoration (4.4), uniforme en ε ∎

Grâce aux formules de Green (1.6) et (1.10) et au théorème 2bis, on vérifie facilement que si v_ε converge faiblement vers v dans $L^2(G\times(0,T))$, alors $\tilde{y}_\varepsilon$ converge faiblement vers y, solution de (I) associée à v dans $L^2(Q)$. De même, grâce au théorème 2, si v_ε converge fortement vers v dans $L^2(G\times(0,T))$, alors $\tilde{y}_\varepsilon$ converge fortement vers y dans $L^2(Q)$. Pour en déduire les théorèmes 1 et 1bis respectivement, il reste à estimer la différence $\tilde{y}_\varepsilon - y_\varepsilon$ dans $L^2(Q)$. On utilise alors le lemme (3.8) .

Multipliant l'équation (I_ε) par y_ε et intégrant par parties sur $\mathcal{O}_\varepsilon$ puis sur $G\times(0,T)$, on a

(4.5) $$|y_\varepsilon|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} + \alpha\, |\nabla y_\varepsilon|^2_{L^2(Q_\varepsilon)} \le \int_{\Sigma_\varepsilon} C_\varepsilon(z,t)\, v_\varepsilon(z,t)\, d\sigma\, dz\, dt,$$

d'où on déduit en utilisant (3.10) :

$$|\nabla y_\varepsilon|^2_{L^2(Q_\varepsilon)} \le K\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\, |\nabla_x y_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} |v_\varepsilon|_{L^2(G\times(0,T))} ,$$

d'où

$$|\nabla y_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \le K\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\, |v_\varepsilon|_{L^2(G\times(0,T))}$$

et utilisant (3.9) on déduit enfin

(4.6) $$|y_\varepsilon|_{L^2(B_\varepsilon\times G\times(0,T))} \le K\, \varepsilon^{1/2} |v_\varepsilon|_{L^2(G\times(0,T))} .$$

L'estimation (4.6) implique bien que dès que v_ε est borné dans $L^2(G\times(0,T))$, $y_\varepsilon - \tilde{y}_\varepsilon$ tend vers zéro fortement dans $L^2(Q)$ ■

Démontrons maintenant le corollaire du théorème 1.
A cet effet on vérifie que $\tilde{y}_\varepsilon$ (T) converge vers y(T) pour une topologie séparée sur $L^2(\Omega)$ moins fine que la topologie faible.

Soit $\eta > 0$ fixé assez petit ; d'après le théorème 1, y_ε converge faiblement vers y dans $L^2(Q_\eta)$ et d'après les équations (I_ε) $\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}$ converge faiblement vers $\frac{\partial y}{\partial t}$ dans $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega_\eta))$. On en déduit donc que $y_\varepsilon(T)$ converge faiblement vers y(T) dans $H^{-1}(\Omega_\eta)$ et ceci pour tout η positif petit.

Si de plus $\tilde{y}_\varepsilon(T)$ est borné dans $L^2(\Omega)$, ceci implique la convergence faible de $\tilde{y}_\varepsilon(T)$ vers y(T) dans $L^2(\Omega)$ et l'appartenance de v à l'espace $\mathcal{U}$. ■

§ 5 Démonstration des théorèmes 3 et 3bis :

Concernant le problème (III) qui a une solution de façon classique (voir par exemple [5]) on a le

(5.1) Lemme : Pour tout f de $L^2(\Omega)$, (III) admet une solution p unique dans $L^2(0,T;H^1_o(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ avec

$$|p|_{L^2(0,T;H^1_o(\Omega))} , \left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C|f|_{L^2(\Omega)} \quad ■$$

Pour (III_ε) on a des estimations similaires :

(5.2) Lemme : Pour f_ε dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ le problème (III_ε) admet une solution unique p_ε dans

$L^2(0,T;H^1_o(\Omega_\varepsilon))\ H^1(0,T;(\widetilde{H}^1_o(\Omega_\varepsilon))')$ et il existe une constante C indépendante de $\varepsilon > o$, telle que

$$|p_\varepsilon|_{L^2(0,T,\mathcal{V}_\varepsilon)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} , |\nabla p_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C|f_\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} .$$

Démonstration : C'est l'estimation de l'énergie associée au problème (III_ε) qui est variationnel dans $\widetilde{H}^1_o(\Omega_\varepsilon)$ (cf.(1.11) pour la définition de cet espace) ■

