



Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105, 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 33

OPTIMISATION DES ANTENNES FILAIRES

Alain MERITET

Septembre 1980



Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 33

OPTIMISATION DES ANTENNES FILAIRES

Alain MERITET

Septembre 1980

OPTIMISATION DES ANTENNES FILAIRES

Alain MERITET

-o-

RESUME

A partir de la formule de rayonnement du doublet élémentaire on calcule le champ rayonné à grande distance par une antenne filaire de forme quelconque sur laquelle la répartition du courant est supposée connue, puis à l'aide du calcul des variations on optimise la forme de celle-ci afin d'assurer le gain maximal dans une direction de l'espace.

ABSTRACT

Starting from the radiation formula for the elementary dipole, we compute at a large range the field produced by a curve shaped antenna and we use the Calculus of Variation in order to determine the shape of the curve which maximizes the effect.

1. - POSITION DU PROBLEME

Les antennes filaires directives existant actuellement sont le plus souvent réalisées à partir du groupement de conducteurs rectilignes, circulaires ou hélicoïdaux (antennes du type Yagi, antennes en V ou en losange, rideau d'antennes, cadre, antenne en hélice ...). Leur inconvénient réside surtout dans leurs dimensions et dans la limitation de leur gain.

Le but de cet article est de déterminer la forme d'éléments filaires plans présentant, pour un rayonnement équivalent aux antennes précédemment citées, un encombrement nettement inférieur. Les calculs sont faits dans le plan de l'antenne, c'est-à-dire en dimension deux mais leur généralisation à la dimension trois est aisée.

Pour cela, on utilise un conducteur ayant une forme telle que lorsqu'il est relié à une source H.F. les rayonnements émis par chaque petit élément de celui-ci, considéré comme un doublet rayonnant élémentaire, se combinent pour donner l'effet directif cherché, ceci étant réalisé grâce au déphasage dû à la circulation du courant haute fréquence le long de l'antenne et au déphasage dû aux variations de la longueur du parcours de l'onde électromagnétique entre les différents points de l'antenne où elle est émise et le point de réception.

2. - NOTATIONS ET DEFINITIONS

Le plan est rapporté au repère orthonormé OXY, s désigne l'abscisse curviligne sur l'antenne plane Γ , déterminée par son équation paramétrique $(X,Y) = (X(s),Y(s))$ de classe $\mathcal{C}^2$ au moins (figure 1).

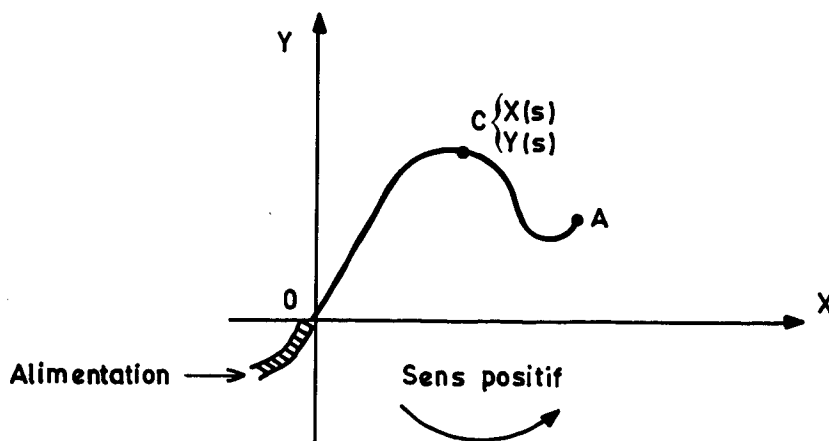


FIGURE 1

On suppose $-s_0 \leq s \leq s_0$, $X(-s) = X(s)$ et $Y(-s) = -Y(s)$. Notons que :

$$-s_0 \leq X(s_0) = \alpha_0 \leq s_0 \text{ et que } X'^2 + Y'^2 = \left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 = 1.$$

On suppose en outre Γ alimentée en 0 par un générateur dont la force électromotrice est sinusoïdale de fréquence f . Notons

$$(1) \quad k = 2 \pi \frac{f}{C} = \frac{\omega}{u}$$

où ω est la pulsation, $C = 3.10^8$ et $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Soit (ψ) la direction du plan OXY déterminée par l'angle ψ mesuré à partir de OX. On désigne par $E^*(\psi)$ le champ électrique (écrit sous forme complexe) rayonné par Γ à grande distance et porté par la direction perpendiculaire à (ψ) ; on définit $Q(\psi)$ par l'égalité :

$$(2) \quad E^*(\psi) = -i \frac{60 e^{-ikr}}{r} E(\psi)$$

où $i^2 = -1$ et r désigne la distance comprise entre 0 et le point où l'on considère le champ électrique. Soit $|E(\psi)| = |E(-\psi)|$ son module, $|E_{db}(\psi)|$ le module du champ rayonné par l'antenne doublet demi-onde dans les mêmes conditions expérimentales et $Q_\psi = 10 \log \frac{|E(\psi)|^2}{|E_{db}(0)|^2}$ le gain en décibels par rapport à l'antenne doublet demi-onde dans la direction (ψ) .

Rappelons que :

$$(3) \quad \int_0^z \cos^2 ku \, du = \frac{z}{2} + \frac{\sin 2 kz}{4k}$$

$$(4) \quad \int_0^z \sin^2 ku \, du = \frac{z}{2} - \frac{\sin 2 kz}{4k}$$

$$(5) \quad \int_0^z 2 \sin ku \cos ku \, du = \frac{1 - \cos 2kz}{2k}$$

Posons alors :

$$L = \frac{\alpha_o - s_o}{2} \quad M = \frac{\sin 2k(\alpha_o - s_o)}{4k} \quad N = \frac{1 - \cos 2k(\alpha_o - s_o)}{2k}$$

et :

$$A = L - M$$

$$B = L + M$$

3. - CHAMP RAYONNE DANS LA DIRECTION $\psi = 0$.

Bien que la formule générale donnant le rayonnement d'un conducteur de forme quelconque soit connue (cf. [3]), on partira dans notre étude de la formule de rayonnement du doublet élémentaire qui met mieux en évidence la méthode physique exposée en 1.

Soit $J(|s|) = J_R(|s|) + i J_I(|s|)$ le courant (écrit sous forme complexe) circulant sur l'antenne en opposition de phase de part et d'autre de la source 0. On sait que, dans ce cas (cf. [3][6]), le doublet élémentaire situé en $C(X,Y)$ avec $(\vec{i}, \vec{t}) = \theta^*$ où $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{t} = (X',Y')$ crée dans la direction (ψ) un champ :

$$(6) \quad dE(\psi) = \frac{k}{2} J(|s|) e^{ikX^*(s)} \sin(\psi - \theta^*) ds$$

où $X^*(s)$ est l'abscisse du point C dans le repère défini par les vecteurs $(\cos \psi, \sin \psi)$, $(-\sin \psi, \cos \psi)$ (figure 2).

Ceci s'écrit :

$$dE(\psi) = \frac{k}{2} J(|s|) e^{ik(\cos \psi.X + \sin \psi.Y)} (\sin \psi.X' - \cos \psi.Y') ds$$

Et par conséquent :

$$E(\psi) = \frac{k}{2} \int_{-s_o}^0 J(|s|) e^{ik(\cos \psi.X + \sin \psi.Y)} (\sin \psi.X' - \cos \psi.Y') ds \\ + \frac{k}{2} \int_0^{s_o} J(|s|) e^{ik(\cos \psi.X + \sin \psi.Y)} (\sin \psi.X' - \cos \psi.Y') ds$$

Posons $u = -s$ dans la première intégrale, on obtient, compte tenu des hypothèses faites sur (X, Y) :

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2} \int_{-s_0}^0 J(|s|) e^{ik(\cos \psi \cdot X + \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') ds \\ &= \frac{k}{2} \int_{-s_0}^0 J(|-u|) e^{ik(\cos \psi \cdot X - \sin \psi \cdot Y)} (-\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') (-du) \\ &= -\frac{k}{2} \int_0^{s_0} J(|u|) e^{ik(\cos \psi \cdot X - \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' + \cos \psi \cdot Y') du \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (7) \quad E(\psi) &= \frac{k}{2} \int_0^{s_0} J(|s|) [e^{ik(\cos \psi \cdot X + \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') \\ &\quad - e^{ik(\cos \psi \cdot X - \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' + \cos \psi \cdot Y')] ds \end{aligned}$$

et par suite :

$$(8) \quad E(0) = -k \int_0^{s_0} J(s) e^{ikX} Y' ds.$$

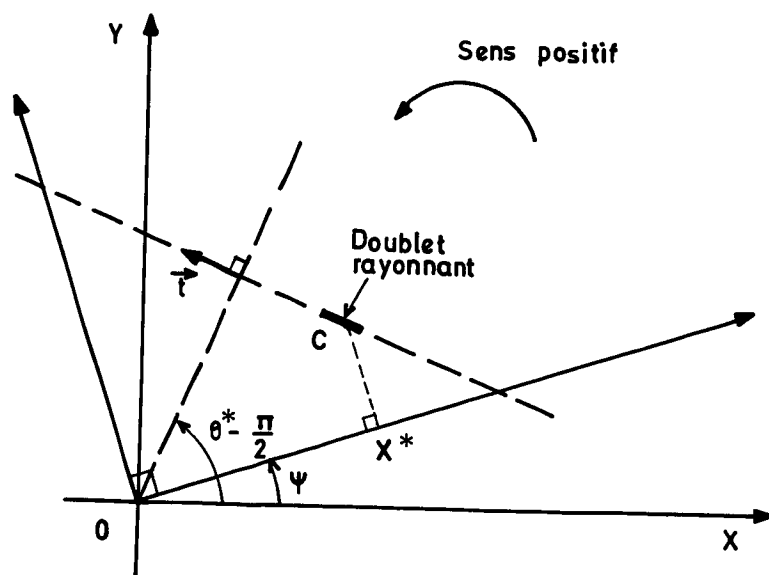


FIGURE 2

4. - OPTIMISATION. (I) CAS OU $J(|s|) = e^{-ik|s|}$

Cette hypothèse correspond, de façon approximative, à un fonctionnement en ondes progressives (cf. [6]), c'est-à-dire à une antenne se refermant sur une résistance ohmique égale à son impédance caractéristique. Dans ce cas, on peut déterminer l'antenne analytiquement.:

4.1. - Changement de variable

D'après (8), on obtient :

$$(9) \quad E(0) = -k \int_0^{s_0} e^{ik(X-s)} Y' ds,$$

soit :

$$(10) \quad z = z(s) = X-s \quad (-2 \leq z' = X' -1 \leq 0).$$

Il vient :

$$Y'^2 = -2z - z'^2$$

Posons d'une part :

$$(11) \quad Y' = \varepsilon \sqrt{-2z' - z'^2}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $\varepsilon = 0$ lorsque $-2z' - z'^2 = 0$

et d'autre part :

$$(12) \quad -\infty \leq s' = \frac{1}{z'} \leq -\frac{1}{2}$$

Comme la fonction ε ne varie qu'en des points isolés et que :

$$z(0) = 0 \quad z(s_0) = \alpha_0 - s_0$$

on a d'après (10), (11), (12) :

$$\begin{aligned}
 -k \int_0^{s_0} e^{ik(X-s)} Y' ds &= -k \int_0^{s_0} e^{ikz} \epsilon \sqrt{-2z' - z'^2} ds \\
 &= -k \int_{z(0)}^{z(s_0)} e^{ikz} \epsilon \sqrt{-\frac{2}{s'} - \frac{1}{s'^2}} s' dz \\
 &= k \int_0^{\alpha_0 - s_0} e^{ikz} \epsilon \sqrt{-2s' - 1} dz
 \end{aligned}$$

Alors, d'après (9), chercher X rendant $|E(0)|$ extrémal revient à chercher une fonction $s(z)$ rendant extrémal la quantité :

$$\left| k \int_0^{\alpha_0 - s_0} e^{ikz} \epsilon \sqrt{-2s' - 1} dz \right|$$

Remarque 1 : On a alors :

$$\begin{aligned}
 (13) \quad |E(\psi)|^2 &= \left| \frac{k}{2} \int_0^{\alpha_0 - s_0} e^{ik(\cos \psi \cdot [s+z] + \sin \psi \cdot Y(z) - s)} \right. \\
 &\quad \times (\sin \psi \cdot [s'+1] + \cos \psi \cdot \epsilon \sqrt{-2s'-1}) dz \\
 &\quad \left. - \frac{k}{2} \int_0^{\alpha_0 - s_0} e^{ik(\cos \psi \cdot [s+z] - \sin \psi \cdot Y(z) - s)} \right. \\
 &\quad \times (\sin \psi \cdot [s'+1] - \cos \psi \cdot \epsilon \sqrt{-2s'-1}) dz \left. \right|^2
 \end{aligned}$$

Remarque 2 : L'expression du champ dans la direction (ψ) montre que :

$$(14) \quad E(\pi) = k \int_0^{s_0} e^{ik(-X-s)} Y' ds$$

ce qui met en évidence la directivité de l'antenne.

4.2. - Equation d'Euler

Soit :

$$\overline{\mathcal{F}} = \{s : z \mapsto s(z) \text{ } (\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}), s \in \mathcal{C}^2, s(0) = 0, s(\alpha_0 - s_0) = s_0\},$$

$$\overline{\mathcal{F}}_h = \{s \in \overline{\mathcal{F}}, k \int_0^{\alpha_0 - s_0} \sin kz \cdot \varepsilon \sqrt{-2s' - 1} dz = h\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} |k \int_0^{\alpha_0 - s_0} e^{ikz} \cdot \varepsilon \sqrt{-2s' - 1} dz|^2 &= k^2 \left| \int_0^{\alpha_0 - s_0} \cos kz \cdot \varepsilon \sqrt{-2s' - 1} dz \right|^2 \\ &+ k^2 \left| \int_0^{\alpha_0 - s_0} \sin kz \cdot \varepsilon \sqrt{-2s' - 1} dz \right|^2 \end{aligned}$$

entraîne la formulation variationnelle suivante :

$$(15) \sup_{s \in \overline{\mathcal{F}}} |k \int_0^{\alpha_0 - s_0} e^{ikz} \cdot \varepsilon \sqrt{-2s' - 1} dz|^2 = \sup_h (h^2 + \sup_{s \in \overline{\mathcal{F}}_h} |k \int_0^{\alpha_0 - s_0} \cos kz \cdot \varepsilon \sqrt{-2s' - 1} dz|^2)$$

Il en résulte (cf. [4]), en introduisant le multiplicateur de Lagrange λ , l'équation d'Euler associée au problème variationnel (15), soit :

$$(16) \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [(\cos kz - \lambda \sin kz) \varepsilon \sqrt{-2s' - 1}] \right\} - \frac{\partial}{\partial s} [(\cos kz - \lambda \sin kz) \varepsilon \sqrt{-2s' - 1}] = 0$$

Remarque 3 : L'inégalité :

$$|k \int_0^{s_0} e^{ik(X-s)} Y' ds| \leq k \int_0^{s_0} |e^{ik(X-s)} Y'| ds$$

entraîne :

$$(17) \quad -k s_0 \leq h \leq k s_0.$$

4.3. - Solution de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler (16) s'écrit :

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [(\cos kz - \lambda \sin kz) \varepsilon \sqrt{-2s' - 1}] \right\} = 0$$

soit en développant :

$$\frac{d}{dz} \{ (\lambda \sin kz - \cos kz) \frac{\varepsilon}{\sqrt{-2s'-1}} \} = 0$$

Une intégrale première étant fournie par :

$$(18) \quad \frac{\lambda \sin kz - \cos kz}{\varepsilon \sqrt{-2s'-1}} = \mu$$

ce qui s'écrit

$$(\lambda \sin kz - \cos kz)^2 = \mu^2(-2s'-1)$$

d'où :

$$s' = -\frac{1}{2} - \frac{(\lambda \sin kz - \cos kz)^2}{2\mu^2}$$

et par intégration :

$$s = -\frac{z}{2} - \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 2kz}{4k} \right) - \frac{1}{2\mu^2} \left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 2kz}{4k} \right) + \frac{\lambda}{2\mu^2} \frac{1 - \cos 2kz}{2k} + K$$

Posons :

$$(19) \quad \frac{\lambda}{\mu} = \phi, \quad \frac{1}{\mu} = \Omega.$$

On a en notant que $s(0) = 0$ entraîne $K = 0$,

$$(20) \quad s = -\frac{z}{2} - \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 2kz}{4k} \right) - \frac{\Omega^2}{2} \left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 2kz}{4k} \right) + \frac{\phi\Omega}{2} \frac{1 - \cos 2kz}{2k}$$

4.4. - Détermination des paramètres ϕ et Ω

Posons :

$$(21) \quad \begin{cases} u = -Ak^2(N^2 - 4AB), \\ v = 2k(N^2 - 4AB), \\ w = 4B \text{ et } w' = 2N^2 k^2(s_0 + L). \end{cases}$$

Notons que $v^2 - 4 u w = 4 N^2 k^2 (N^2 - 4AB)$.

