

## Descriptions des quelques éléments de plaques - intégration dans Modulef

D. Marini

► **To cite this version:**

D. Marini. Descriptions des quelques éléments de plaques - intégration dans Modulef. RR-0059, INRIA. 1981. <inria-00076502>

**HAL Id: inria-00076502**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076502>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**IRIA**

**UNITÉ DE RECHERCHE  
IRIA-ROCQUENCOURT**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 59

**DESCRIPTION DE QUELQUES  
ÉLÉMENTS DE PLAQUES  
INTÉGRATION DANS MODULE F**

Donatella MARINI

Mars 1981

Résumé :

Le but de cet article est de présenter trois éléments finis de plaques qui ont été récemment intégrés dans MODULEF :

TRIA H31D (hybride dual)

TRIA HHJ1 (mixte Hellan-Herrmann-Johnson)

TRIA CLOT (élément de Clough-Tocher)

Après quelques rappels sur les différentes méthodes utilisées on donne les résultats obtenus sur un problème modèle.

Abstract :

The aim of this paper is to present three finite elements for plate bending problems recently introduced in the code MODULEF :

TRIA H3D1 (assumed stresses hybrid element)

TRIA HHJ1 (mixed element of Hellan-Herrmann-Johnson)

TRIA CLOT (Clough-Tocher element)

After a short description of the different methods used we give the results obtained on a simple model problem.

## Introduction

Cette brochure a pour but de présenter trois éléments finis de plaques qui ont été insérés dans la bibliothèque ELAS :

<u>TRIA H31D</u>	(élément hybride dual)
<u>TRIA HHJ1</u>	(élément mixte de Hellan-Herrmann-Johnson)
<u>TRIA CLOT</u>	(élément de Clough-Tocher).

Les deux premiers sont des éléments de type "non-standard" qui donnent la possibilité d'approcher directement et en même temps le déplacement transversal  $w$  (flèche) et d'autres quantités d'intérêt physique comme les contraintes. Le troisième est l'élément assemblé "aux déplacements" bien connu comme élément de Clough-Tocher.

Le plan du travail est le suivant :

- 1- Quelques rappels sur la théorie des plaques
- 2- Formulation variationnelle générale
- 3- Formulation mixte
- 4- Formulation hybride duale
- 5- Description de l'élément TRIA HHJ1
- 6- Description de l'élément TRIA H31D  
et fiche technique du triangle TRIA CLOT
- 7- Expériences numériques.

Ce travail a été réalisé par D. MARINI -IAN CNR, PAVIA- lors de son séjour à l'INRIA comme chercheur du projet MODULEF (Mai 1980).

## 1. Problèmes de plaque - Théorie linéarisée

On fait les hypothèses suivantes :

i) Le matériau est isotrope et obéit à la loi de comportement de Hooke, c'est-à-dire :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij})$$

ii) Les forces appliquées à la plaque sont normales au plan de la plaque et suffisamment faibles pour que l'hypothèse des petits déplacements s'applique.

iii) L'épaisseur  $e$  est "petite".

Dans ces hypothèses, la déflexion verticale  $w = w(x_1, x_2)$  satisfait à l'équation biharmonique

$$(1.1.) \quad D \Delta^2 w = p \quad \text{dans } \Omega$$

$$D = \text{module de rigidité à la flexion} = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)}$$

$E$  = module de Young

$e$  = épaisseur

$\nu$  = coefficient de Poisson.

Les conditions au bord sont de trois types :

$$(1.2.) \quad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$(1.3.) \quad w = M_n(w) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$(1.4.) \quad M_n(w) = K_n(w) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et traduisent les trois états physiques de plaque encadrée, appuyée et libre.

$n = (n_1, n_2)$  = normale unitaire extérieure

$\tau = (\tau_1, \tau_2)$  = tangente unitaire déduite de  $n$  par rotation de  $\pi/2$ .

$$M_n(w) = -D\{(w/11 + \nu w/22)n_1^2 + (\nu w/11 + w/22)n_2^2 + 2(1-\nu)w/12 n_1 n_2\} \quad (1)$$

$$Q_n(w) = -D\{(w/111 + \nu w/122)n_1 + (\nu w/112 + w/222)n_2 + (1-\nu)(w/112n_2 + w/122n_1)\} \quad ;$$

$$M_{n\tau}(w) = D\{-(w/11 + \nu w/22)n_1 n_2 + (\nu w/11 + w/22)n_1 n_2 + (1-\nu)w/12(n_1^2 - n_2^2)\} \quad ;$$

$$K_n(w) = Q_n(w) - \frac{\partial M_{n\tau}(w)}{\partial \tau} \quad .$$

### Cas dynamique :

Le déplacement est alors fonction de  $x$  et du temps  $t$ . Dans (1.1.) il faut donc ajouter aux forces  $p$  les forces d'inertie  $-\rho e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  et on obtient :

$$(1.5.) \quad \rho e \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} + D \Delta^2 w(t,x) = p(t,x)$$

( $\rho$  = densité surfacique)

On doit prescrire les conditions initiales

$$w(0,x) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = w_1(x)$$

à quoi on ajoute des conditions aux limites analogues à celles du cas stationnaire.

## 2. Formulation variationnelle

On a deux classes de formulations variationnelles pour les problèmes de plaques, correspondant à deux classes de méthodes : les méthodes "aux déplacements", ou méthodes standards, (conformes et non conformes), et les méthodes "non-standards". On donne ici les idées générales des deux méthodes, en renvoyant aux fiches techniques de chaque élément pour une description plus détaillée.

$$(1) \quad f_{/ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad ; \quad f_{/ijk} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad i, j, k = 1, 2$$

Dans ce qui suit, on utilisera aussi la convention de sommation des indices répétés.

## 2.A. Formulation variationnelle aux déplacements

On traite directement le problème discret, donc  $V$  est un espace de dimension finie.

Cas conforme ( $V \subset H^2(\Omega)$ )

A chaque instant  $t$  on a à résoudre le problème :

$$(2.1.) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \psi \in V \text{ solution de} \\ \rho e(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, v) + a(\psi, v) = (p, v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

$$(2.2.) \quad (p, v) = \int_{\Omega} p v \, d\Omega$$

$$(2.3.) \quad a(\psi, v) = \mathbf{D} \int_{\Omega} (\psi/_{11} v/_{11} + \psi/_{22} v/_{22} + 2(1-\nu) \psi/_{12} v/_{12} + \nu(\psi/_{22} v/_{11} + \psi/_{11} v/_{22})) \, d\Omega$$

Cas non conforme ( $V \not\subset H^2(\Omega)$ )

Soit  $T_h$  une décomposition régulière de  $\Omega$  en éléments  $T$ . Le problème à résoudre à chaque instant  $t$  s'écrit encore sous la forme (2.1.) avec

$$(2.4.) \quad (p, v) = \int_{\Omega} p v \, d\Omega$$

$$(2.5.) \quad a(\psi, v) = \sum_{T \in T_h} \int_T (\psi/_{11} v/_{11} + \psi/_{22} v/_{22} + 2(1-\nu) \psi/_{12} v/_{12} + \nu(\psi/_{22} v/_{11} + \psi/_{11} v/_{22})) \, dT$$

## 2.B. Formulation variationnelle non-standard

L'idée des méthodes non-standards est d'introduire une deuxième inconnue  $u$ , liée à  $w$  par des relations différentes selon les méthodes, et de découper le problème (stationnaire) sous la forme :

$$(2.6.) \quad \begin{cases} \text{Trouver le couple } (u, \psi) \in X \times V \text{ solution de} \\ a(u, v) - b(v, \psi) = (f, v) \quad \forall v \in X \\ b(u, \phi) = (g, \phi) \quad \forall \phi \in V \end{cases}$$

avec des choix différents pour  $X, V, a(u, v), b(v, \phi), (f, v), (g, \phi)$  selon la méthode.