On met alors le problème (II) et le problème (III) en dualité par la formule de Green suivante :

$$(5.3) \qquad \int_Q p\,\Psi\,dx\,dz\,dt = \int_\Omega f(x,z)\,\varphi(x,z,o)\,dx\,dz\,,$$

où on sait, par (2.1) que $\varphi(x,z,o)$ est dans $L^2(\Omega)$. De même on met en dualité (II_ε) et (III_ε) par

$$(5.4) \qquad \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon\,\Psi_\varepsilon\,dx\,dz\,dt = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x,z)\,\varphi_\varepsilon(x,z,o)\,dx\,dz\,,$$

où on sait par (2.4) que $\varphi_\varepsilon(x,z,o)$ est dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Supposons que f_ε (prolongé par o à $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$) converge faiblement vers f dans $L^2(\Omega)$, alors par (5.2), p_ε est borné dans $L^2(0,T,\mathcal{V})$, $\tilde{p}_\varepsilon$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $\widetilde{\nabla p_\varepsilon}$ dans $L^2(Q)$. Fixant $\Psi_\varepsilon \equiv \Psi$ dans $L^2(Q)$ et utilisant le théorème 2bis, on vérifie que $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,z,o)$ converge fortement vers $\varphi(x,z,o)$ dans $L^2(\Omega)$. On peut alors passer à la limite dans (5.4) et comparant à (5.3) on voit que $\tilde{p}_\varepsilon$ converge faiblement dans $L^2(Q)$ vers p. Par suite $\tilde{p}_\varepsilon$ converge étoile-faiblement vers p dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Par le lemme (3.8) on voit que $p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon$ tend fortement vers zéro dans $L^2(Q)$, ce qui implique la convergence faible de p_ε vers p dans $L^2(0,T,\mathcal{V})$. Comme $\widetilde{\nabla_z p_\varepsilon} = \nabla_z\,\tilde{p}_\varepsilon$, on voit aussi que $\widetilde{\nabla_z p_\varepsilon}$ converge faiblement vers ∇_z p dans $L^2(Q)$. Quant à $\widetilde{\nabla_x p_\varepsilon}$ c'est $\nabla_x\,p_\varepsilon$, ce qui permet de conclure la démonstration du théorème 3 ■

Celle du théorème 3bis se ramène, grâce à (5.1) (5.2) au cas où $f_\varepsilon = f$ ne dépend pas de ε et appartient à un sous-ensemble dense de $L^2(\Omega)$, par exemple $\bigcup_{\eta>o} \mathcal{D}(\Omega_\eta)$. Alors, par le théorème 3, p_ε(resp. $\widetilde{\nabla p_\varepsilon}$; $\tilde{p}_\varepsilon$) converge faiblement vers p dans $L^2(0,T;\mathcal{V})$ (resp. vers ∇ p dans $L^2(Q)$; étoile-faiblement vers p dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$). Il suffit donc de montrer la compacité forte de p_ε dans $L^2(G\times(0,T);H^s(\mathcal{O}_\eta))$ pour tous s<1 et $\eta>o$ (resp. de $\widetilde{\nabla p_\varepsilon}$ dans $L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))$ pour tout s > o; de $\tilde{p}_\varepsilon$ dans $L^\infty(0,T;H^{-s}(\Omega))$ pour tout s > o) pour conclure.

Par l'équation (III_ε) on a $p'_\varepsilon(o) = -Af$ qui est dans $L^2(\Omega)$ et par dérivation, on voit que le lemme (5.2) s'applique à p'_ε. On a en particulier

$$|p'_\varepsilon|_{L^2(0,T;\mathcal{V})\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))},\ |\nabla p'_\varepsilon|_{L^2(Q_\varepsilon)} \le C$$

d'où :

p_ε est compact dans $L^2(G\times(0,T);\ H^s(\mathcal{O}_\eta))$ pour $s < 1$, $\eta > o$.

$\widetilde{\nabla p_\varepsilon}$ est compact dans $L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))$ pour $s > o$

et $\widetilde{p_\varepsilon}$ est compact dans $L^\infty(0,T;H^{-s}(\Omega))$ pour $s > o$ ■

(5.5) <u>Remarque</u> : Si on suppose les coefficients de A réguliers, on peut par dérivations successives en t, en utilisant l'équation (III) et la régularité des solutions de problèmes elliptiques et paraboliques, montrer que p est suffisamment régulier en (x,t) pour pouvoir appliquer la méthode de démonstration du théorème 2bis.
On obtient alors la convergence forte de p_ε vers p dans $L^2(0,T;\mathcal{V})$ celle de $\widetilde{\nabla p_\varepsilon}$ vers ∇p dans $L^2(Q)$ et celle de $\widetilde{p_\varepsilon}$ vers p dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Pour démontrer le corollaire (1.20) on introduit les problèmes analogues à (I) et (I_ε), mais rétrogrades, pour v dans $\mathcal{D}(G\times(0,T))$:

(5.6)

$$(I_{bis})\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + A^*\,\theta = v(z,t)\ \delta(x) \text{ dans } Q, \\ \theta = o \text{ sur } \partial_L\, Q\ , \\ \theta\ (x,z,T) = o \text{ dans } \Omega\ ; \end{cases}$$

$$(I_{\varepsilon bis})\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial t} + A^*\,\theta_\varepsilon = o \text{ dans } Q_\varepsilon\ , \\ \theta_\varepsilon = \text{fonction inconnue de } (z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon \text{ et} \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu_{A^*_x}}\, d\sigma = v(z,t) \text{ p.p. } t \in (0,T)\ , \\ \theta_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon\ , \\ \theta_\varepsilon(x,z,t) = o \text{ dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Pour ces problèmes le théorème 1bis s'applique et par dérivations successives en t on vérifie :

(5.7) <u>Lemme</u> : $\theta_\varepsilon(x,z,o)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers $\theta(x,z,o)$ ■

La formule de Green, reliant (I_{bis}) à (II) s'écrit

$$(5.8)\quad \int_G \int_0^T p(o,z,t)\ v(z,t)\ dz\ dt = \int_\Omega \theta(x,z,o)\ f(x,z)\ dx\ dz.$$

On la vérifie en effet pour f dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et elle reste vraie pour f dans $L^2(\Omega)$ car le support de v est compact dans $G\times(0,T)$ et l'équation (III) a un effet régularisant sur la condition initiale (i.e. pour tout $\alpha > 0$, $p(o,z,t) \in L^2(\alpha,T;\ H^2\cap H^1_0(G))$ pour $n = 2$ ou 3).

On a aussi la formule de Green reliant ($I_\varepsilon$bis) à (II_ε) :

$$(5.9)\quad \int_G \int_0^T e_\varepsilon(z,t)\ v(z,t)\ dt = \int_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon(x,z,o)\ f_\varepsilon\ (x,z)\ dx\ dz.$$

Supposant e_ε borné dans $L^2(G\times(0,T))$, le lemme (5.7) permet de passer à la limite dans (5.9) et la comparaison avec (5.8) permet de conclure que e_ε converge faiblement vers $p(o,z,t)$ au sens de $\mathcal{D}'(G\times(0,T))$, ce qui achève la démonstration du corollaire ■

(5.10) <u>Remarque</u> : On vérifie aisément comme dans [7] [8] que $\mathcal{D}(G\times(0,T))$ est dense dans l'espace $\mathcal{U}$, défini en (1.18) et que pour f dans $L^2(\Omega)$, $p(o,z,t)$ appartient à l'espace $\mathcal{U}'$, dual de $\mathcal{U}$ (en utilisant(5.8)).
L'espace $\mathcal{K}$ est l'image réciproque de $L^2(G\times(0,T))$ pour l'application de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{U}'$ qui à f associe $p(o,z,t)$ par l'intermédiaire du problème(III).

§ 6 <u>Application à l'approximation d'un problème de contrôle optimal.</u>

On considère le problème de contrôle suivant (cf.[7],[8]).
L'état,y,est lié au contrôle v par l'équation (I). Le contrôle appartient à $\mathcal{U}$ et la fonction coût à minimiser est

$$(6.1)\qquad J(v) = \frac{N}{2}\ |v|^2_{L^2(G\times(0,T))} + \frac{1}{2}\ |\ y(T) - z_d|^2_{L^2(\Omega)}\ ,$$

où z_d est donné dans $L^2(\Omega)$.

On vérifie comme dans [7] que le problème admet une solution unique u_o de $\mathcal{U}$ et celle-ci est caractérisée par le système d'optimalité suivant en (y_o,u_o,p_o) :

$$(6.2)\begin{cases} \dfrac{\partial y_o}{\partial t} + Ay_o = u_o(z,t)\,\delta(x)\ ,-\dfrac{\partial p_o}{\partial t} + A^*\ p_o = o \text{ dans } Q, \\ y_o = o\ ,\ p_o = o \text{ sur } \partial_L Q\ , \\ y_o(x,z,o) = o\ ,\ p_o(x,z,t) = y_o(x,z,t) - z_d \text{ dans } \Omega\ , \\ N\ u_o(z,t) + p_o(o,z,t) = o\ . \end{cases}$$

On considère alors l'approximation suivante du problème (6.2) :
L'espace des contrôles v est $L^2(G\times(0,T))$ et l'équation d'état donnant y_ε en fonction de v est (I_ε), la fonction coût étant

$$(6.3) \qquad J_\varepsilon(v) = \frac{N}{2}\,|v|^2_{L^2(G\times(0,T))} + \frac{1}{2}\,|y_\varepsilon(T) - z_d|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} .$$