Utilisons les conditions imposées aux solutions de l'équation d'Euler. On a d'une part :

$$\begin{aligned} h &= k \int_0^{\alpha_0 - s_0} \sin kz \cdot \epsilon \sqrt{-2s' - 1} dz \\ &= k \int_0^{\alpha_0 - s_0} \sin kz \cdot \frac{\lambda \sin kz - \cos kz}{\mu} dz \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{h}{k} &= \int_0^{\alpha_0 - s_0} \frac{\lambda}{\mu} \sin^2 kz dz - \frac{1}{2\mu} \int_0^{\alpha_0 - s_0} 2 \sin kz \cos kz dz \\ &= \phi \left[\frac{\alpha_0 - s_0}{2} - \frac{\sin 2k(\alpha_0 - s_0)}{4k} \right] - \frac{\Omega}{2} \left[\frac{1 - \cos 2k(\alpha_0 - s_0)}{2k} \right] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{h}{k} &= \phi(L-M) - \frac{\Omega}{2} N \\ &= \phi A - \frac{\Omega N}{2} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$(22) \quad \Omega = \frac{2 \phi A k - 2 h}{N k} ;$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{\alpha_0 - s_0}{2} - \frac{\phi}{2} \left[\frac{\alpha_0 - s_0}{2} - \frac{\sin 2k(\alpha_0 - s_0)}{4k} \right] - \frac{\Omega}{2} \left[\frac{\alpha_0 - s_0}{2} + \frac{\sin 2k(\alpha_0 - s_0)}{4k} \right] \\ &\quad + \frac{\phi \Omega}{2} \frac{1 - \cos 2k(\alpha_0 - s_0)}{2k} \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$s_o + L = -\frac{\phi^2}{2} (L-M) - \frac{\Omega^2}{2} (L+M) + \frac{\phi\Omega}{2} N$$

et :

$$(23) \quad 2(s_o + L) = -\phi^2 A - \Omega^2 B + \phi\Omega N$$

On en déduit, en tenant compte de (22) :

$$2(s_o + L) = -\phi^2 A - B\left(\frac{2\phi Ak - 2h}{Nk}\right)^2 + \phi N \frac{2\phi Ak - 2h}{Nk}$$

soit :

$$2N^2 k^2 (s_o + L) = -\phi^2 A N^2 k^2 - B(4\phi^2 A^2 k^2 + 4h^2 - 8\phi Akh) + 2\phi^2 A N^2 k^2 - 2h \phi N^2 k$$

d'où l'égalité :

$$(24) \quad -Ak^2 \phi(N^2 - 4AB) + 2kh\phi(N^2 - 4AB) + 4Bh^2 + 2N^2 k^2 (s_o + L) = 0.$$

Ce qui donne en résolvant (24) et en utilisant (22) :

$$(25) \quad \phi = \frac{1}{2u} (-vh \pm \sqrt{h^2(v^2 - 4uw) - 4uw'}) ,$$

$$(26) \quad \Omega = \frac{1}{2uNk} (\pm 2 Ak \sqrt{h^2(v^2 - 4uw) - 4uw'}) .$$

4.5. - Expression de $|E(O)|^2$

Les égalités :

$$\begin{aligned} k \int_0^{\alpha_o - s_o} \cos kz \cdot \epsilon \sqrt{-2s' - 1} dz &= k \int_0^{\alpha_o - s_o} \cos kz \frac{\lambda \sin kz - \cos kz}{\mu} dz \\ &= k \int_0^{\alpha_o - s_o} \phi \sin kz \cos kz dz - k \int_0^{\alpha_o - s_o} \Omega \cos^2 kz dz \\ &= \frac{k\phi}{2} \frac{1 - \cos 2k(\alpha_o - s_o)}{2k} - k\Omega \left(\frac{\alpha_o - s_o}{2} + \frac{\sin 2k(\alpha_o - s_o)}{4k} \right) \end{aligned}$$

entraînent, compte tenu de (22) :

$$(27) \quad |E(0)|^2 = h^2 + k^2 \left(B\Omega - \frac{\phi N}{2} \right)^2.$$

4.6. - Equations paramétriques des antennes optimisées

On a d'une part :

$$\frac{dX}{dz} = \frac{d(s+z)}{dz} = \frac{ds}{dz} + 1.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dz} &= \frac{dY}{ds} \cdot \frac{ds}{dz} = \epsilon \sqrt{-2 \frac{dz}{ds} - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \cdot \frac{ds}{dz} \\ &= \epsilon \sqrt{\left(-2 \frac{ds}{dz} - 1\right) \left(\frac{ds}{dz}\right)^2} \cdot \frac{ds}{dz} \\ &= \epsilon \frac{\sqrt{-2s'-1}}{|s'|} s' = -\epsilon \sqrt{-2s'-1} \\ &= -(\phi \sin kz - \Omega \cos kz). \end{aligned}$$

D'où, par intégration, la représentation paramétrique d'un des deux brins de l'antenne :

$$(28) \quad \begin{cases} X(z) = \frac{2 - \phi^2 - \Omega^2}{4} z + \frac{\phi^2 - \Omega^2}{8k} \sin 2kz + \phi\Omega \frac{1 - \cos 2kz}{4k} \\ Y(z) = \frac{\Omega}{k} \sin kz + \frac{\phi}{k} (\cos kz - 1) \end{cases}$$

avec $\alpha_0 - s_0 \leq z \leq 0$.

L'autre brin est alors obtenu par symétrie par rapport à l'axe OX.

4.7. - Existence d'un maximum relatif de $|E(0)|$.

On sait (cf. [4]) que seules les extrémales, solutions de l'équation d'Euler (16), peuvent éventuellement assurer l'existence d'un maximum relatif pour $|E(0)|$. Montrons que dans notre cas c'est ce qui se passe effectivement.

Posons :

$$F = F(z, s, s') = (\cos kz - \lambda \sin kz) \varepsilon \sqrt{-2s'-1}.$$

On a les égalités :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s'^2} = - (\cos kz - \lambda \sin kz) \frac{1}{(-2s'-1) \varepsilon \sqrt{-2s'-1}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s'} = 0.$$

La condition de Legendre (cf. [4]) est alors vérifiée, en effet les égalités précédentes impliquent :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s'^2}(z, s, s') = - (\cos kz - \lambda \sin kz) \frac{\mu^3}{(\lambda \sin kz - \cos kz)^3} = \frac{\mu^3}{(\lambda \sin kz - \cos kz)^2}.$$

Comme, en outre :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s'^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s'} \right)^2 = 0$$

les extrémales solutions de l'équation d'Euler (16) fournissent un maximum relatif car seul le module du champ nous intéresse.

5. - OPTIMISATION. (II) CAS OU $J(|s|) = \sin k (s_0 - |s|)$.

Cette hypothèse correspond de façon approximative à un fonctionnement en ondes stationnaires ([3], [6]), c'est-à-dire à une antenne dont l'extrémité de chacun des brins rayonnants est libre. Dans ce cas les solutions sont obtenues numériquement.

5.1. - Changement de variable

D'après (8), on a :

$$(29) \quad E(0) = -k \int_0^{s_0} \sin k (s_0 - s) e^{ikX_Y} ds.$$

Posons :

$$(30) \quad Y' = \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}$$

avec $\epsilon^* \in \{-1, 0, 1\}$, $\epsilon^* = 0$ lorsque $X'^2 = 1$.

Alors, chercher X rendant $|E(0)|$ extrémal revient à chercher une fonction $X(s)$ rendant extrémale la quantité

$$\left| k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ikX} \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds \right|$$

Remarque 4 : L'expression du champ dans la direction (ψ) montre que $E(\pi) = -E(0)$, ce qui entraîne $|E(\pi)| = |E(0)|$. De même on a $|E(\pi - \psi)| = |E(\psi)|$.

Remarque 5 : Sous ces hypothèses, on a pour l'antenne doublet :

$$|E_{db}(0)| = 1.$$

5.2. - Equation d'Euler

Soit :

$$\overline{Q} = \{X : s \mapsto X(s) \text{ } (\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}), X \in \mathcal{C}^2, X(0) = 0, X(s_0) = \alpha_0\}$$

$$\overline{Q}_h = \{X \in \overline{Q}, k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) \cdot \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds = h\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left| k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ikX} \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds \right|^2 &= k^2 \left| \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) \cos kX \cdot \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds \right|^2 \\ &+ k^2 \left| \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) \sin kX \cdot \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds \right|^2 \end{aligned}$$

entraîne la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} (31) \quad \sup_{X \in \overline{Q}} \left| k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ikX} \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds \right|^2 \\ = \sup_h (h^2 + \sup_{X \in \overline{Q}_h} \left| k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) \cos kX \cdot \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} ds \right|^2) \end{aligned}$$

Il en résulte (cf. [4]) en introduisant le multiplicateur de Lagrange λ , l'équation d'Euler associée au problème variationnel (31), soit :

$$(32) \quad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial X'} [\sin k(s_0 - s) \cdot (\cos kX - \lambda \sin kX) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}] \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial X} [\sin k(s_0 - s) (\cos kX - \lambda \sin kX) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}] = 0$$

et en dérivant :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sin k(s_0 - s) (\cos kX - \lambda \sin kX) \frac{-X'}{\epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}} \right\} \\ + k \sin k(s_0 - s) \cdot (\sin kX + \lambda \cos kX) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} = 0,$$

d'où en notant que :

$$\cos kX - \lambda \sin kX = A^* \sin(kX - \theta) \\ -(\sin kX + \lambda \cos kX) = A^* \cos(kX - \theta)$$

où :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad A^* = -\frac{1}{\sin \theta}, \quad (|\theta| = \frac{\pi}{2} \text{ si } \lambda = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta \neq 0).$$

On obtient en développant :

$$- \frac{X''}{(1 - X'^2) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}} \sin k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) - k \frac{X'}{\epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}} \sin k(s_0 - s) \cos(kX - \theta) \\ + \frac{kX'}{\epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}} \cos k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) - k \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2} \sin k(s_0 - s) \cos(kX - \theta) = 0$$

d'où après simplification

$$\frac{X''}{1 - X'^2} \sin k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) = k [\cos k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) \cdot X' - \sin k(s_0 - s) \cos(kX - \theta)]$$

et finalement :

$$(33) \quad X'' = k [\cotg k(s_0 - s) X' - \cotg (kX - \theta)] (1 - X'^2).$$

Les solutions à considérer sont celles qui vérifient $|X'| \leq 1$.

Remarque 6 : L'inégalité

$$| -k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ikX} Y' ds | \leq k \int_0^{s_0} |\sin k(s_0 - s)| |e^{ikX}| |Y'| ds$$

entraîne :

$$(34) \quad -ks_0 \leq h \leq ks_0.$$

5.3. - Détermination de la fonction ϵ^*

Posons :

$$G = G(x, X, X', \theta) = \sin k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}$$

On a les égalités :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G}{\partial X'^2} = - \sin k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) \frac{1}{(1 - X'^2) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} = - k^2 \sin k(s_0 - s) \sin(kX - \theta) \epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial X \partial X'} = - k \sin k(s_0 - s) \cos(kX - \theta) \frac{X'}{\epsilon^* \sqrt{1 - X'^2}}. \end{array} \right.$$

Comme l'on recherche les extrémales rendant le champ maximum, la condition de Legendre (cf. [4]) permet de déterminer la fonction ϵ^* . En effet, on doit avoir, en notant que seul le module du champ nous intéresse :

$$\forall x \quad \frac{\partial^2 G}{\partial X'^2} \leq 0 \quad (\text{ou } \geq 0)$$

d'où :

$$\forall x \quad -\sin k(s_0-s) \cdot \sin(kX-\theta) \frac{1}{(1-X'^2)^{\epsilon^*} \sqrt{1-X'^2}} \leq 0 \quad (\text{ou } \geq 0)$$

ce qui s'écrit encore :

$$(36) \quad \forall x \quad \epsilon^* \sin k(s_0-s) \sin(kX-\theta) \geq 0 \quad (\text{ou } \leq 0).$$

5.4. - Condition d'existence d'un maximum relatif de $|E(0)|$.

On utilise la méthode de Hilbert (cf. [5], [8]). Les notations sont celles de 5.3. Posons :

$$\tilde{z} = (x, X, \xi_0, \xi_1) \text{ et } \tilde{G}(\tilde{z}) = \xi_0 G(x, X, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \theta).$$

Compte tenu de la condition $|X'| \leq 1$ imposée avec (33), on peut supposer $\xi_0 \geq |\xi_1|$. Soient deux couples (ξ'_0, ξ'_1) , (ξ''_0, ξ''_1) vérifiant donc $\xi'_0 \geq |\xi'_1|$ et $\xi''_0 \geq |\xi''_1|$. On a alors

$$\sqrt{(\xi'_0 + \xi''_0)^2 - (\xi'_1 + \xi''_1)^2} \geq \sqrt{\xi'^2_0 - \xi'^2_1} + \sqrt{\xi''^2_0 - \xi''^2_1}$$

Par conséquent $-G$ définit une métrique convexe. On en déduit en procédant comme dans [8] que si l'on peut construire un champ de normales, les extrémales solutions de l'équation d'Euler (33) fournissent alors un maximum relatif car seul le module du champ est à considérer.