### 3. Formulation mixte de type Hellan-Hermann-Johnson

La formulation variationnelle est celle donnée en (2.6.) avec les choix suivants. Pour chaque entier  $k \geq 0$  on définit :

$$(3.1.) \quad X = \{ \underline{v} = (v_{ij}), i, j = 1, 2 ; v_{12} = v_{21} \text{ t.q. } v_{ij}|_T \in P_k(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ M_n(\underline{v}) \text{ "continu" aux interfaces} \}$$

(c'est-à-dire, pour chaque couple de triangles adjacents  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  :

$$M_n(\underline{v})^1|_{T_1 \cap T_2} = M_n(\underline{v})^2|_{T_1 \cap T_2} .$$

$$(3.2.) \quad V = \{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}) ; \phi|_T \in P_{k+1}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$$(3.3.) \quad a(\underline{u}, \underline{v}) = D \int_{\Omega} (u_{11}v_{11} + u_{22}v_{22} + 2(1-\nu)u_{12}v_{12} + \nu(u_{11}v_{22} + u_{22}v_{11})) d\Omega$$

$$(3.4.) \quad b(\underline{v}, \phi) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{ -D \{ (1-\nu) \int_T v_{ij}/j \phi/i dT + \nu \int_T (v_{11} + v_{22})/i \phi/i dT \} + \\ + \int_{\partial T} M_{nT}(\underline{v}) \phi/\tau ds \}$$

$$(3.5.) \quad (f, v) = 0$$

$$(3.6.) \quad (g, \phi) = \int_{\Omega} p \phi d\Omega$$

On obtient avec cette méthode une solution  $(\underline{u}, \psi)$  telle que :

$$u_{ij} \rightarrow w/ij \quad i, j = 1, 2 \\ \psi \rightarrow w .$$

Le cas dynamique revient ici à ajouter dans la deuxième équation de (2.6.) le terme

$$\rho e \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \phi \right)$$

### 4. Formulation hybride duale

La formulation variationnelle est du type (2.6.) avec les choix suivants. Pour chaque entier  $m, r, s$  ( $m \geq 1, r \geq 3, s \geq 1$ ), on définit :

$$(4.1.) \quad X = \{ \underline{v} = (v_{ij}), i, j = 1, 2, v_{12} = v_{21} \text{ t.q. } v_{ij}|_T \in P_m(T) \text{ et } Av = 0 \text{ ds } T, \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

où

$$(4.2.) \quad Av = D(v_{11}/11 + 2(1-\nu)v_{12}/12 + \nu v_{22}/22 + \nu(v_{11}/22 + v_{22}/11))$$



$$(4.3.) \quad V = \{ \phi \in C^1(\bar{\Omega}) : \phi|_{\partial T} \in P_r(\partial T), \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\partial T} \in P_s(\partial T), \Delta^2 \phi = 0 \text{ dans } T, \forall T \in T_h, \\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega \}$$

où  $P_r(\partial T)$  = espace des polynômes dont la restriction à chaque arête est un polynôme de degré  $r$ .

On remarque que la condition " $\Delta^2 \phi = 0$ " ne sera jamais utilisée, puisque la méthode ne fait intervenir que les valeurs de  $\phi, \phi/i$  aux interfaces.

$$(4.4.) \quad a(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{T \in T_h} \int_T (u_{11} v_{11} + 2(1-\nu) u_{12} v_{12} + u_{22} v_{22} + \nu(u_{11} v_{22} + u_{22} v_{11})) dT$$

$$(4.5.) \quad b(\underline{v}, \phi) = \sum_{T \in T_h} \int_{\partial T} (-M_n(\underline{v}) \frac{\partial \phi}{\partial n} + M_{n\tau}(\underline{v}) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + Q_n(\underline{v}) \phi) ds$$

$$(4.6.) \quad (f, \underline{v}) = -a(\underline{f}, \underline{v}) \text{ où } \underline{f} \text{ est solution de}$$

$$(4.7.) \quad \underline{A} \underline{f} = p \text{ dans } T \quad \forall T \in T_h$$

$$(4.8.) \quad (g, \phi) = -b(\underline{f}, \phi).$$

Avec cette méthode, on obtient une solution  $(\underline{u}, \psi)$  telle que

$$u_{ij} + f_{ij} \rightarrow w_{ij} \text{ dans } T, \forall T \in T_h, i, j = 1, 2$$

$$(\psi, \psi_{/1}, \psi_{/2}) \rightarrow (w, w_{/1}, w_{/2}) \text{ aux interfaces.}$$

Le cas dynamique n'a pas encore été étudié.

## 5. Élément TRIA HHJ1

Cet élément correspond à la formulation variationnelle (3.1) .... (3.6.) avec  $k = 0$ , de façon que l'expression de  $b(\underline{v}, \phi)$  se simplifie en

$$(5.1.) \quad b(\underline{v}, \phi) = \sum_{T \in T_h} \int_T M_{n\tau}(\underline{v}) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} ds$$

De plus, grâce à l'introduction des multiplicateurs de Lagrange, il n'est pas nécessaire d'imposer la continuité des moments normaux  $M_n(\underline{v})$  aux interfaces.

On introduit donc un espace

$$(5.2.) \quad Z = \{ \lambda \in P_0(\partial T) \quad \forall T \in T_h \}$$

$P_0(\partial T)$  = espace des polynômes dont la restriction à chaque arête est constante.

et une forme bilinéaire et continue

$$(5.3.) \quad c(\underline{v}, \lambda) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_{\partial T} \lambda M_n(\underline{v}) \, ds$$

où le multiplicateur  $\lambda$  a la signification physique de dérivée normale de la flèche sur chaque arête.

On réécrit le problème sous la forme :

$$(5.4.) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}, \psi, \mu) \in \tilde{X} \times V \times Z \text{ solution de} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) - b(\underline{v}, \psi) - c(\underline{v}, \mu) = 0 & \forall \underline{v} \in \tilde{X} \\ b(\underline{u}, \phi) = \int_{\Omega} p \phi \, d\Omega & \forall \phi \in V \\ c(\underline{u}, \lambda) = 0 & \forall \lambda \in Z \end{cases}$$

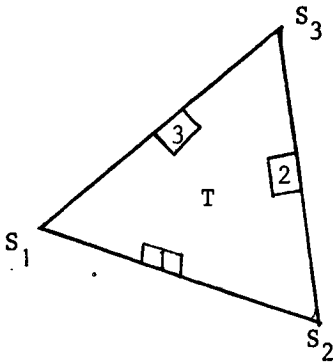
où  $\tilde{X} = \{ \underline{v} = (v_{ij}) \, i, j=1, 2 ; v_{12} = v_{21} ; v_{ij}|_T \in P_0(T) \, \forall T \in \mathcal{T}_h \}$ .

Exhibons les matrices et les seconds membres élémentaires.

Base pour  $\tilde{X}$  :  $\underline{v}^1 = (1, 0, 0)$ ,  $\underline{v}^2 = (0, 1, 0)$ ,  $\underline{v}^3 = (0, 0, 1)$

Base pour  $V$  :  $\phi^i = \lambda_i$ ,  $\lambda_i$  étant les coordonnées barycentriques de  $T$ ,  $i=1, 2, 3$ .