Ici, classiquement, il existe une solution unique u_ε du problème de minimisation de J_ε, et le système d'optimalité correspondant en $(y_\varepsilon,u_\varepsilon,p_\varepsilon)$ s'écrit :

$$(6.4) \begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon = o, \; -\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + A^* p_\varepsilon = o \text{ dans } Q_\varepsilon, \\ y_\varepsilon = c_\varepsilon(z,t) \;,\; p_\varepsilon = e_\varepsilon(z,t) \text{ fonctions inconnues de } (z,t) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_{A_x}}\, d\sigma = v_\varepsilon(z,t) \;,\; \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*_x}}\, d\sigma = o \text{ p.p. sur } G\times(0,T), \\ y_\varepsilon = o \;,\; p_\varepsilon = o \text{ sur } \Sigma \cup \Xi_\varepsilon \;, \\ y_\varepsilon(x,z,o) = o \;,\; p_\varepsilon(x,z,T) = y(x,z,T) - z_d \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ N\, u_\varepsilon(z,t) + e_\varepsilon(z,t) = o \;. \end{cases}$$

On vérifie alors, grâce aux théorèmes 1, 1bis, 3, 3bis et aux corollaires (1.17) et (1.20) le résultat suivant (en utilisant une méthode analogue à [4]) :

(6.5) <u>Théorème</u> : Pour n = 2 ou 3, lorsque ε tend vers zéro, on a

(i) $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$ tend vers $J\,(u_o)$;

(ii) u_ε tend vers u_o fortement dans $L^2(0,T)$.

En outre : y_ε tend vers y_o fortement dans $L^2(Q)$;

$\tilde{y}_\varepsilon(x,z,T)$ tend vers $y_o(x,z,T)$ fortement dans $L^2(\Omega)$;

p_ε et $\tilde{p}_\varepsilon$ tendent vers p_o au sens du théorème 3bis, et $e_\varepsilon(z,t)$ tend vers $p_o(o,z,t)$ fortement dans $L^2(G\times(0,T))$ ∎

§ 7 <u>Remarques diverses</u> :

En ce qui concerne le problème (I_ε) on peut perturber le choix de B_ε par translation, c'est à dire $\tilde{B}_\varepsilon = b_\varepsilon + B_\varepsilon$ avec $\lim_{\varepsilon \to o} b_\varepsilon = o$ dans $\mathcal{O}$.

Les résultats précédents restent valables.

On peut également remplacer la condition aux limites sur Σ (resp sur Ξ) par l'une quelconque des conditions variationnelles suivantes :

a) $$\frac{\partial y}{\partial \nu_{A_x}} + \lambda(x,z)\, y = o \text{ sur } \Sigma \,,$$

où λ est une fonction non négative régulière sur Σ

(resp. $\frac{\partial y}{\partial \nu_{A_z}} + \mu(x,z)\, y = o$ sur Ξ, où μ est non négative régulière sur Ξ);

b) $y|_\Sigma = c(z,t)$ fonction inconnue de (z,t) seul et

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_{A_x}} + \lambda(x,z) y \right) ds = o \text{ p.p.} (z,t) \in G\times(0,T)$$

avec la même hypothèse que ci-dessus

(resp. $y|_\Xi = \hat{C}(x,t)$ fonction inconnue de (x,t) seul et

$$\int_{\partial G} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_{A_z}} + \mu(x,z) y\right) ds = o \quad \text{p.p.} (x,t) \in \mathcal{O}\times(0,T)).$$

Les mêmes remarques sont aussi valables pour les problèmes (II) et (III), et par suite pour le problème de contrôle optimal du paragraphe 6.

L'existence d'un résultat analogue à (6.5) dans le cas de minimisation avec contrainte ($v \in \mathcal{U} \cap K$, K convexe fermé fixe de $L^2(G\times(0,T))$) reste encore un problème ouvert dans le cas général où il s'agit du comportement limite de solution de systèmes d'optimalité contenant une inéquation variationnelle.

Références :

[1] G. Chavent : Mathematical modelling of mono and diphasic oil or gas reservoirs, Lecture notes Petroperu, 1979.

[2] A. Damlamian, Li Ta-tsien : Comportement limite des solutions de certains problèmes mixtes pour des équations paraboliques, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, 290 A (1980) p. 957 et article à paraître au Journal de Math. Pures et Appliquées.

[3] A. Damlamian, Li Ta-tsien : Comportement limite des solutions de certains problèmes mixtes pour des équations hyperboliques linéaires, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris 291 A (1980) p.531 et article à paraître à Comm. in P.D.E.

[4] Li Ta-tsien : Comportement limites pour certains problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations paraboliques, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris 291 A (1980) p. 201

[5] J.L. Lions, E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Volumes 1,2,Dunod, Paris, 1968.

[6] J.L. Lions : Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[7] J.L. Lions : Nouveaux espaces et ensembles fonctionnels intervenant en contrôle optimal, cours au Collège de France, 1979 et note aux C.R. Acad. Sc. Paris 289 A (1979) p. 315

[8] J.L. Lions : Function spaces and optimal control of distributed systems, Lecture notes U.F.R.J. , Rio de Janeiro 1980.

*
* *
*