5.5. - Groupeement d'antennes parallèles. Application aux antennes du type YAGI

Les calculs sont faits pour deux antennes. Ils se généralisent aisément à n antennes. On considère donc les antennes $(X_1(s), Y_1(s))$ et $(X_2(s), Y_2(s))$ ayant leur origine $(X_1(0), Y_1(0))$ et $(X_2(0), Y_2(0))$ en $M_1(-l, 0)$ et $M_2(l, 0)$ et telles que $Y_1(s) = Y_2(s)$, $X_2(s) - X_1(s) = 2l$; $-s_0 \leq s \leq s_0$ (figure 3).

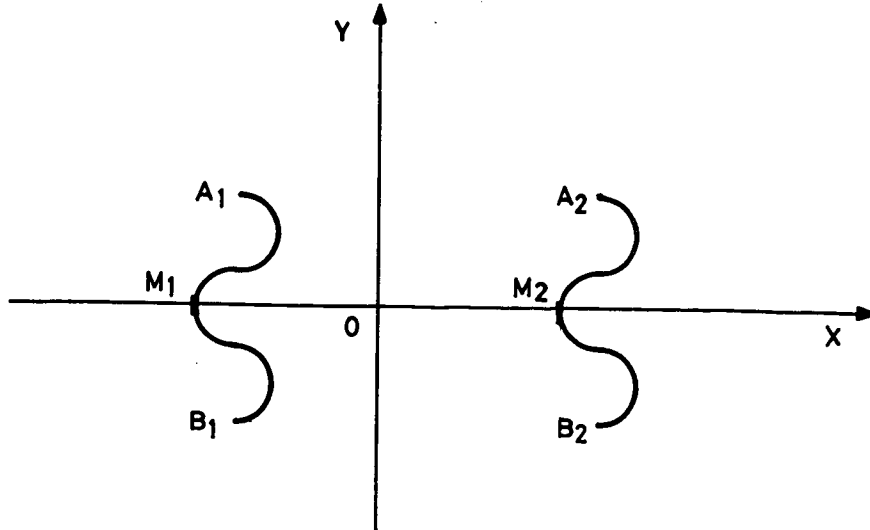


FIGURE 3

La deuxième antenne est alimentée avec un déphasage de ξ par rapport à la première.

Le champ rayonné s'écrit alors d'après (7) :

$$\begin{aligned}
 E(\psi) = & \frac{k}{2} \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) [e^{ik(\cos \psi \cdot (X-l) + \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') \\
 & - e^{ik(\cos \psi \cdot (X-l) - \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' + \cos \psi \cdot Y')] ds \\
 & + \frac{k}{2} \int_0^{s_0} [\sin k(s_0 - s) + \xi] [e^{ik(\cos \psi \cdot (X+l) + \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') \\
 & - e^{ik(\cos \psi \cdot (X+l) - \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' + \cos \psi \cdot Y')] ds.
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$E(0) = - \frac{k}{2} \int_0^{s_0} [\sin k(s_0 - s) e^{-ikl} + \sin\{k(s_0 - s) + \xi\} e^{ikl}] e^{ikX} Y' ds.$$

Dans le cas $\xi = 0$ ($\xi = \pi$), ceci donne :

$$\begin{aligned}
 E(0) = & - k e^{-ikl} (1 + e^{2ikl}) \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ikX} Y' ds \\
 (E(0) = & - k e^{-ikl} (1 - e^{2ikl}) \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ikX} Y' ds),
 \end{aligned}$$

la forme de l'antenne optimisée pouvant être obtenue à partir de (33).

Dans le cas où $\xi \notin \{0, \pi\}$, il est nécessaire de procéder à une nouvelle formulation du problème variationnel en séparant partie réelle et partie imaginaire de la fonctionnelle. Un autre exemple d'application est le cas où l'une des deux antennes n'est pas alimentée (antenne du type Yagi), dans ce cas, les courants, circulant sur les conducteurs, sont obtenus en utilisant les couplages existant entre ceux-ci.

5.6. - Antennes ayant deux axes de symétrie

On peut concevoir des antennes formées par la juxtaposition après retournement par rapport à OY de deux antennes du type précédent (figure 4).

Dans ce cas on vérifie, en considérant que le brin A'A est obtenu en "séparant" en deux le brin OA d'une antenne du type défini en 5.2., que le champ rayonné s'écrit sous la forme :

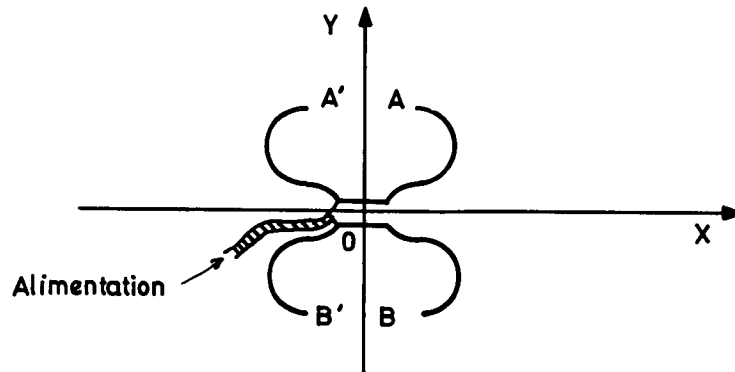


FIGURE 4

$$\begin{aligned}
 E(\psi) = & \left\{ \frac{k}{2} \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ik(\cos \psi \cdot X + \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') ds \right. \\
 & + \frac{k}{2} \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ik(-\cos \psi \cdot X + \sin \psi \cdot Y)} (-\sin \psi \cdot X' - \cos \psi \cdot Y') ds \} \\
 & + \left\{ -\frac{k}{2} \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ik(\cos \psi \cdot X - \sin \psi \cdot Y)} (\sin \psi \cdot X' + \cos \psi \cdot Y') ds \right. \\
 & \left. - \frac{k}{2} \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) e^{ik(-\cos \psi \cdot X - \sin \psi \cdot Y)} (-\sin \psi \cdot X' + \cos \psi \cdot Y') ds \right\}.
 \end{aligned}$$

$$= k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) [(\sin \psi.X' - \cos \psi.Y') \cos\{k(\cos \psi.X + \sin \psi.Y)\} - (\sin \psi.X' + \cos \psi.Y') \cos\{k(\cos \psi.X - \sin \psi.Y)\}] ds.$$

On en déduit en particulier :

$$E(0) = - 2k \int_0^{s_0} \sin k(s_0 - s) \cos(kX).Y' ds.$$

La forme des antennes rendant $E(0)$ maximal, étant obtenu à partir de 5.3. en faisant $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ dans les équations.

5.7. - Groupement d'antennes ayant deux axes de symétrie. Application aux antennes avec réflecteur

Les calculs sont faits pour deux antennes. Ils se généralisent aisément à n antennes. On considère deux antennes identiques à celles définies en 5.6. et disposées comme l'indique la figure 5, avec $(M_1A_1) = \{(X_1(s), Y_1(s)) ; 0 \leq s \leq s_0\}$ et $(M_2A_2) = \{(X_2(s), Y_2(s)) ; 0 \leq s \leq s_0\}$, la deuxième antenne étant alimentée avec un déphasage de ξ par rapport à la première :

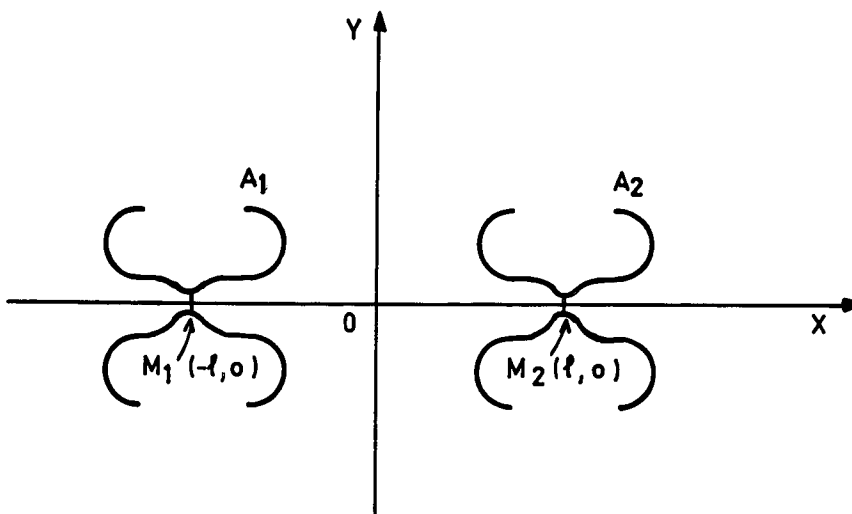


FIGURE 5

D'après 5.6., on a :

$$\begin{aligned}
 E(\psi) = & k \int_0^{s_0} \sin k(s_0-s) [(\sin \psi.X' - \cos \psi.Y') \cos\{k(\cos \psi.(X-l) + \sin \psi.Y)\} \\
 & - (\sin \psi.X' + \cos \psi.Y') \cos\{k(\cos \psi.(X-l) - \sin \psi.Y)\}] ds \\
 & + k \int_0^{s_0} \sin\{k(s_0-s) + \xi\} [(\sin \psi.X' - \cos \psi.Y') \cos\{k(\cos \psi.(X+l) + \sin \psi.Y)\} \\
 & - (\sin \psi.X' + \cos \psi.Y') \cos\{k(\cos \psi.(X+l) - \sin \psi.Y)\}] ds
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E(0) = & k \int_0^{s_0} \sin k(s_0-s) [-Y' \cos\{k(X-l)\} - Y' \cos\{k(X-l)\}] ds \\
 & + k \int_0^{s_0} \sin\{k(s_0-s) + \xi\} [-Y' \cos\{k(X+l)\} - Y' \cos\{k(X+l)\}] ds
 \end{aligned}$$

Alors si, $\xi = \pi$, ($\xi = 0$) :

$$\begin{aligned}
 E(0) = & -4k \sin k\ell \int_0^{s_0} \sin k(s_0-s) \sin kX.Y' ds \\
 (E(0) = & -4k \cos k\ell \int_0^{s_0} \sin k(s_0-s) \cos kX.Y' ds)
 \end{aligned}$$

La méthode d'optimisation s'applique comme en 5.5. En particulier, on note que dans le cas $\xi = \pi$ la théorie des images électriques montre que les valeurs de $E(\psi)$, ($-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$) ainsi déterminées coïncident avec le champ rayonné par un ensemble formé d'un réflecteur plan perpendiculaire à OX coupant OXY en OY et d'une antenne semblable à celle déterminée en 5.6. dont l'origine est en $M_2(\ell, 0)$. On vérifie d'ailleurs que dans ce cas $E(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. - SOLUTION NUMERIQUE

Le but de l'étude numérique est, d'une part, le choix des éléments filaires en fonction de certains critères donnés a priori (gain avant, gain avant-arrière, encombrement maximal, simplicité de la forme) et, d'autre part, une fois ce choix réalisé, de donner une représentation graphique des antennes et

de leur diagramme de rayonnement. Ce traitement numérique est fait dans les cas 4 et 5 pour des antennes simples, le cas des groupements d'antennes pouvant être traité de façon analogue.

La détermination des extrémales se fait dans le cas 4 en utilisant les formules (28) discrétisées, tandis que dans le cas 5, on procède à la résolution numérique de l'équation d'Euler (33). On utilise pour cela, alternativement, la méthode de Runge-Kutta (cf. [12]) et une méthode d'intégration numérique à pas variable (cf. [12]) au voisinage des singularités. Ceci donne l'abscisse de l'extrémale en fonction de l'abscisse curviligne. Il est alors nécessaire de déterminer la fonction ϵ . Cela est réalisé au moyen de la formule (36) discrétisée. L'ordonnée étant obtenue par une intégration de la formule (30) discrétisée.

Dans le cas 4, le module du champ rayonné dans la direction (ψ) s'obtient en discrétisant la formule (13) et en utilisant la méthode d'intégration par les trapèzes. Dans le cas 5, le module du champ rayonné s'obtient de la même manière en utilisant la formule (7) dans laquelle on a fait $J(|s|) = \sin k(s_0 - |s|)$.

Dans tous les cas, le pas de discrétisation est de l'ordre de 10^{-3} , ce qui semble donner un compromis satisfaisant entre les erreurs sur le résultat des intégrations, la précision de la résolution numérique de l'équation d'Euler (33) et la précision de la détermination des extrémales.

On se donne ensuite des données initiales : Fréquence de travail, longueur de l'élément filaire, abscisse de son extrémité (cas 4), pente à l'origine (cas 5) et l'on procède à une étude systématique des caractéristiques de rayonnement des antennes. Pour cela, on fait varier le paramètre h (les valeurs de ϕ et Ω en résultant à partir des formules (25), (26)) dans le cas 4 et le paramètre θ dans le cas 5. Le choix définitif étant effectué à partir des résultats obtenus. La représentation graphique des antennes et des diagrammes de rayonnement étant obtenue à partir de [9].

La méthode de calcul est exposée au moyen de la figure 6.

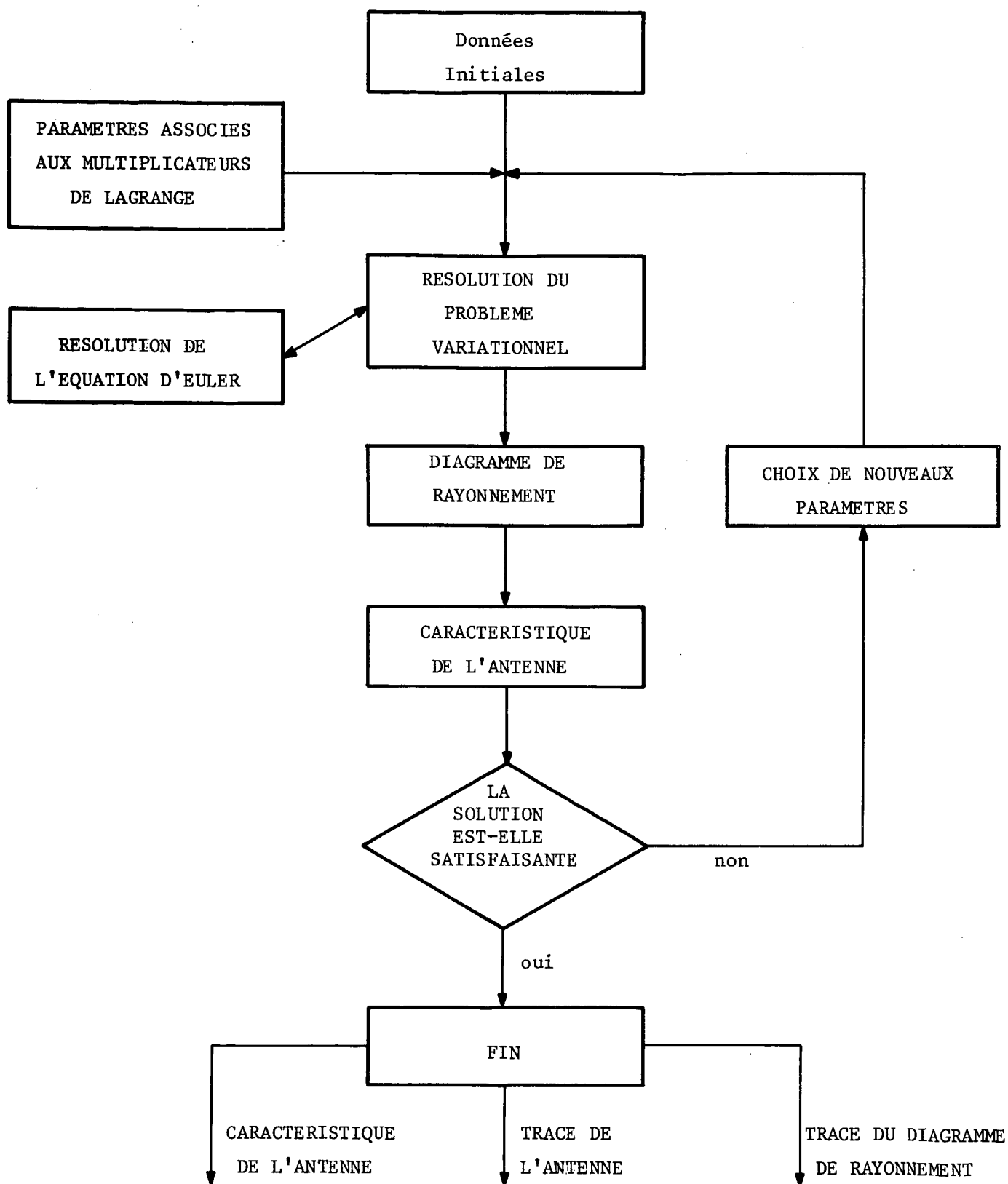


Figure 6 - Schéma du principe de calcul

7. - RESULTATS NUMERIQUES

Les résultats déjà obtenus montrent une diminution de la longueur des antennes (dimension sur l'axe correspondant à la direction de rayonnement maximal) de plus de 50 % (75 % dans les meilleurs cas) par rapport aux antennes de type Yagi existant actuellement, pour des performances identiques. On doit, cependant, noter que la largeur (dimension sur l'axe perpendiculaire à la direction de rayonnement maximal) est quelque peu accrue par rapport à ce type d'antennes.