Base pour  $Z$  :  $\lambda^1 = 1$  sur l'arête 1,  $\lambda^1 = 0$  sur les autres  
 $\lambda^2 = 1$  sur l'arête 2,  $\lambda^2 = 0$  " "  
 $\lambda^3 = 1$  sur l'arête 3,  $\lambda^3 = 0$  " "



Remarque :

La matrice " $a(\underline{u}, \underline{v})$ " est diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice symétrique  $3 \times 3$  dont l'inverse est calculée explicitement. Par la substitution (dans chaque  $T \in \mathcal{T}_h$ )

$$(5.5.) \quad \underline{U} = A^{-1} B \underline{\psi} + A^{-1} C \underline{u}$$

dans la première équation de (5.4.), on se ramène à résoudre un système linéaire avec la matrice de raideur élémentaire

$$[K_T] = \begin{bmatrix} B^T A^{-1} B & B^T A^{-1} C \\ C^T A^{-1} B & C^T A^{-1} C \end{bmatrix}$$

$$A = a(\underline{v}^j, \underline{v}^i) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad ; \quad B = b(\underline{v}^i, \phi^j) \quad i = 1, 3 \quad ; \quad j = 1, 3$$

$$C = c(\underline{v}^i, \lambda^j) \quad i = 1, 3 \quad ; \quad j = 1, 3 \quad ; \quad C^T, B^T = \text{transposées de } C, B$$

et le second membre élémentaire

$$\{b_T\} = \begin{pmatrix} \int_T p \phi^i dT \\ 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 3$$

Les contraintes sont calculées au barycentre  $(\bar{x}, \bar{y})$  de chaque triangle en utilisant (5.5.) et la relation

$$(5.6) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) = D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} -\nu_{11}^1(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & -\nu_{11}^3(\bar{x}, \bar{y}) \\ -\nu_{22}^1(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & -\nu_{22}^3(\bar{x}, \bar{y}) \\ \nu_{12}^1(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & \nu_{12}^3(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}}_\Lambda \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

### Conclusions

Avec cet élément on approche dans l'ordre

- 1) la valeur de la flèche  $w$  aux sommets de  $T_h$
- 2) la rotation  $\frac{\partial w}{\partial n}$  aux milieux des arêtes
- 3) les contraintes  $\sigma_{ij}$  au barycentre de chaque triangle.

BIBLIOTHEQUE 'ELAS'TICITE
ELEMENT FINI TRIA HHJ1

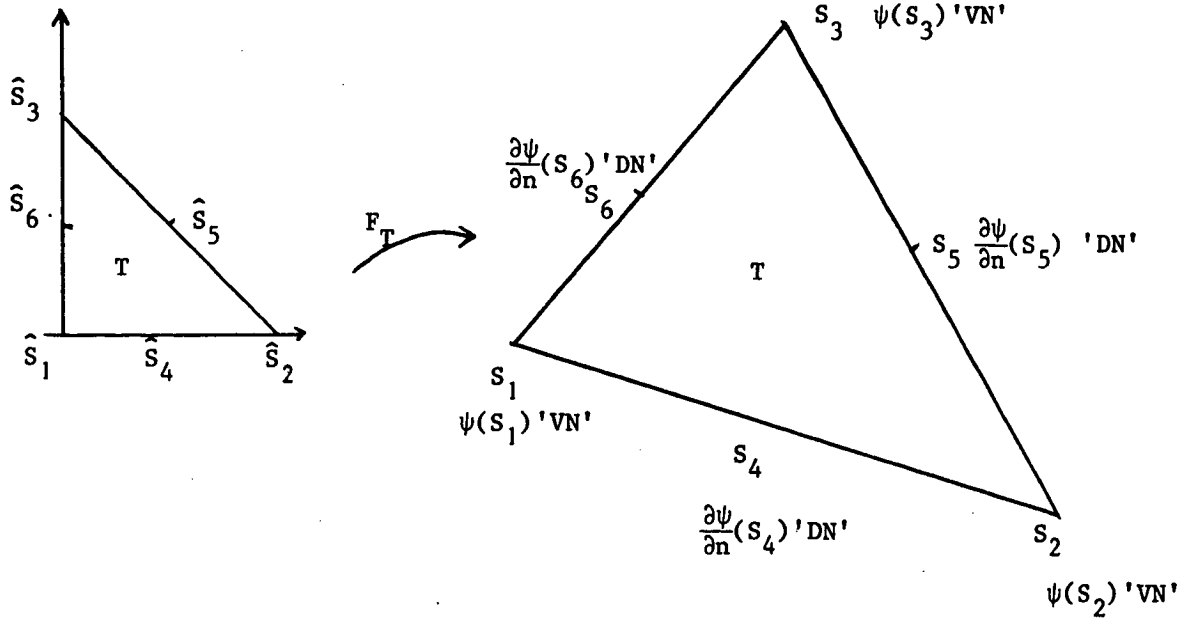
Donatella Marini - I.A.N.-CNR Pavia

1. L'ELEMENT :

DIMENSION DE L'ESPACE	: $\mathbb{R}^2$
INCONNUES VARIATIONNELLES	: $\psi = \text{flèche}$
FORMULATION E.D.P.	: (1.2) ... (1.5)
FORMULATION VARIATIONNELLE	: (2.6) (3.1) ... (3.6)
N° CODE	: 200 032
N° CODE GEOMETRIE	: Triangle droit (3)
INTERPOLATION	: $\psi _T \in P_1(T)$ ; $\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial n} \epsilon^P_0$ (arête)
	$n = \text{normale extérieure}$
NOMBRE DE TYPE DE NOEUDS	: 2
TYPE DE NOEUD 1	: VN ( $\psi$ )
TYPE DE NOEUD 2	: DN ( $\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ )
NOMBRE DE NOEUDS	: 6 (sommets et milieux des côtés)
COORDONNEES DES NOEUDS SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	: (0.,0.) (1.,0.) (0.,1.) (.5,0.) (.5,.5) (0.,.5)
TYPE DE CHAQUE NOEUD	: Noeuds de 1 à 3 => type 1 Noeuds de 4 à 6 => type 2
NOMBRE DE TYPE DE POINTS	: 1 (les sommets)
NOMBRE DE POINTS	: 3
COORDONNEES DES POINTS SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	: (0.,0.) (1.,0) (0.,1.)
NOMBRE DE TABLEAUX ASSOCIES	: 0
${}^t\{\psi_T\}$	: ${}^t\{\psi(S_1), \dots, \psi(S_3), \frac{\partial \psi}{\partial n}(S_4), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial n}(S_6)\}$
BLOCAGE DES D.D.L.	: Conditions limites (1.2) => $\psi(S) = 0$ , S sommet
	$\frac{\partial \psi}{\partial n}(S) = 0$ , S milieu de côté
	Conditions limites (1.3) => $\psi(S) = 0$ , S sommet
	Conditions limites (1.4) => aucun blocage.

FICHER NFPØBA

: non nécessaire



## 2. LES DONNEES A FOURNIR

Tous les réels sont en double précision.

### S.D. MILI

✕

$S$  :  $[M_T]$  : matrice triangulaire supérieure, intégration numérique aux 3 sommets

$$[M_T] = \rho e \int_T \phi^i \phi^j \sim \rho e \frac{\text{aire}(T)}{3} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 3$$

données :  $\rho, e$  constantes dans le triangle.

