

Sur l'implémentation des éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit

Michel Bernadou, Jean-Marie Boisserie, Kamal Hassan

▶ **To cite this version:**

Michel Bernadou, Jean-Marie Boisserie, Kamal Hassan. Sur l'implémentation des éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit. [Rapport de recherche] RR-0004, INRIA. 1980. inria-00076557

HAL Id: inria-00076557
https://inria.hal.science/inria-00076557

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P 105 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 4

SUR L'IMPLÉMENTATION DES ÉLÉMENTS FINIS DE HSIEH-CLOUGH-TOCHER COMPLET ET RÉDUIT

Michel BERNADOU
Jean-Marie BOISSERIE
Kamal HASSAN

Janvier 1980

ERRATA - Rapport n°4 - Janvier 1980

La plupart des relations qui apparaissent dans ce rapport sont indicées en i, i+1, i+2, l'indice i prenant les valeurs 1, 2, 3 et le résultat appartenant à l'ensemble {1,2,3} modulo 3.

Dans cet esprit, il convient de rendre cohérentes les relations (1.5-1), (1.7-1), (2.3-1), (2.4-1) où apparaissent des variables indicées en i et des variables non indicées. Pour ce faire, on indicera totalement en i toutes les relations qui sont déjà partiellement indicées, i.e., on substitue aux expressions $[DLGL(v)]$, $[DLLC(v)]$, $[D]$, $[\lambda]$ les expressions $[DLGL_i(v)]$, $[DLLC_i(v)]$, $[D_i]$, $[\Lambda_i]$ avec, par exemple,

$$(1.4\text{-}8)\quad \left\{ \begin{aligned} [DLGL_i(v)] = [&v(a_i)\ v(a_{i+1})\ v(a_{i+2})\ \frac{\partial v}{\partial x}(a_i)\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_i)\ \frac{\partial v}{\partial x}(a_{i+1})\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_{i+1}) \\ &\frac{\partial v}{\partial x}(a_{i+2})\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_{i+2})\ \frac{\partial v}{\partial \nu_i}(b_i)\ \frac{\partial v}{\partial \nu_{i+1}}(b_{i+1})\ \frac{\partial v}{\partial \nu_{i+2}}(b_{i+2})] \end{aligned} \right.$$

Le paragraphe 1.6 fait exception : on y indique comment calculer les dérivées des polynômes de base du sous-triangle K_1, i.e., $[R_1] = [A_1]\,[\lambda]$.

Soulignons enfin que ces modifications ont été prises en compte dans le programme et ne changent en rien les résultats numériques.

SUR L'IMPLEMENTATION DES ELEMENTS FINIS DE HSIEH-CLOUGH-TOCHER COMPLET ET REDUIT

Michel BERNADOU
Jean-Marie BOISSERIE
Kamal HASSAN

ABSTRACT

In this report, the implementation of the HSIEH-CLOUGH-TOCHER finite elements, complete and reduced, is described. Using piecewise polynamials of third degree, these elements give rise to interpolations of Hermite type and they permit the construction of spaces of approximating functions of $\mathcal{C}^1$ class. The combined use of barycentric coordinates and eccentricity parameters enables the finite element to be defined for any triangle not involving the notion of a reference finite element. Simple numerical examples of potential and plate problems complete this work.

RESUME

Dans ce rapport nous détaillons l'implémentation des éléments finis de HSIEH-CLOUGH-TOCHER, complet et réduit. A l'aide de polynômes de degré 3 par morceaux, ces élément finis réalisent des interpolations de type Hermite et ils permettent de construire des espaces de fonctions approchées de classe $\mathcal{C}^1$. L'utilisation conjointe des coordonnées barycentriques et des paramètres d'excentricité permet de définir l'élément fini pour un triangle quelconque indépendamment de toute utilisation d'un élément fini de référence. Des exemples numériques simples de problèmes de potentiel et de plaque complétent ce travail.

INTRODUCTION

Un des aspects extrêmement intéressant de la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis est son caractère modulaire : le programme tout entier est divisé en modules, chaque module étant un ensemble de sous-programmes ayant une attribution spécifique. Un des intérêts de cette partition réside dans la possibilité d'interchanger des modules ayant le même type d'attribution.