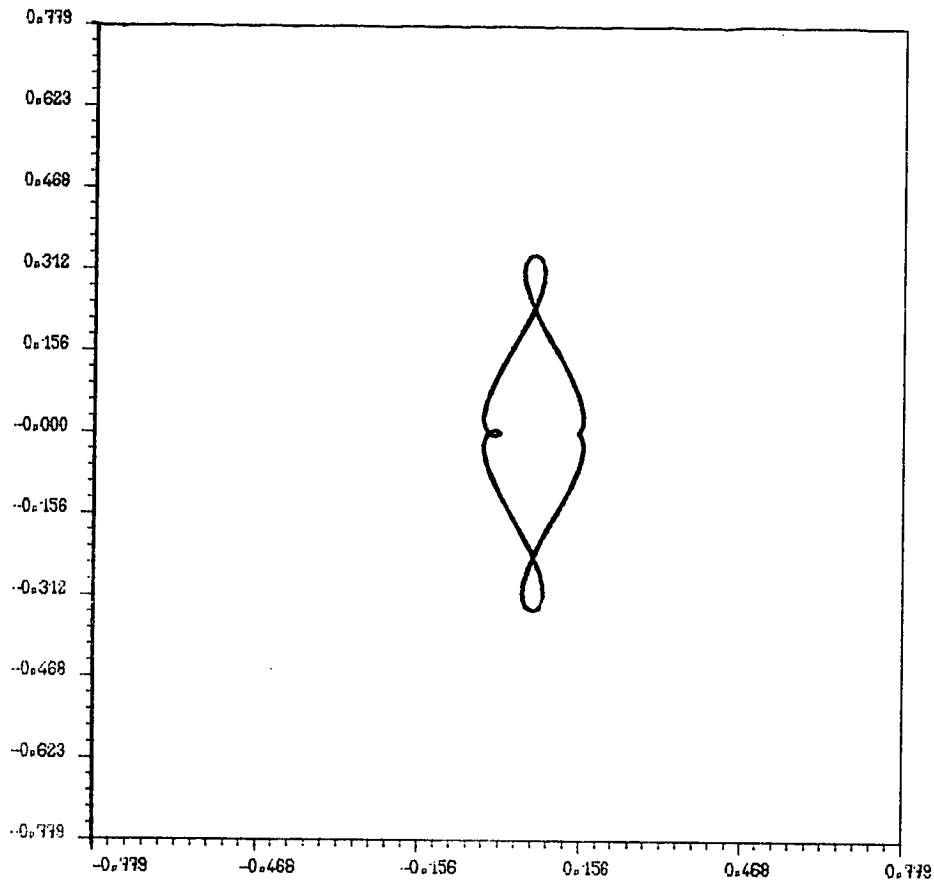
Voici donnée, à simple titre d'exemple, l'illustration graphique de quelques résultats numériques. Les figures 7.1.A. à 7.6.A. représentent des antennes fonctionnant en ondes progressives. L'échelle des longueurs (en mètre) est représentée sur le cadre. La fréquence de travail est d'environ 500 MHz (bande de télévision U.H.F.). Les paramètres repérant ces antennes sont inscrits à côté des dessins. Ce sont $k = 10$, s_0 longueur d'un élément filaire, ϕ et Ω qui fixent le rapport de la partie imaginaire à la partie réelle du champ rayonné, α_0 abscisse maximale de l'antenne et Q_0 gain en décibels dans la direction OX, par rapport à l'antenne doublet demi-onde alimentée par un courant de même intensité maximale (cf. Remarque 5). On constate que l'on a imposé $Y(\alpha_0 - s_0)$ voisin de 0 afin de pouvoir refermer l'antenne sur une résistance ohmique égale à son impédance caractéristique et que ces antennes ne comportent qu'une boucle. On note aussi que les valeurs de ϕ et Ω choisies ne sont pas celles donnant le champ de module maximum dans la direction $\psi = 0$, ce choix permettant par contre d'accroître la directivité. Les figures 7.1.B. à 7.6.B. représentent les diagrammes de rayonnement associés, c'est-à-dire une courbe en coordonnées polaires (r, ψ) telle que $r(\psi) = C \cdot |E(\psi)|$ où C est une constante. L'échelle est donnée sur le cadre et ici aussi on a $|E_{db}(0)| = 1$. On constate, ainsi que le laissait prévoir la formule (14), qu'il existe une forte directivité avant-arrière.

Les figures 8.1.A. à 8.6.A. représentent des antennes fonctionnant en ondes stationnaires. L'échelle des longueurs (en mètre) est portée sur le cadre. La fréquence de travail est d'environ 500 MHz. Les paramètres repérant ces antennes sont inscrits à côté des dessins. Ce sont $k = 10$, s_0 longueur d'un brin de l'antenne, θ qui est lié à la valeur de la partie imaginaire du champ rayonné, $X'(0)$ valeur de dX/ds au point $s = 0$ et Q_0 gain en décibels dans la direction OX par rapport au doublet demi-onde. L'interprétation physique des solutions est claire dans le cas où s_0 vaut une longueur d'onde. Sur une

longueur d'environ une demi-longueur d'onde, l'un des brins rayonnant est orienté vers les Y croissants et cela correspond à un courant positif, tandis que sur la longueur restante, ce même brin est orienté vers les Y décroissants alors que le courant correspondant est négatif, la superposition de ces deux phénomènes ayant pour conséquence la création d'un champ électrique colinéaire et de même sens que celui créé par la première moitié du brin, donc s'additionnant à celui-ci.

Les figures 8.1.B. à 8.6.B. représentent les diagrammes de rayonnement associé. On constate, comme l'indique la remarque 4 que le gain avant est égal au gain arrière.

Figure 7.1.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 0.7793 \\ \alpha_o &= 0.15 \\ \alpha_o - s_o &= -0.6293 \\ \phi &= -1.6706 \\ \Omega &= 0.4081 \\ Q_o &= 14.65 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 7.1.B.

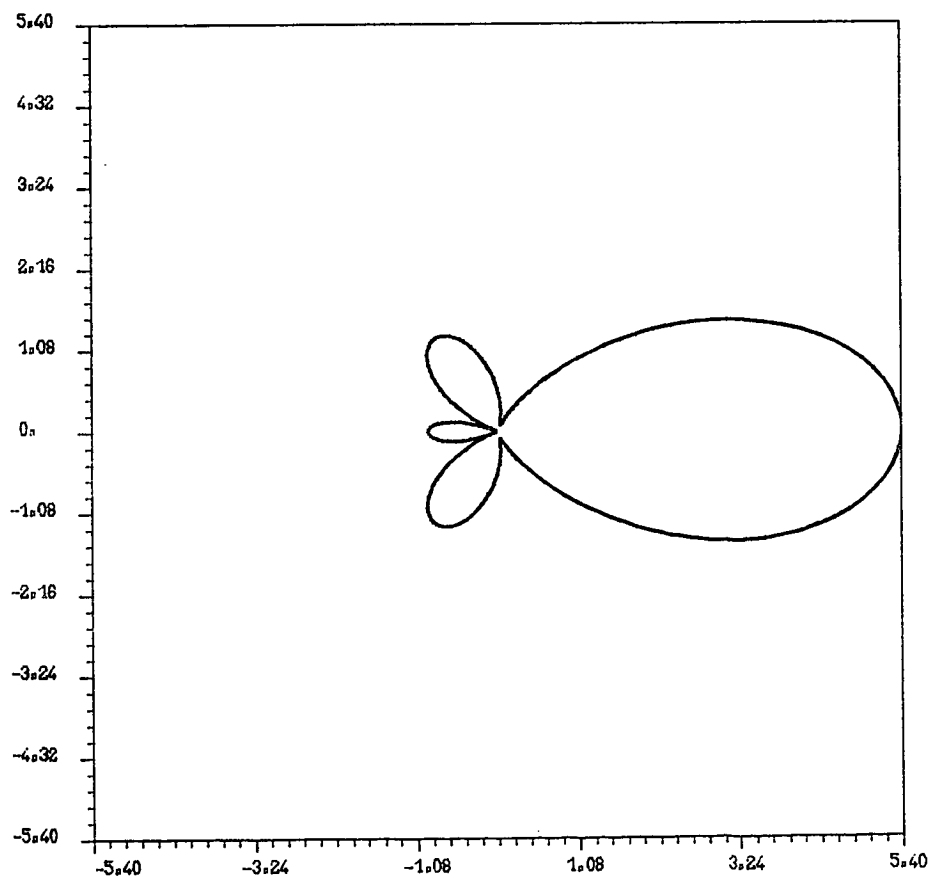
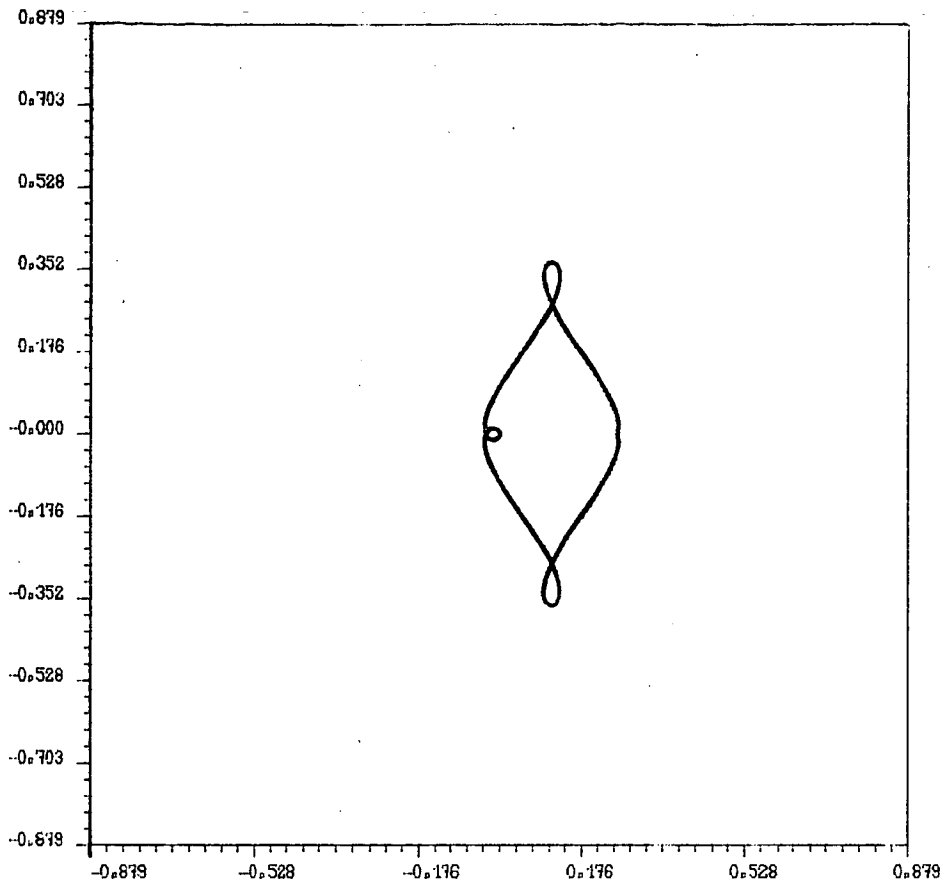


Figure 7.2.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 0.8793 \\ \alpha_o &= 0.25 \\ \alpha_o - s_o &= -0.6293 \\ \phi &= -1.7707 \\ \Omega &= 0.6765 \\ Q_o &= 15.50 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 7.2.B.