$[K_T]$  : matrice triangulaire supérieure  
intégration exacte

données :  $E, \nu, e$  constantes dans le triangle

$\{\sigma_T\}$  : matrice rectangulaire intégration exacte  
(cf (5.6) (5.5))

données :  $E, \nu, e$  constantes dans le triangle

✕

✕

S.D. FORCE : NDSM    seconds membres ou cas de charge

✱

S { $b_T$ } intégration exacte

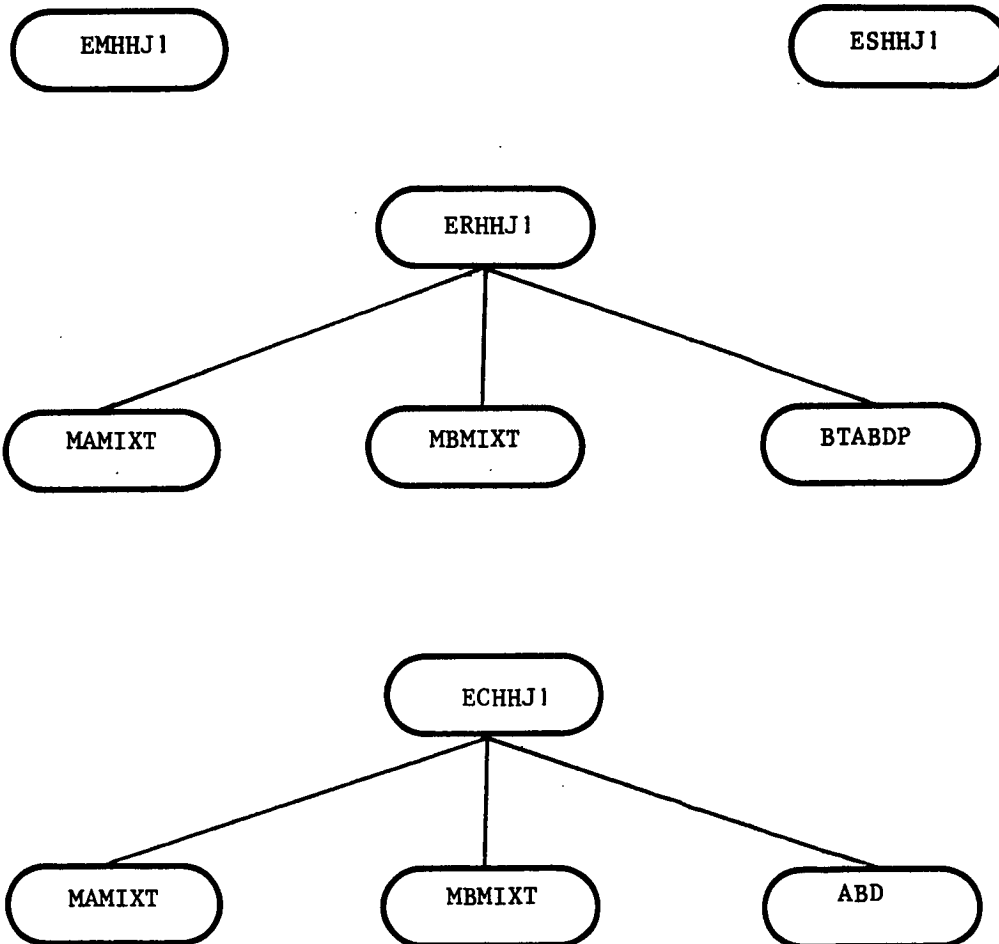
données :  $f(NDSM, I)$

$f(I, I)$  = valeur du I-ème cas de charge au barycentre du triangle.

✱

✱

Arbre d'appel des sous-programmes



6. Elément TRIA H31D

Cet élément correspond à la formulation variationnelle (4.1) ... (4.8) avec les choix

$$r = 3 \quad s = 1 \quad m = 1$$

Par conséquence, la condition  $Av = 0$  dans chaque élément T est automatiquement satisfaite.

Le tenseur  $\underline{f}$ , solution de  $A\underline{f} = p$  dans chaque élément, est choisi de la forme

$$\underline{f} = (0, f_{12} = f_{21}, 0).$$

La condition (4.7) s'écrit alors

$$(6.1) \quad \begin{cases} 2D(1-\nu)f_{12/12} = p & \text{dans T} \\ + \text{ C.L. arbitraires} \end{cases}$$

Une solution de (6.1) est

$$(6.2) \quad f(x,y) = f_{12} = f_{21} = \frac{k}{2D(1-\nu)}(x-x_1)(y-y_1)$$

où k = valeur de la charge p au barycentre de l'élément,

$(x_1, y_1)$  = coordonnées du premier sommet de T dans la transformation affine  $F_T$  de  $\hat{T}$  à T.

Remarque :

La matrice " $a(\underline{u}, \underline{v})$ " est diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice symétrique 9 x 9 dont l'inverse est calculée explicitement. On se ramène donc à résoudre un système linéaire des seules inconnues  $\underline{\psi}$  qui s'écrit en forme matricielle.

$$(6.3) \quad B A^{-1} B^T \underline{\psi} = B A^{-1} \underline{F} + \underline{G}$$

après la substitution (dans chaque élément)

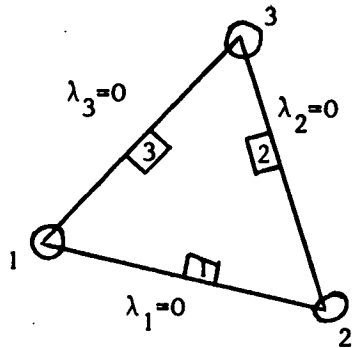
$$(6.4) \quad \underline{U} = A^{-1} \underline{F} + A^{-1} B^T \underline{\psi}$$

Exhibons les matrices et les seconds membres élémentaires

$$\begin{aligned} \text{Base pour X : } \underline{v}^1 &= (\lambda_1, 0, 0) & \underline{v}^2 &= (\lambda_2, 0, 0) & \underline{v}^3 &= (\lambda_3, 0, 0) \\ \underline{v}^4 &= (0, \lambda_1, 0) & \underline{v}^5 &= (0, \lambda_2, 0) & \underline{v}^6 &= (0, \lambda_3, 0) \\ \underline{v}^7 &= (0, 0, \lambda_1) & \underline{v}^8 &= (0, 0, \lambda_2) & \underline{v}^9 &= (0, 0, \lambda_3) \end{aligned}$$

Base pour V : espace des fonctions dont la restriction à chaque arête est un polynôme de degré 3, et la dérivée normale est de degré 1.

Le système des degrés de liberté est le suivant :



$$O = (VN, DX, DY)$$

Matrice de raideur :

$$\{K_T\} = B A^{-1} B^T$$

$$A = a(\underline{v}^j, \underline{v}^i) \quad i, j = 1, 9$$

$A^{-1}$  = inverse de A

$$B = b(\underline{v}^j, \phi^i) \quad i, j = 1, 9$$

$B^T$  = transposée de B

Seconds membres

$$\{b_T\} = -BA^{-1} \underline{F} + \underline{G}$$

$$\underline{F} = -a(f_k, \underline{v}^i) \quad i = 1, 9$$

$k = 1, \text{ NDSM}$

$$\underline{G} = -b(f_k, \phi^i) \quad i = 1, 9 ; k = 1, \text{ NDSM}$$

Contraintes

Les contraintes sont calculées au barycentre  $(\bar{x}, \bar{y})$  de l'élément à l'aide de (6.4) et de la relation

$$(6.5.) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) = D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}}_E \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} -\nu_{11}^1(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & -\nu_{11}^9(\bar{x}, \bar{y}) \\ -\nu_{22}^1(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & -\nu_{22}^9(\bar{x}, \bar{y}) \\ \nu_{12}^1(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & \nu_{12}^9(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}}_\Lambda \right] \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{f}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$(6.6.) \quad \{\sigma_T\} = \{D E \Lambda A^{-1} B^T \quad , \quad D E (\Lambda A^{-1} \underline{F} + \underline{f})\}$$



Conclusions

Avec cet élément on approche

- 1) la valeur de  $w$ ,  $w/1$ ,  $w/2$  aux sommets de  $T_h$
- 2) les contraintes  $\sigma_{ij}$  au barycentre de chaque élément.

BIBLIOTHEQUE 'ELAS'TICITE
ELEMENT FINI 'TRIA H31D'

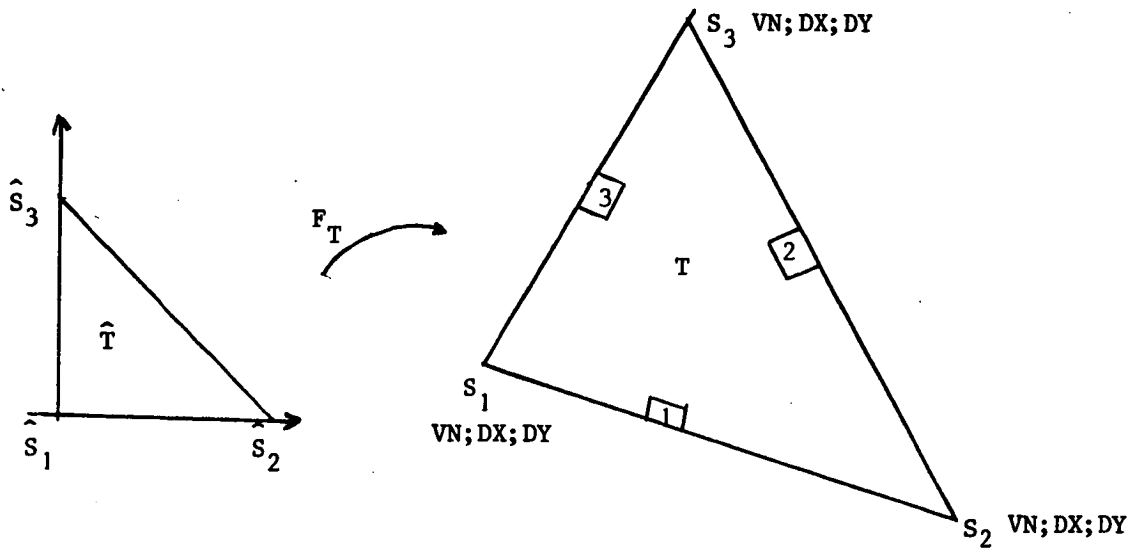
Donatella Marini IAN-CNR Pavia

1. L'ELEMENT

DIMENSION DE L'ESPACE	: $\mathbb{R}^2$
INCONNUES VARIATIONNELLES	: $\psi = \text{flèche}$
FORMULATION E.D.P.	: (1.1) ... (1.4)
FORMULATION VARIATIONNELLE	: (2.6)(4.1) ... (4.8)
N° CODE	: 200 034
N° CODE GEOMETRIE	: (3) triangle droit
INTERPOLATION	: $\psi _{\partial T} \in P_3(\partial T), \frac{\partial \psi}{\partial n} _{\partial T} \in P_1(\partial T)$ n = normale extérieure
NOMBRE DE TYPE DE NOEUDS	: 1
NOMBRE DE D.D.L. EN CHAQUE NOEUD	: 3 (VN;DX;DY)
NOMBRE DE NOEUDS	: 3 (sommets)
COORDONNEES DES NOEUDS SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	: (0.,0.)(1.,0.)(0.,1.)
NOMBRE DE TYPE DE POINTS	: 1
NOMBRE DE POINTS	: 3
COORDONNEES DES POINTS SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	: (0.,0.)(1.,0.)(0.,1.)
NOMBRE DE TABLEAUX ASSOCIES	: 0
${}^t\{\psi_T\}$	: ${}^t\{\psi(S_1), D_x \psi(S_1), D_y \psi(S_1), \psi(S_2), D_x \psi(S_2), D_y \psi(S_2), \psi(S_3), D_x \psi(S_3), D_y \psi(S_3)\}$
BLOCAGE DES D.D.L.	: Conditions limites (1.2.) => $\psi(\text{noeud})=D_x \psi(\text{noeud})=D_y \psi(\text{noeud})=0$ Conditions limites (1.3.)= $\nabla \psi(\text{noeud})=0$ Conditions limites (1.4.) => aucun blocage

FICHER NFPØBA

: non nécessaire



2. LES DONNEES A FOURNIR

Tous les réels sont en double précision

S.D. MILI

\*  
\*

S [ $M_K$ ] n'existe pas

[ $K_T$ ] matrice triangulaire supérieure  
intégration exacte

données : E, v, e constantes dans le triangle

\*  
\*

S.D. FORCE : NDSM seconds membres ou cas de charge

\*  
\*

S : [ $b_T$ ] intégration exacte

données : f(NDSM, 1), E, v, e

f(I, 1) = valeur du I-ème cas de charge au barycentre de l'élément

E, v, e constantes dans l'élément

\*  
\*

S.D. MILI et FORCE : NDSM cas de charge

X

S  $[\sigma_T]$  : matrice rectangulaire intégration exacte  
(cf (6.5)-(6.6))

données : E,  $\nu$ , e , f(NDSM,1)