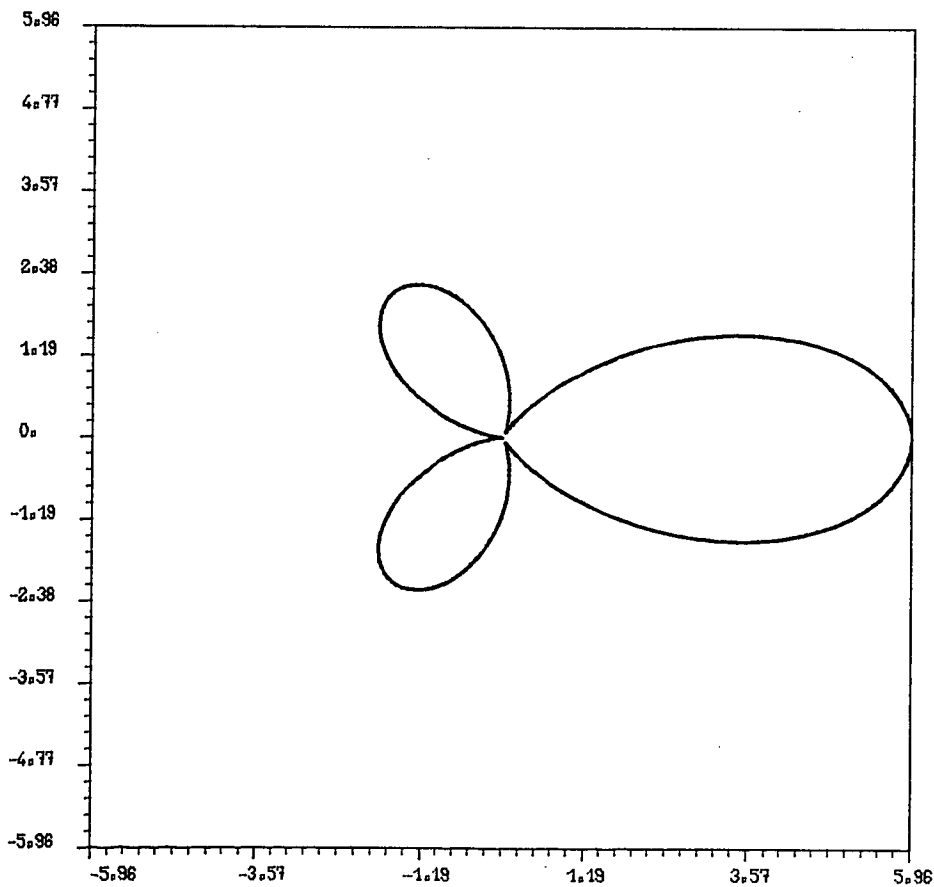
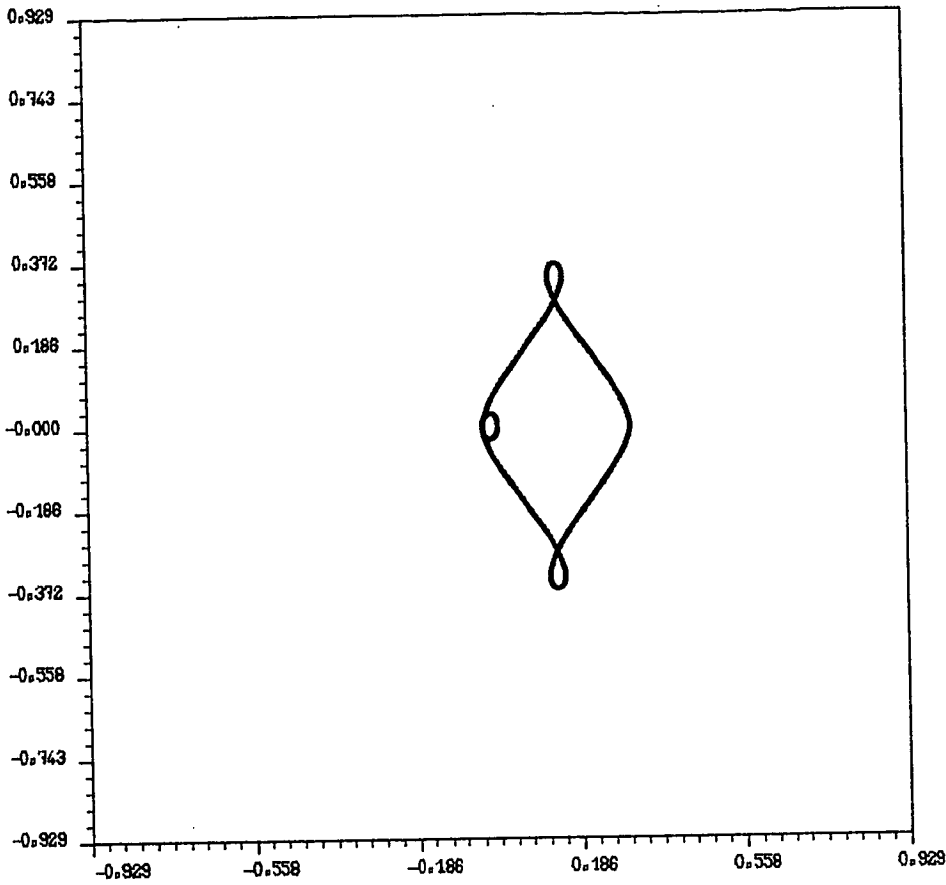


Figure 7.3.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 0.9293 \\ \alpha_o &= 0.3 \\ \alpha_o - s_o &= -0.6293 \\ \phi &= -1.6903 \\ \Omega &= 1.0258 \\ Q_o &= 15.87 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 7.3.B.

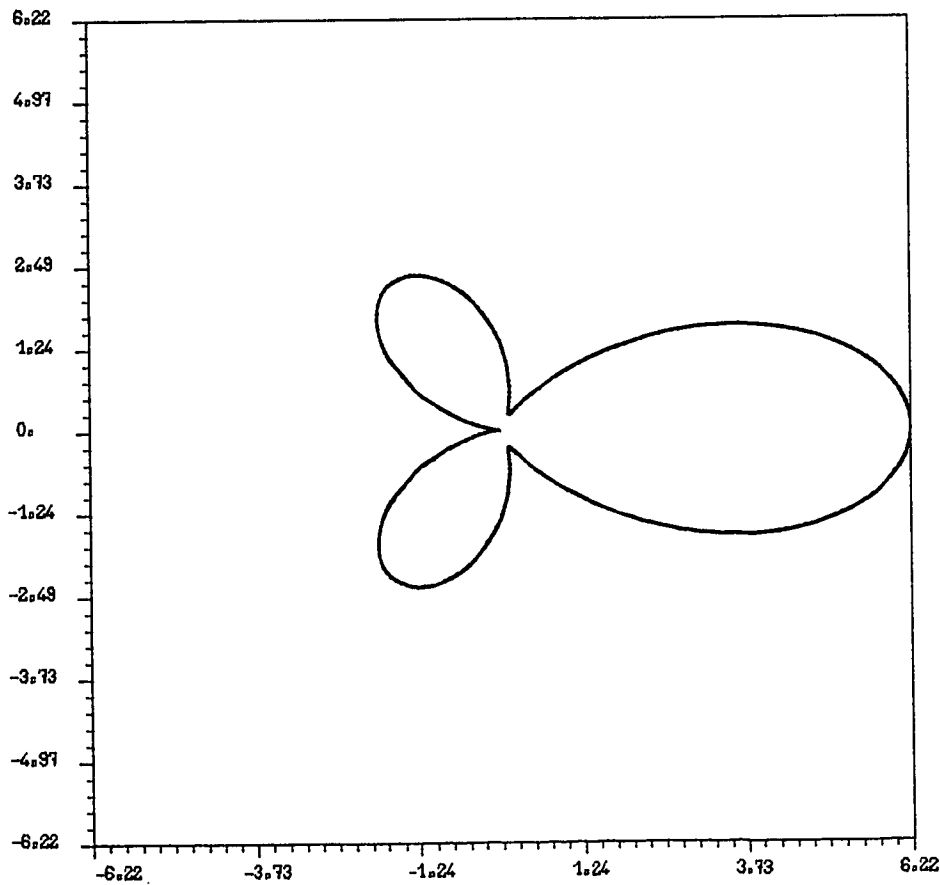
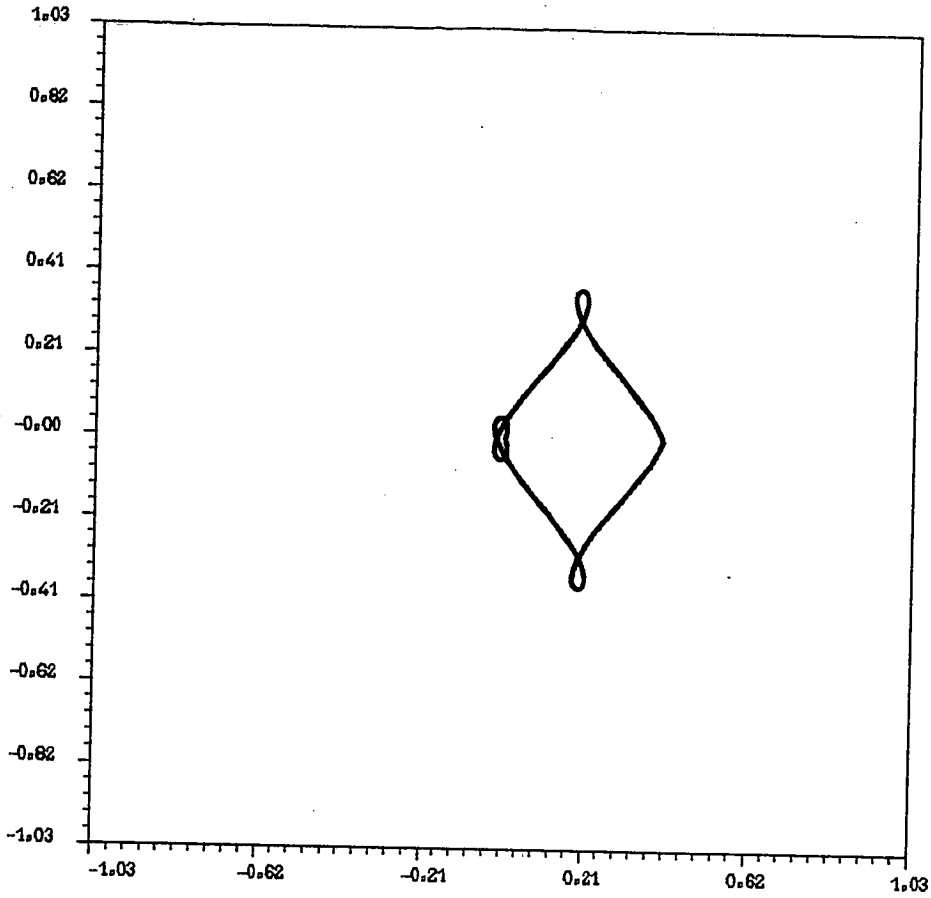


Figure 7.4.A.



$$\begin{aligned}k &= 10 \\s_o &= 1.0293 \\\alpha_o &= 0.40 \\\alpha_o - s_o &= -0.6292 \\\phi &= -1.6048 \\\Omega &= 1.4028 \\Q_o &= 16.52 \text{ db}\end{aligned}$$

Figure 7.4.B.

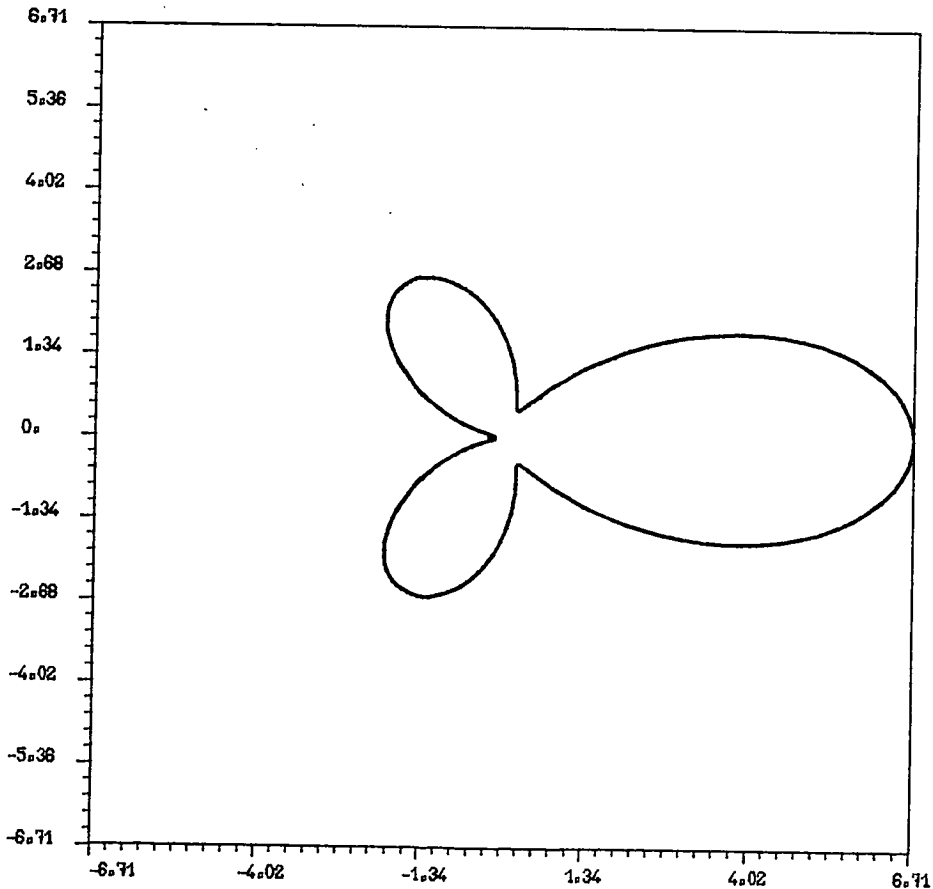
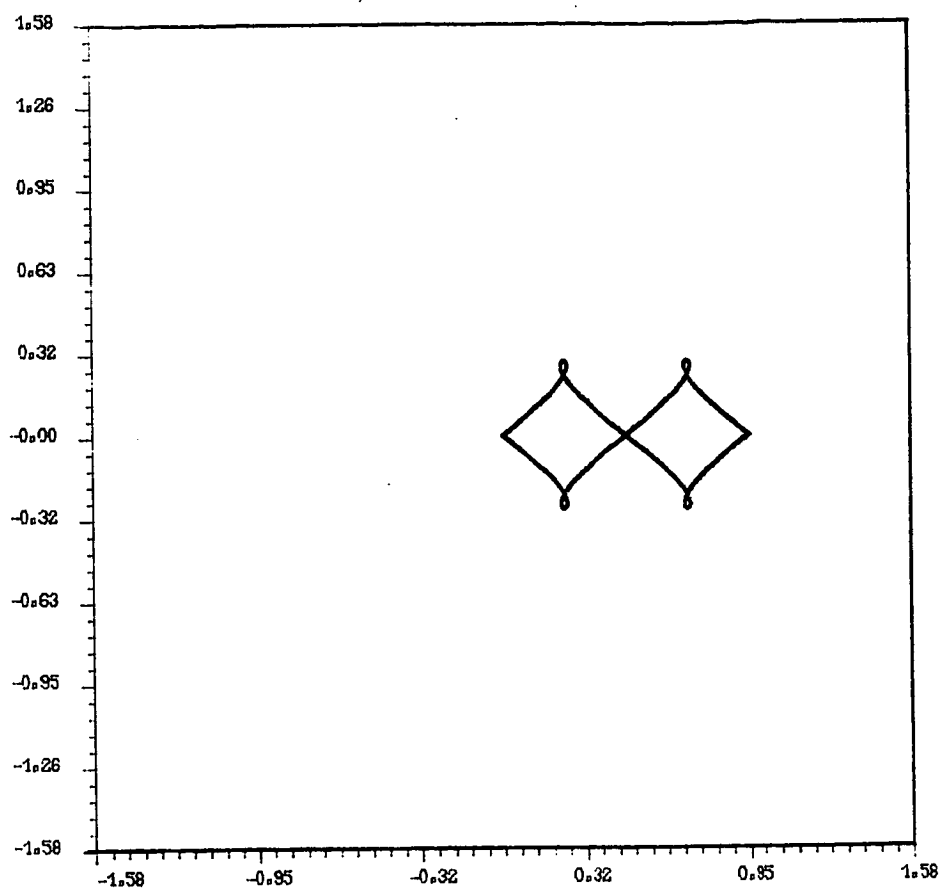


Figure 7.5.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 1.5793 \\ \alpha_o &= 0.95 \\ \alpha_o - s_o &= -0.6292 \\ \phi &= -0.449 \cdot 10^{-4} \\ \Omega &= 2.8329 \\ Q_o &= 19.01 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 7.5.B.