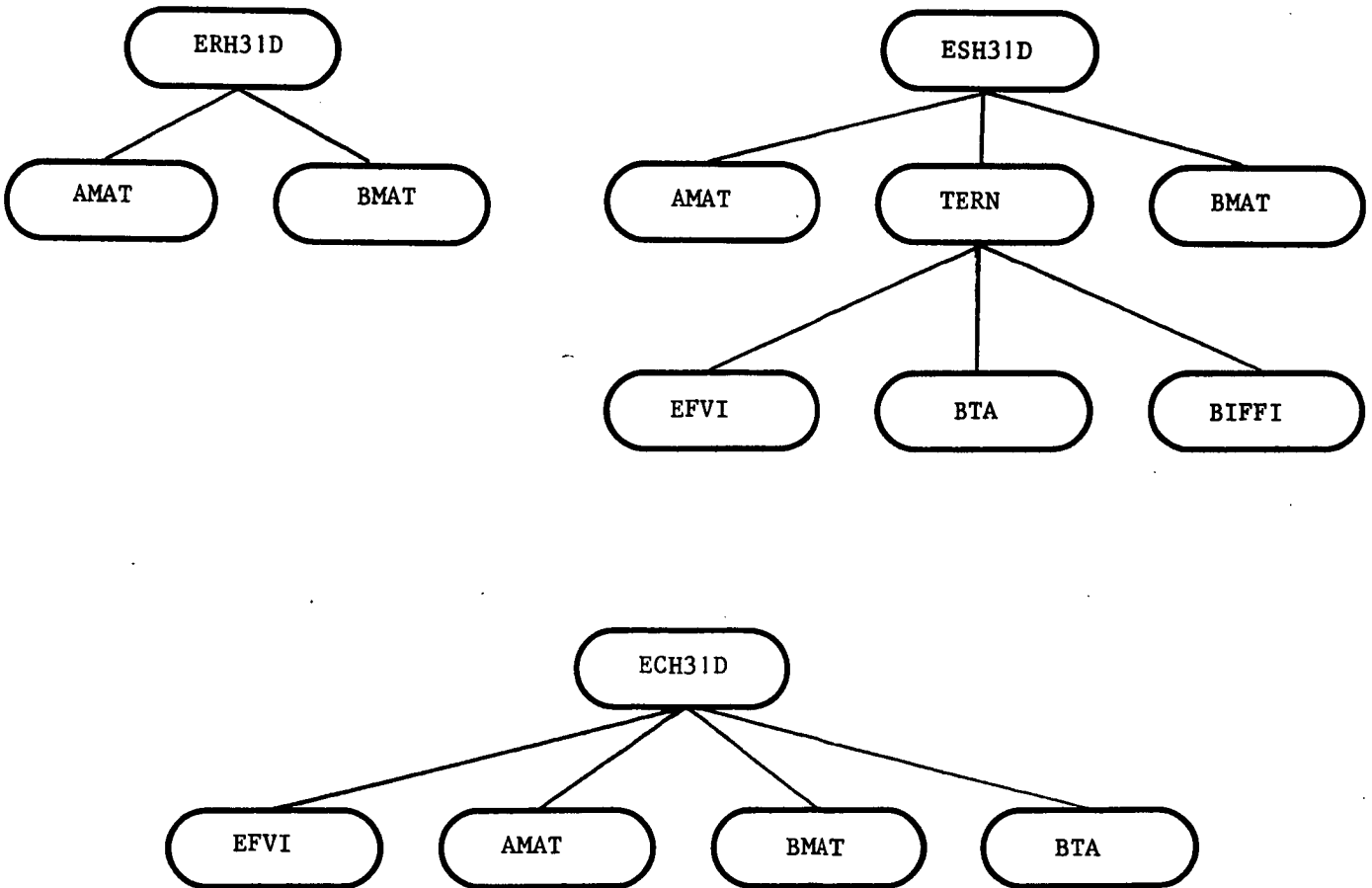
f(I,1) = valeur du I-ème cas de charge au barycentre de l'élément

E,  $\nu$ , e constantes dans l'élément

X

X

Arbre d'appel des sous-programmes

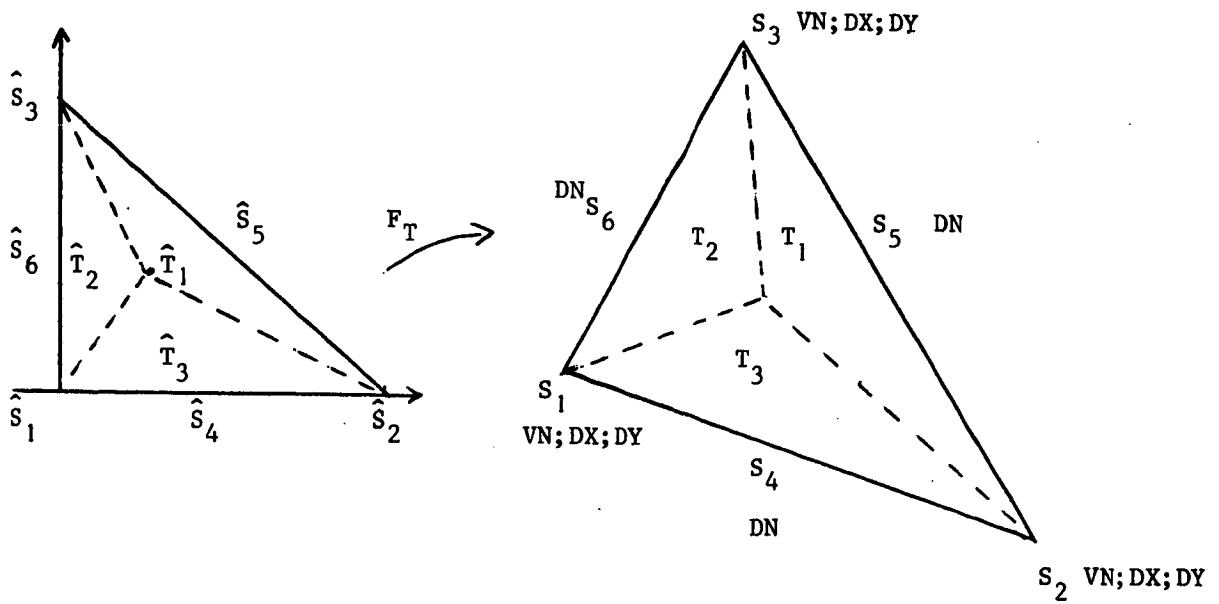


BIBLIOTHEQUE 'ELAS'TICITE ELEMENT FINI 'TRIA CLOT'
-------------------------------------------------------

Claudia Chinosi IAN-CNR, Pavia

### 1. L'ELEMENT

DIMENSION DE L'ESPACE	: $\mathbb{R}^2$
INCONNUES VARIATIONNELLES	: $\psi = \text{déplacement normal}$
FORMULATION E.D.P.	: (1.2) ... (1.5)
FORMULATION VARIATIONNELLE	: (2.1) ... (2.3)
N° CODE	: 200 033
N° CODE GEOMETRIQUE	: Triangle droit (3)
INTERPOLATION	: $\psi _{T_i} \in P_3(T_i) \quad T_i \in T \quad i = 1, 3$
NOMBRE DE TYPE DE NOEUDS	: 2
TYPE DE NOEUD 1	: les sommets ; D.D.L.: VN;DX;DY
TYPE DE NOEUD 2	: les milieux des arêtes, D.D.L. : DN
NOMBRE DE NOEUDS	: 6
COORDONNEES DES NOEUDS SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	: (0.,0.) (1.,0.) (0.,1) (.5,0.) (.5,.5) (0.,.5)
NOMBRE DE POINTS	: 3 (sommets)
COORDONNEES DES POINTS DE L'ELEMENT DE REFERENCE	: (0.,0.) (1.,0.) (0.,1.)
NOMBRE DE TABLEAUX ASSOCIES	: 0
${}^t \{\psi_T\}$	: ${}^t \{ \psi(S_1), D_x \psi(S_1), D_y \psi(S_1), \psi(S_2), D_x \psi(S_2), D_y \psi(S_2), \psi(S_3), D_x \psi(S_3), D_y \psi(S_3), \frac{\partial \psi}{\partial n}(S_4), \frac{\partial \psi}{\partial n}(S_5), \frac{\partial \psi}{\partial n}(S_6) \}$
BLOCAGE DES D.D.L.	: Conditions limites (1.2) $\Rightarrow \psi(S) = D_x \psi(S) = D_y \psi(S) = 0 \quad \forall S \text{ sommet}$ $\frac{\partial \psi}{\partial n}(S) = 0 \quad \forall S \text{ milieu de côté}$ Conditions limites (1.3) $\Rightarrow \psi(S) = 0 \quad \forall S \text{ sommet}$ Conditions limites (1.4) $\Rightarrow$ aucun blocage
FICHIER NFPØBA	: non nécessaire



## 2. LES DONNEES A FOURNIR

Tous les réels sont en double précision.

### S.D. MILI

✱

$S : [M_T]$  : matrice triangulaire supérieure intégration numérique.

Formule à 7 points dans chaque sous triangle (cf Zienkiewicz)

données :  $\rho, e$ , constantes dans l'élément

$[K_T]$  : matrice triangulaire supérieure intégration exacte.

données :  $E, \nu, e$  constantes dans l'élément

$[\sigma_T]$  : matrice rectangulaire exacte.

les contraintes sont calculées au barycentre de l'élément par la relation

$$[\sigma_T] (G) = D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w/xx \\ -w/yy \\ w/xy \end{pmatrix} \quad (G)$$

données :  $E, \nu, e$  constantes dans l'élément

✱

✱

S.D. FORCE : NDSM seconds membres ou cas de charge

✕

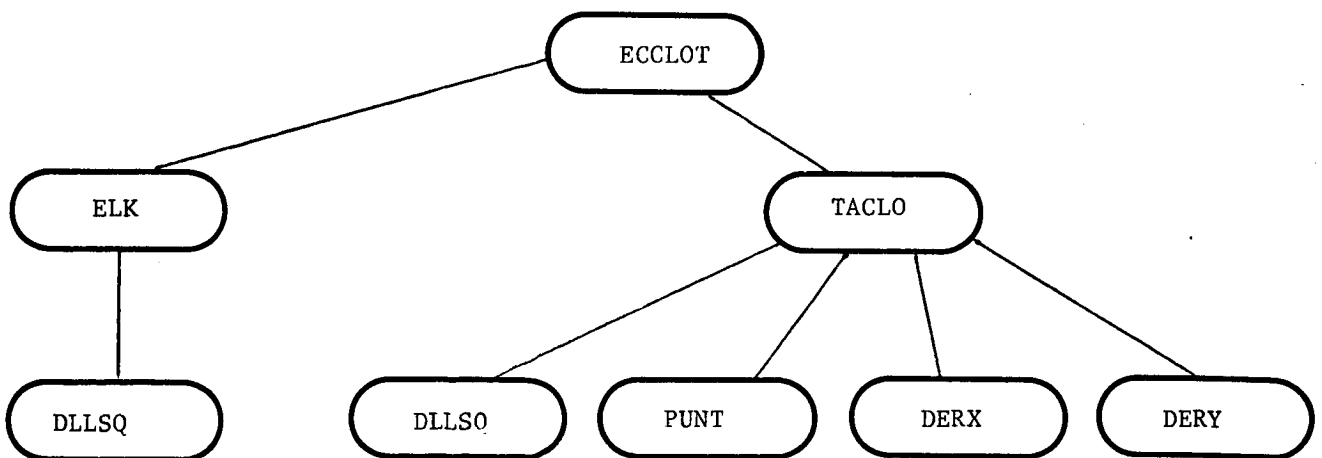
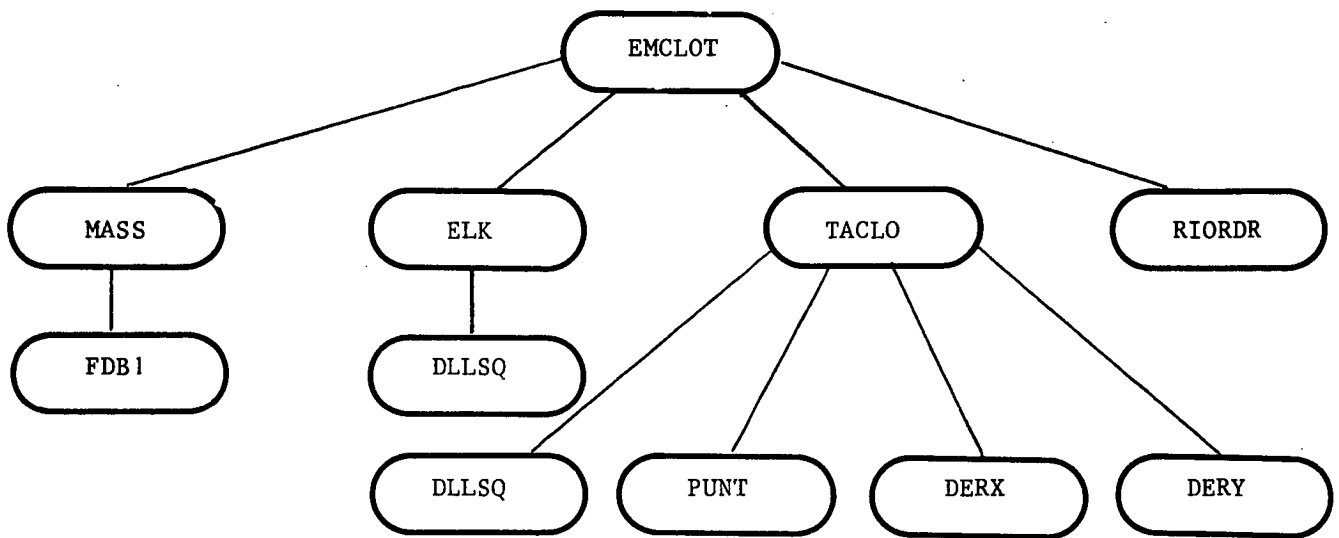
S [b<sub>T</sub>] : intégration numérique aux 3 milieux des côtés  
données : f(NDSM,3)