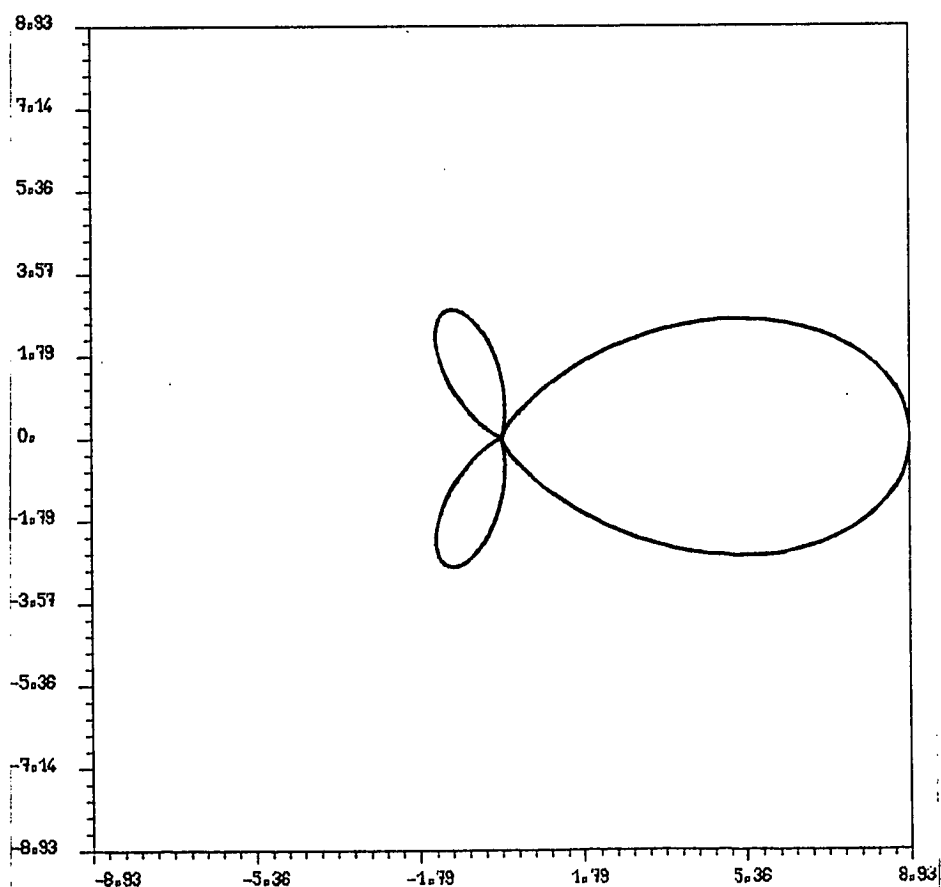
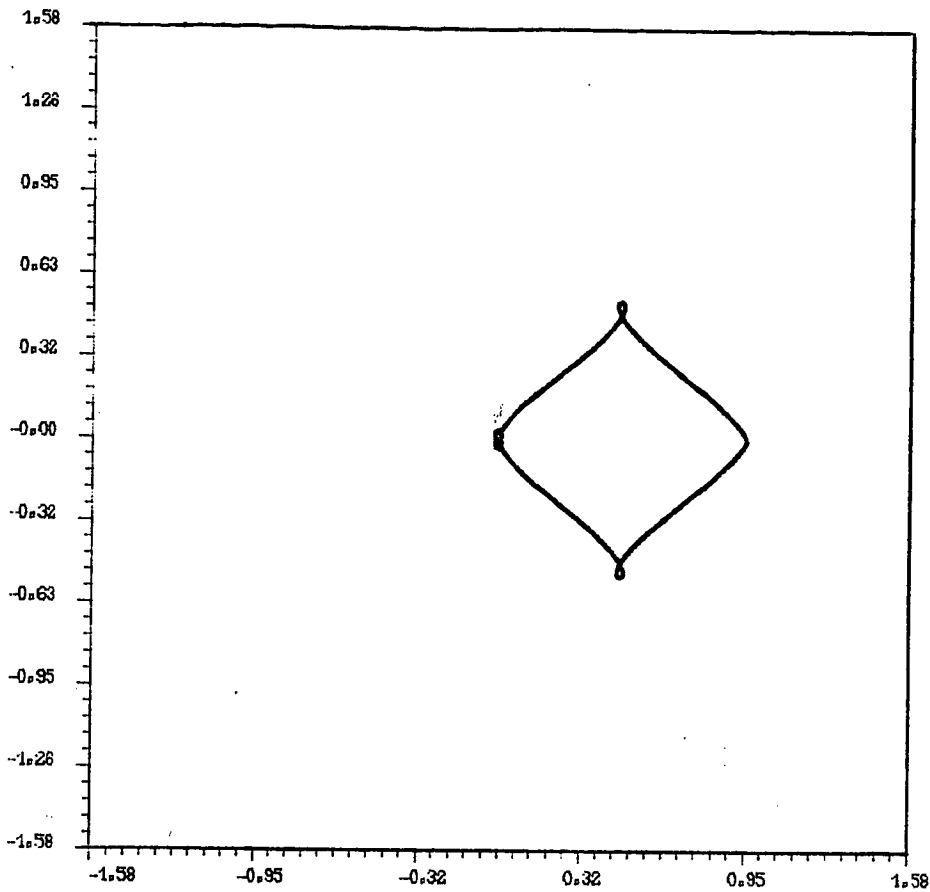


Figure 7.6.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 1.5793 \\ \alpha_o &= 0.95 \\ \alpha_o - s_o &= -0.6292 \\ \phi &= -2.4622 \\ \Omega &= 1.4078 \\ Q_o &= 19.00 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 7.6.B.

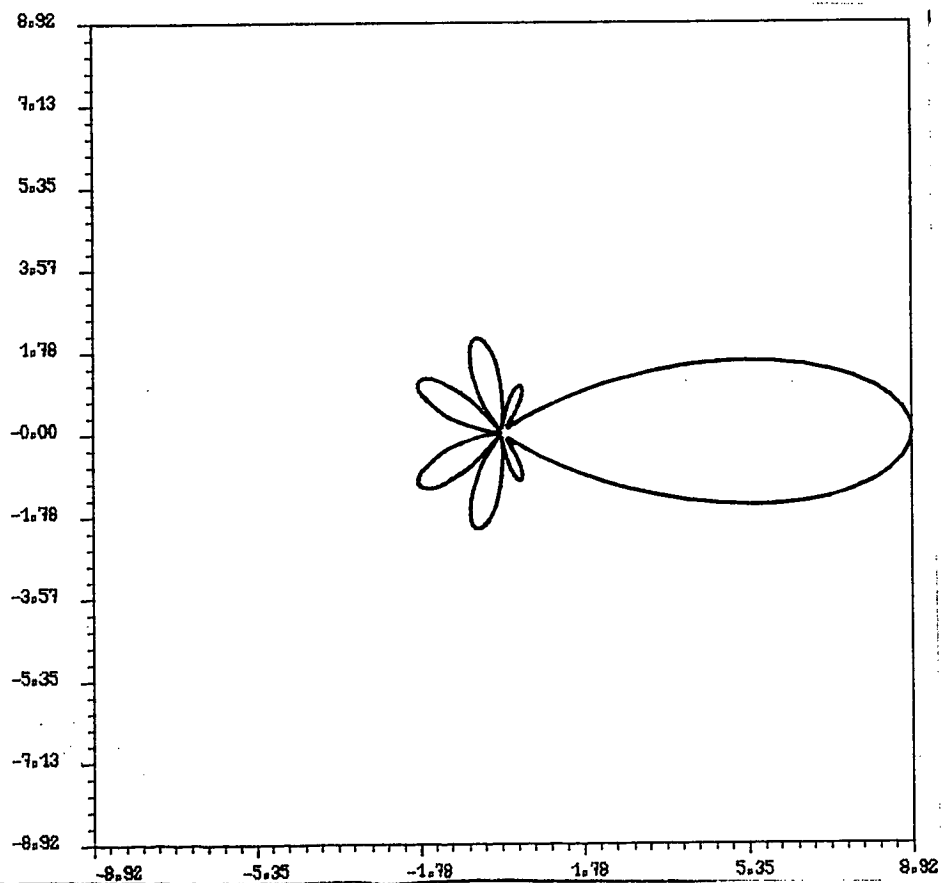
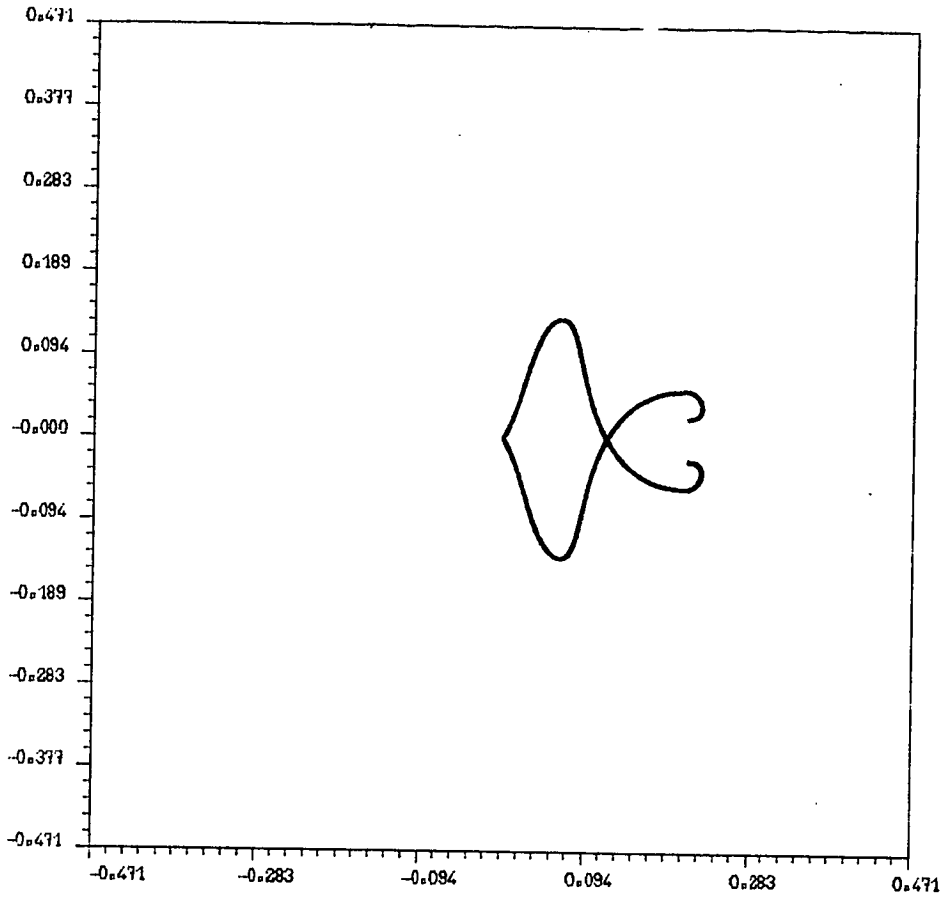


Figure 8.1.A.



$$\begin{aligned}k &= 10 \\s_o &= 0.4713 \\X'(0) &= 0.47421 \\\theta &= -1.03442 \\Q_o &= 6.04 \text{ db}\end{aligned}$$

Figure 8.1.B.

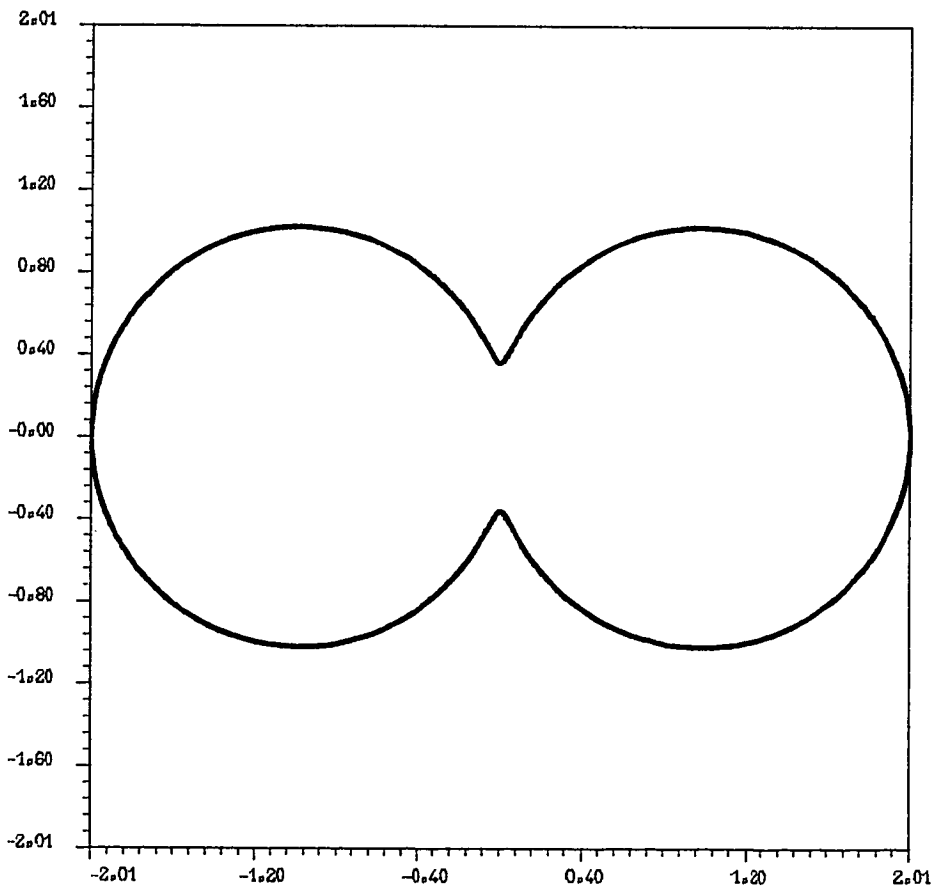
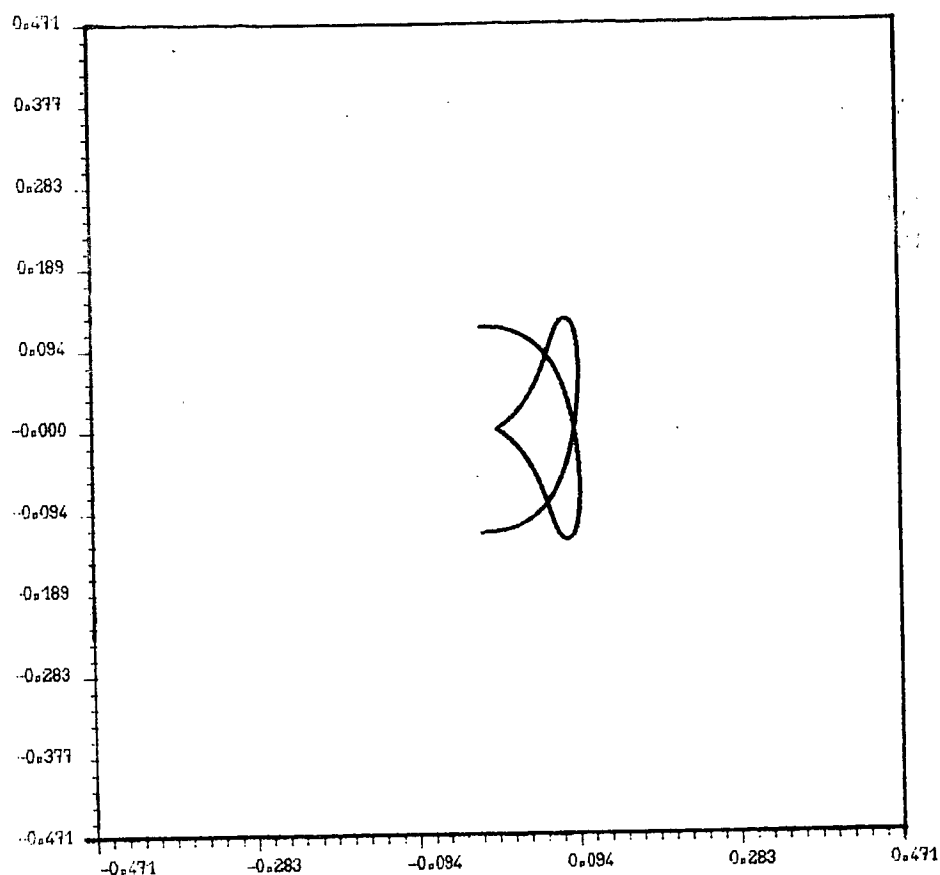


Figure 8.2.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_0 &= 0.4713 \\ X'(0) &= 0.83684 \\ \theta &= -0.34480 \\ Q_0 &= 7.82 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 8.2.B.