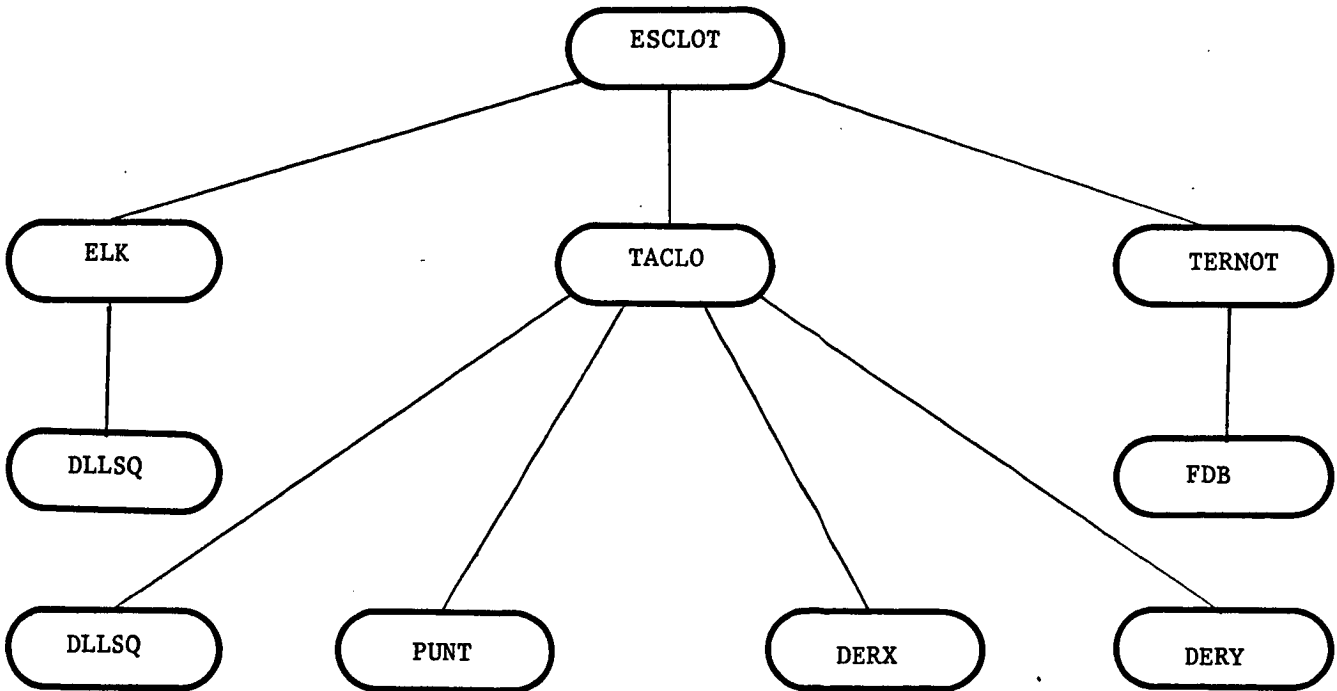
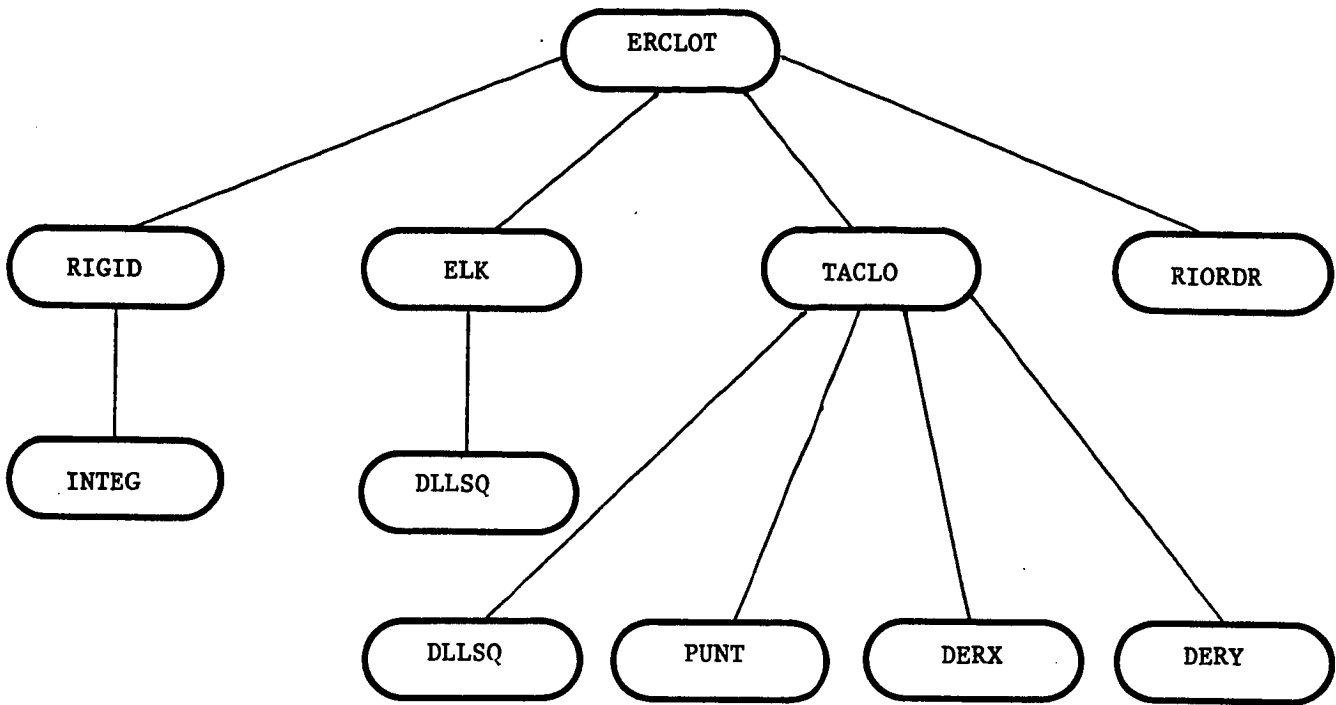
f(I,J) = valeur du I-ème cas de charge au J-ème sommet de l'élément.

✕

✕

Arbre d'appel des sous-programmes







### 7. Expériences numériques

Les trois éléments présentés ont été testés sur un problème modèle simple :

$$\begin{cases} D \Delta^2 w = p & \text{si } \Omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega = ]0,1 [X] 0,1 [$

$$E = 0.3D+7 \quad \nu = 0.25 \quad e = 0.1.$$

La solution exacte est connue et donnée par

$$w = x^2(1-x)^2 y^2(1-y^2)$$

Pour chaque élément les étapes de calculs sont les suivantes :

- 1- Maillage : MODULE APMEFI → S.D. NOPO
- 2- Interpolation: MODULE COMACO → S.D. MAIL et COOR
- 3- Tableaux élémentaires, prise en compte des conditions limites ...
  - MODULE COMILI → S.D. MILI
  - MODULE COFORC → S.D. FORC
  - MODULE THELAS → S.D. TAE
  - MODULE CONDL1 → S.D. NDL1
  - MODULE COBDC1 → S.D. BDCL
- 4- Assemblage et résolution :
  - MODULE FRONT → S.D. B
- 5- Calcul des contraintes :
  - MODULE STRESS → S.D. TAE
- 6- Calcul de l'erreur relatif entre la solution approchée et la solution exacte.

Les tests ont été faits sur HONEYWELL 6040 de l'Université de Pavie.

- Comparaison des 3 éléments sur l'exemple test

1/A nombre d'éléments constant

ELEMENT	TRIAH31D	TRIAHHJ1	TRIA CLOT
NOMBRE D'ELEMENTS	200	200	200
NOMBRE DE NOEUDS	121	441	441
NOMBRE TOTAL DE D.L.	363	441	683
ERREUR SUR LE DEPLACEMENT	0.0241635	0.192991	0.0277166
ERREUR SUR LES ROTATIONS	0.012453		0.0220469
ERREUR SUR LA DERIVEE NORMALE		0.0688008	0.0253441
ERREUR SUR LES CONTRAINTES :			
$\sigma_{11}$	0.108565	0.255826	0.0318336
$\sigma_{12}$	0.0783014	0.782307	0.043715
$\sigma_{22}$	0.108556	0.255828	0.0318414
TEMPS CALCUL DES DIFFERENTES ETAPES			
MAILLAGE	1'4"	45"	45"
INTERPOLATION	11"16	11"16	13"
TABLEAUX ELEMENTAIRES + C.L.	1'29"28	30"60	13'1"56
ASSEMBLAGE ET RESOLUTION	38"52	40"	1'27"86
CONTRAINTES	17"64	17"28	18"72
TEMPS CALCUL TOTAL	3'4"60	2'24"04	15'46"14

2/A nombre de degré de liberté constant

ELEMENT	TRIAH31D	TRIAHHJ1	TRIACLOT
NOMBRE D'ELEMENTS	220	180	112
NOMBRE DE NOEUDS	132	399	255
NOMBRE TOTAL DE D.L.	396	399	399
ERREUR SUR LE DEPLACEMENT	0.0222896	0.213540	0.0530935
ERREUR SUR LES ROTATIONS	0.0142449,0.0153683		0.0416023,0.0400475
ERREUR SUR LA DERIVEE NORMALE		0.0709892	0.0518003
ERREUR SUR LES CONTRAINTES :			
$\sigma_{11}$	0.110252	0.260097	0.0644374
$\sigma_{12}$	0.103510	0.802707	0.0785457
$\sigma_{22}$	0.109295	0.292089	0.0652924
TEMPS CALCUL DES DIFFERENTES ETAPES			
MAILLAGE	1'5"88	37"80	25"20
INTERPOLATION	11"16	11"16	11"16
TABLEAUX ELEMENTAIRES + C.L.	1'37"20	29"52	6'52"92
ASSEMBLAGE ET RESOLUTION	50"76	42"48	52"92
CONTRAINTES	19"44	16"20	13"32
TEMPS CALCUL TOTAL	3'4"44	2'17"16	8'35"52