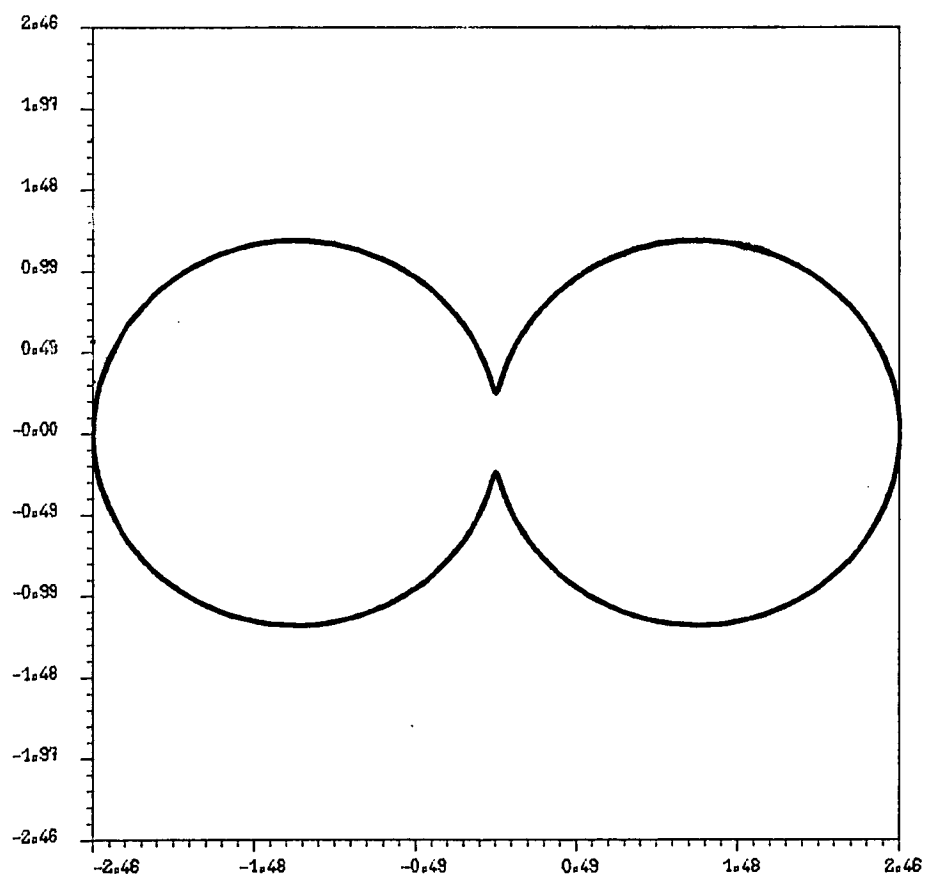
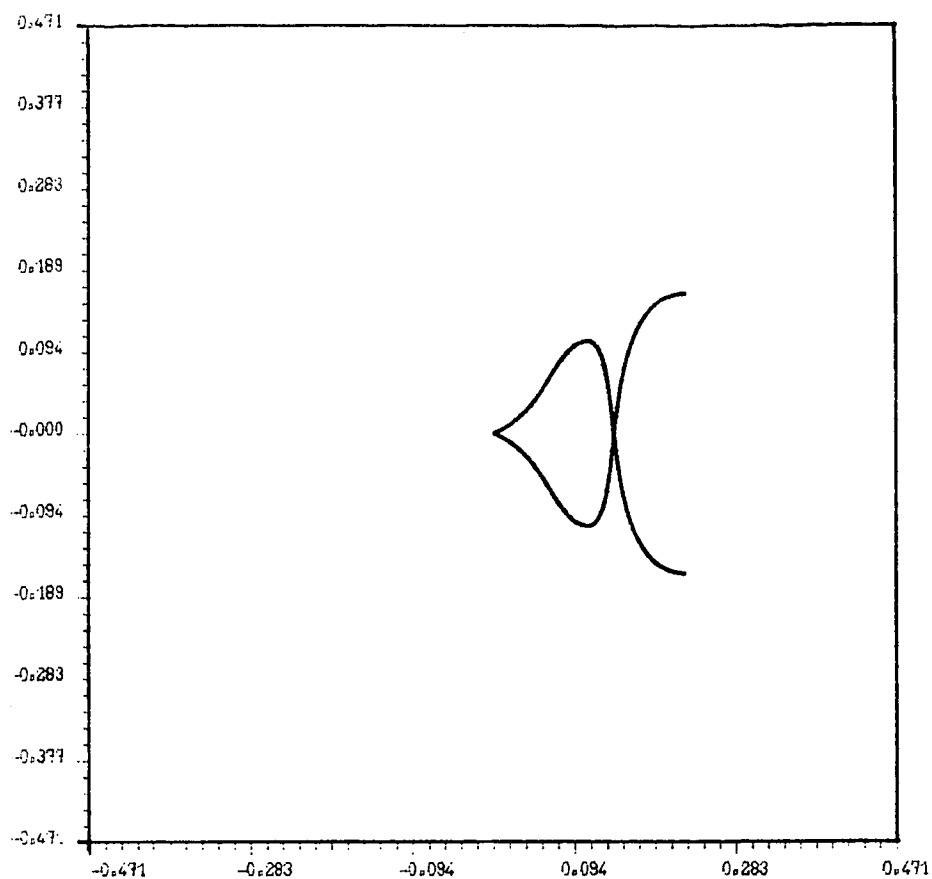


Figure 8.3.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 0.4713 \\ X'(0) &= 0.93842 \\ \theta &= -0.26818 \\ Q_o &= 7.20 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 8.3.B.

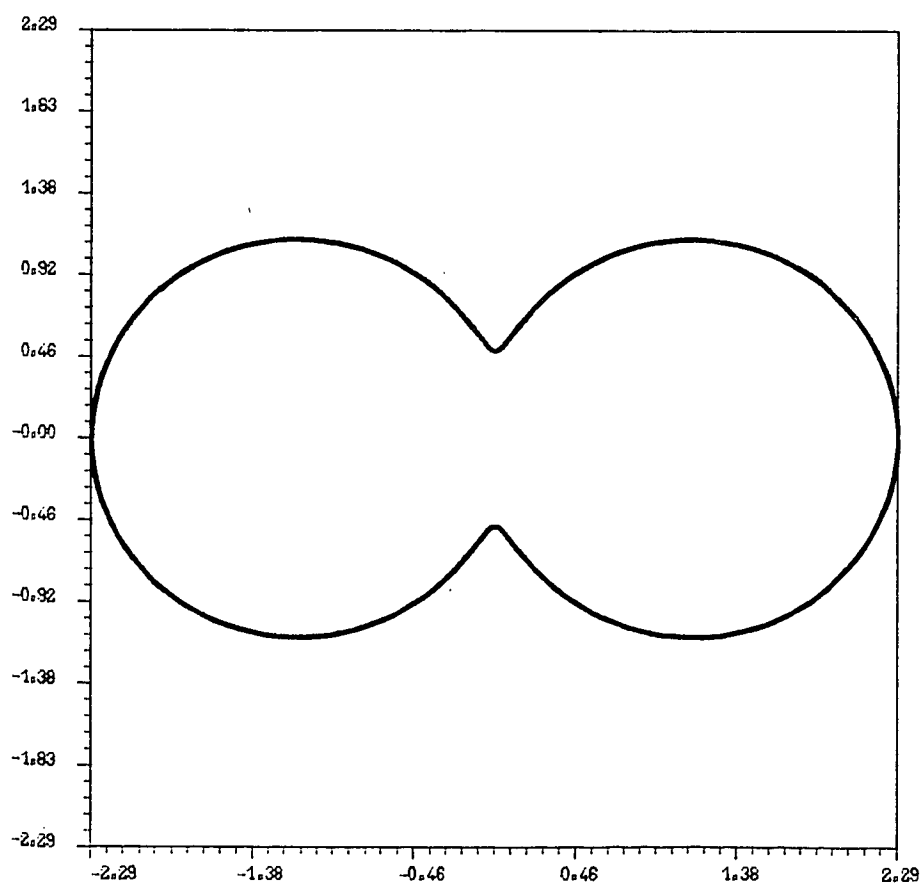
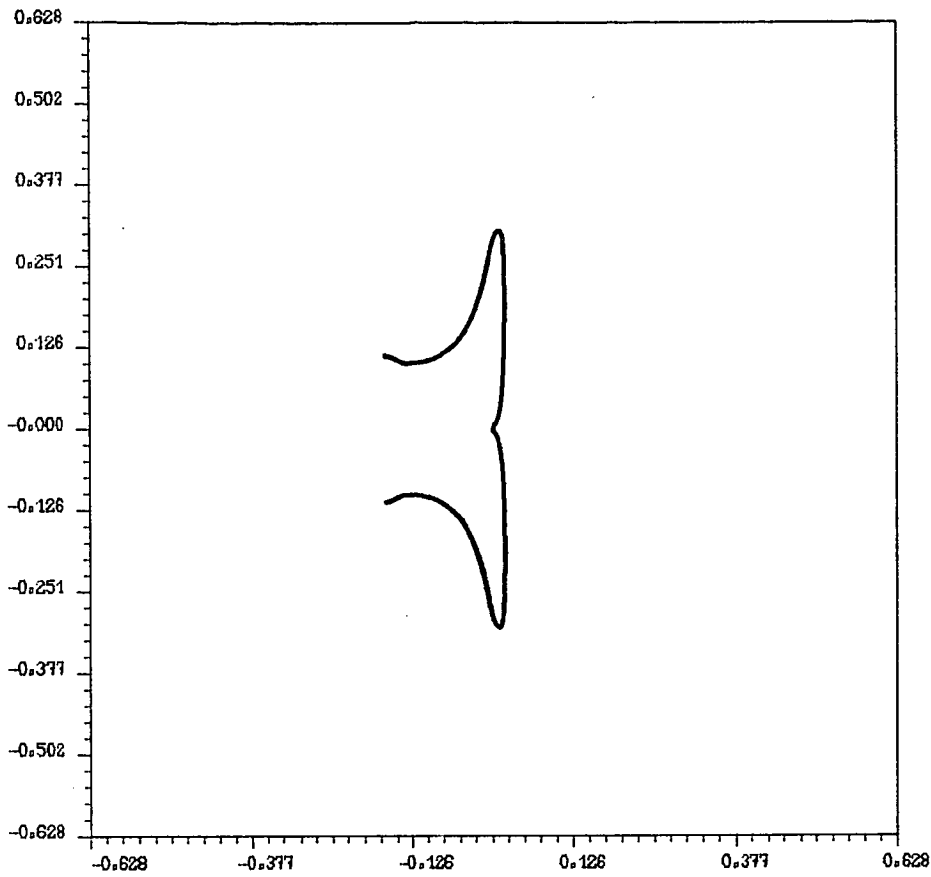


Figure 8.4.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_0 &= 0.6281 \\ x'(0) &= 0.1131 \\ \theta &= -1.3424 \\ Q_0 &= 10.39 \text{ dB} \end{aligned}$$

Figure 8.4.B.

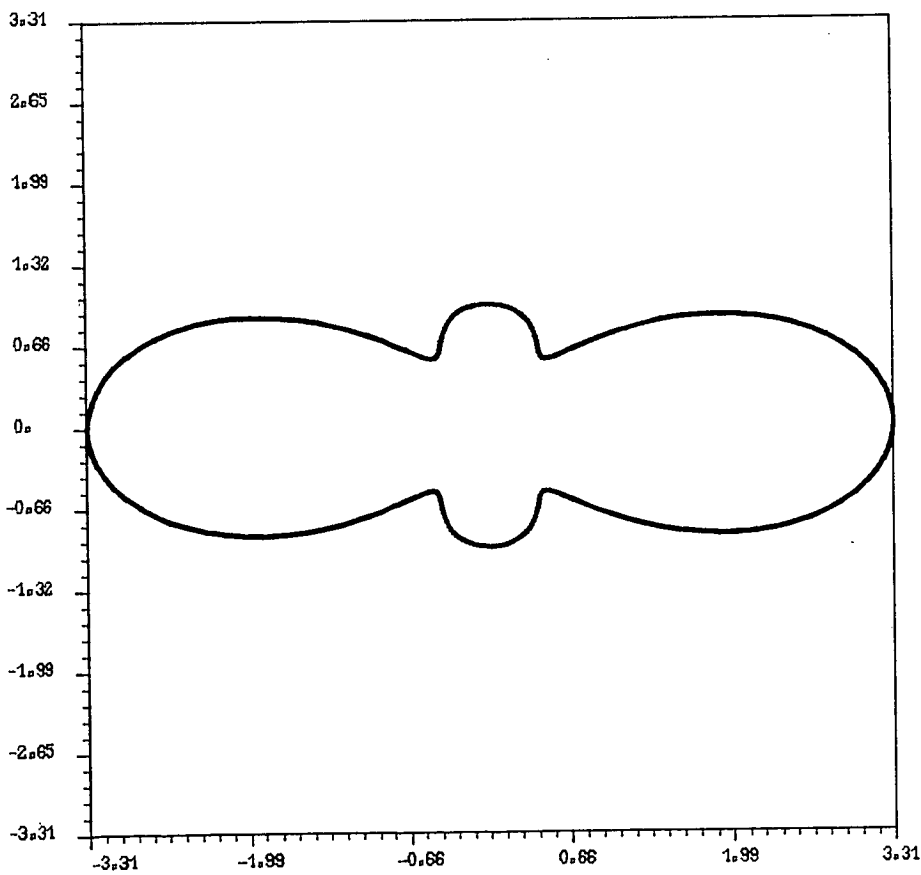
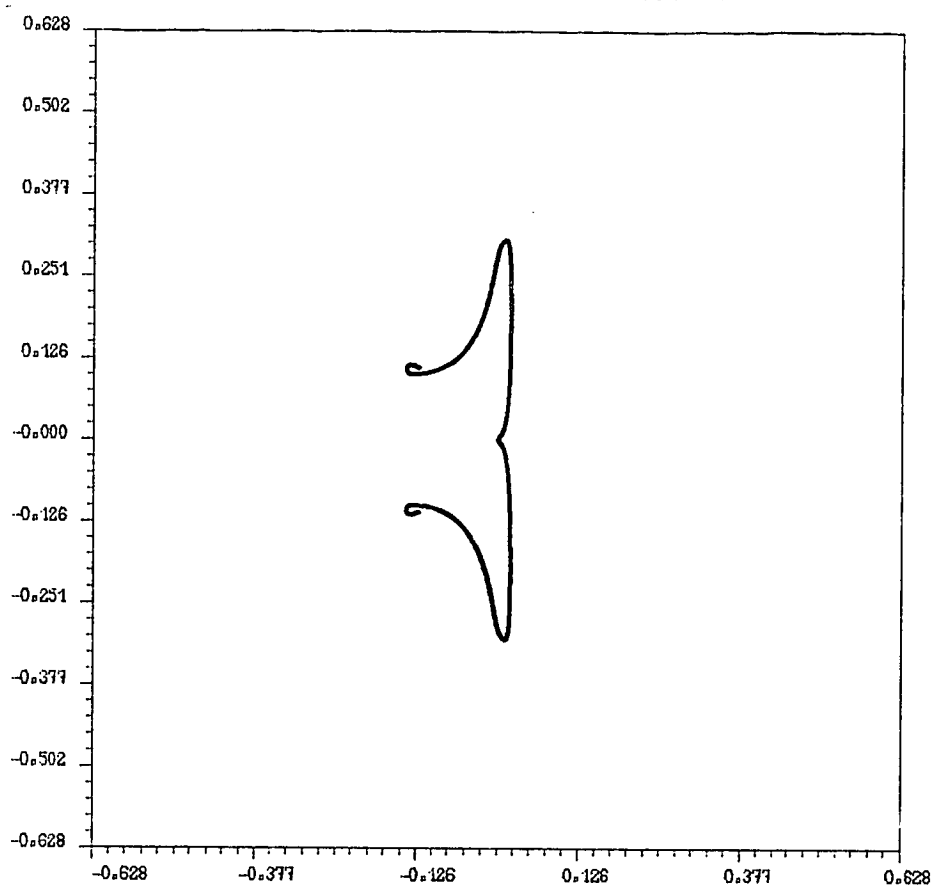


Figure 8.5.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_o &= 0.6281 \\ X'(0) &= 0.11311 \\ \theta &= -1.3425 \\ Q_o &= 10.40 \text{ db} \end{aligned}$$

Figure 8.5.B.

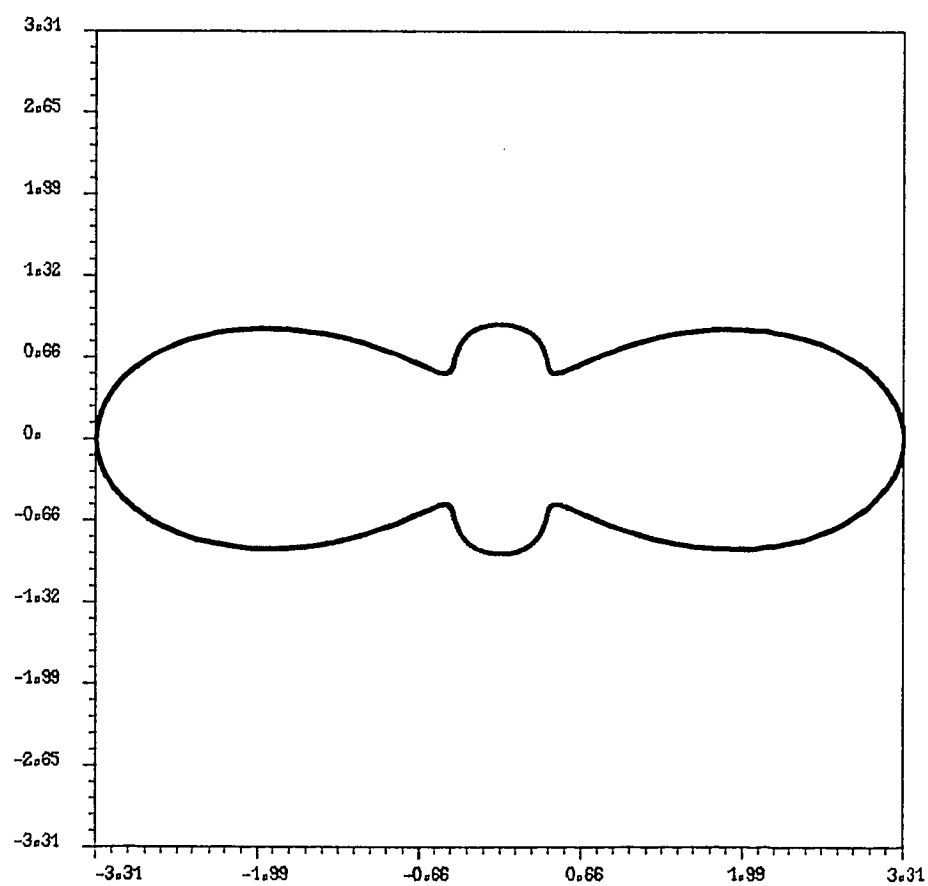
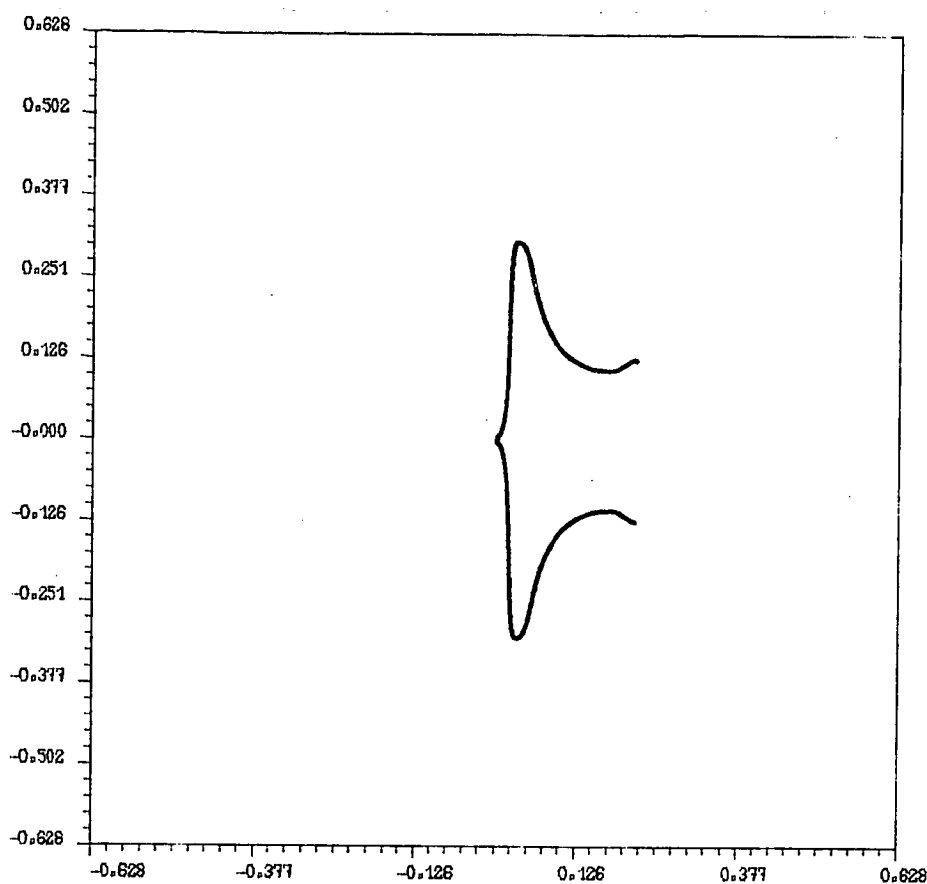
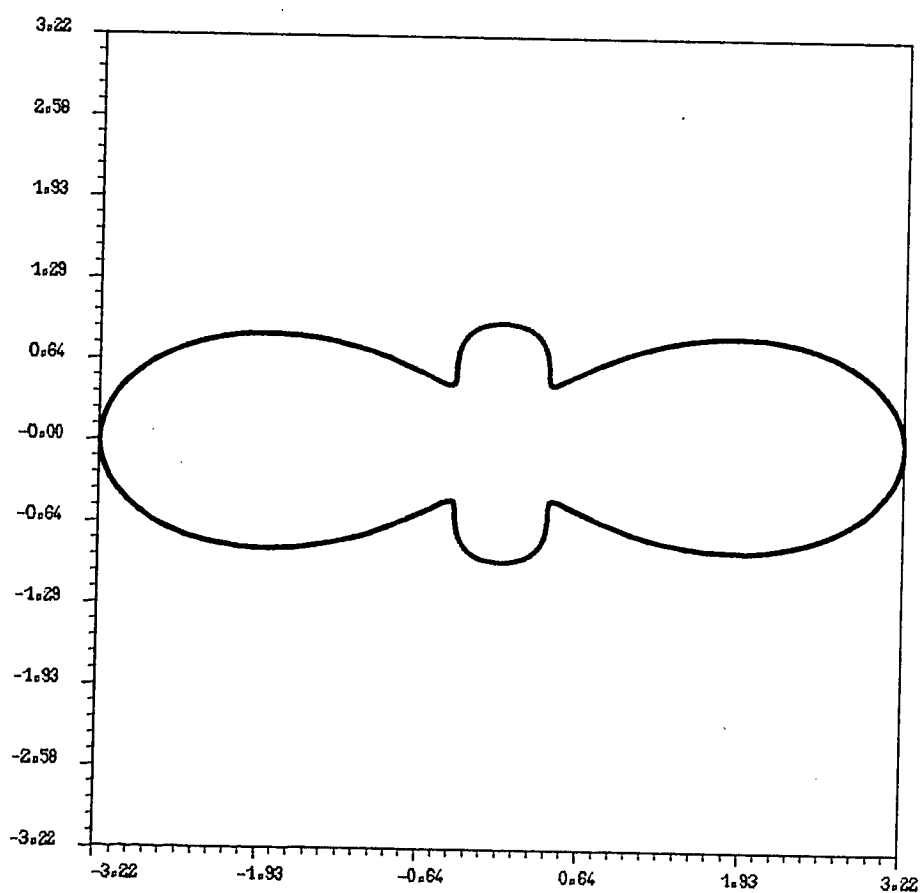


Figure 8.6.A.



$$\begin{aligned} k &= 10 \\ s_0 &= 0.6281 \\ X'(0) &= 0.1131 \\ \theta &= -1.3525 \\ Q_0 &= 10.16 \text{ dB} \end{aligned}$$

Figure 8.6.B.



8. - CONCLUSION

Celle-ci se compose d'une part d'une discussion de la méthode de résolution numérique et des hypothèses physiques utilisées et, d'autre part, de l'exposition des perspectives offertes par cette méthode.

La méthode numérique utilisée à comme avantage une mise en oeuvre rapide (programme courts), une grande simplicité d'utilisation (accès aisé aux non informaticiens) et comme inconvénients un manque de stabilité pour les grandes longueurs d'antenne fonctionnant en ondes stationnaires et la nécessité de connaître l'expression du courant sous forme explicite (à partir de fonctions programmables).

Les hypothèses physiques faites sur la répartition du courant le long des antennes correspondent au cas idéal d'un conducteur de rayon infiniment petit sans résistivité. Elles supposent, en outre, qu'il n'y a pas de réflexion des ondes à l'extrémité de l'antenne fonctionnant en ondes progressives tandis que le courant est nul à l'extrémité de l'antenne dans le cas du fonctionnement en ondes stationnaires. Il est clair que, dans le cas pratique, ces hypothèses ne sont jamais totalement vérifiées, elles n'en constituent pas moins une bonne approximation pour des antennes de longueur moyenne et ayant un conducteur de faible diamètre.

La prochaine étape de cette étude consistera donc à appliquer la méthode exposée dans cet article en tenant compte du diamètre du conducteur et de la répartition du courant qui en résulte. Pour cela, on utilisera les équations intégrales données dans [10] (cas des ondes stationnaires), le courant étant déterminé sous la forme d'une fonction en escalier par des méthodes semblables à celles exposées dans [1]. Dans ce cas, l'existence d'un courant admettant une partie imaginaire met en évidence un effet directif qui n'apparaît pas dans le cas où celle-ci est négligée. Quant à l'optimisation elle sera réalisée par une méthode utilisant la pénalisation (cf. [7]) et un Lagrangien augmenté directement dérivée de [2]. Cette méthode, un peu plus longue à mettre en oeuvre présentant l'avantage d'une très grande stabilité et de pouvoir utiliser un courant donné sous forme discontinu.

Bien entendu les méthodes qui viennent d'être exposées s'appliquent aussi dans le domaine des hyperfréquences (Détermination des ouvertures rayonnantes, des cornets électromagnétiques, des réflecteurs,...).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.E. ALBERT et J.L. SYNGE - The general problem of antenna radiation and the fundamental integral equation with application to an antenna of revolution, Quart. Appl. Math. Vol. VI, p. 117, 1948.
- [2] J.F. BOURGAT, J.M. DUMAY, R. CLOWINSKI- Large displacement calculation of flexible pipe line by finite element and non linear programming methods, SIAM journal on scientific and statistical computer (to appear).
- [3] R.E. COLLIN, F.J. ZUCKER- Antenna theory, Part 1, Mac Graw Hill, New York, 1969.
- [4] R. COURANT, D. HILBERT - Methods of mathematical physics, 1, Interscience publishers, New York, 1966.
- [5] R. COURANT, D. HILBERT - Methods of mathematical physics, 2, Interscience publishers, New York, 1966.
- [6] L. EYRAND, G. GRANGE, H. OHANESSIAN - Theorie et technique des antennes, Vuibert, Paris, 1973.
- [7] R. CLOWINSKI, J.L. LIÖNS, R. TREMOLIERES - Analyse numérique des inéquations variationnelles, vol.1, Dunod Bordas, Paris, 1976.
- [8] P. MALLIAVIN - Géométrie différentielle intrinsèque, Herman, Paris 1972.
- [9] A. MARROCCO - Bibliothèque de tracé, IRIA-LABORIA, 1979.
- [10] K.K. MEI - On the integral equation of thin wire antennas, IEEE trans on antennas and propagation, mai 1965, p. 374-379.
- [11] A. MERITET - Méthode d'optimisation visant à déterminer la forme d'antenne filaire ayant un gain maximal, C.R. Acad. Sc. Paris t. 289 (29 octobre 1979).
- [12] A. RALSTON, H.S. WILF - Mathematical methods for digital computers, 1967, A. Ralston ed., New York, 1967.