Dans un travail précédent (cf. BERNADOU-BOISSERIE [1]), nous avons détaillé l'implémentation de l'élément fini d'ARGYRIS (cf. ARGYRIS-FRIED-SCHARPF [1]). Il s'agit là d'un élément fini de classe $\mathcal{C}^1$, permettant de réaliser l'approximation conforme de solutions de problèmes du quatrième ordre tels que les problèmes de plaques et de coques. Lorsque les données et la solution du problème considéré sont très régulières, cet élément permet de réaliser une approximation très fine de la solution.

Par contre, pour des problèmes d'ordre 4 dont les données et la solution vérifient des conditions de régularité minimales, l'élément d'ARGYRIS s'avère inutilement précis. Dans ce cas il est préférable de lui substituer l'un des éléments de HSIEH-CLOUGH-TOCHER, complet ou réduit (cf. CLOUGH-TOCHER [1], CIARLET [1]).
Nous écrirons désormais H.C.T.-complet ou H.C.T.-réduit.

Dans ce rapport nous détaillons l'implémentation des éléments finis H.C.T.-complet ou réduit ; les modules correspondants sont incorporés au code MODULEF (cf. PERRONNET [1], HASSAN [1]) et peuvent être utilisés en lieu et place du module associé à l'élément fini d'ARGYRIS.

Rappelons que l'élément fini H.C.T.-complet (resp. réduit) est un élément fini (K,P_K,Σ_K) assemblé dont la mise en oeuvre est délicate car :

(i) l'espace fonctionnel P_K est un espace (resp. sous-espace) de polynômes de degré 3 sur chacun des sous-triangles K_i, convenablement assemblés pour que la fonction discrète sur le triangle $K = \bigcup_{i=1}^{3} K_i$ appartienne à $\mathcal{C}^1(K)$;

(ii) dans l'ensemble des degrés de liberté, figurent explicitement (resp. implicitement) des valeurs des dérivées normales au milieu des côtés.

Comme les transformations affines ne conservent pas les angles, la normale au milieu d'un côté d'un triangle est en général transformée en oblique au milieu du côté du triangle correspondant par transformation affine. C'est pourquoi il n'est pas possible, au moins directement, d'utiliser la notion d'élément fini de référence.

Nous montrons dans le numéro 1 comment l'utilisation conjointe des coordonnées barycentriques et des paramètres d'excentricité permet de définir l'élément fini H.C.T.-complet pour un triangle quelconque, indépendamment de toute utilisation d'un élément fini de référence. En particulier, nous donnons l'expression des 12 fonctions de base à l'aide des coordonnées barycentriques et des paramètres d'excentricité du triangle K.

Dans le numéro 2, nous précisons les modifications qu'il convient d'apporter aux résultats du numéro 1 dans le cas de l'élément fini H.C.T.-réduit.

Dans le numéro 3, nous montrons comment réaliser les modules "fonctionnelles d'énergie" relatifs aux problèmes de potentiel et de plaque, puis nous donnons quelques résultats numériques dans le cas de problèmes admettant une solution connue.

PLAN

1. IMPLEMENTATION DE L'ELEMENT FINI DE HSIEH-CLOUGH-TOCHER COMPLET
   1.1. Définition de l'élément fini H.C.T. complet
   1.2. Coordonnées barycentriques-coordonnées cartésiennes
   1.3. Paramètres d'excentricité
   1.4. Passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux
   1.5. Expression des polynômes de base
   1.6. Dérivées des polynômes de base
   1.7. Interpolation d'une fonction v et dérivées de la fonction interpolée.

2. IMPLEMENTATION DE L'ELEMENT FINI DE HSIEH-CLOUGH-TOCHER REDUIT :
   2.1. Définition de l'élément fini H.C.T.-réduit
   2.2. Passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux
   2.3. Expression des polynômes de base
   2.4. Interpolation d'une fonction v et dérivées partielles de la fonction interpolée.

3. RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES DE POTENTIEL ET DE PLAQUE

3.1. Un problème de potentiel

3.2. Un problème de plaque

-o-

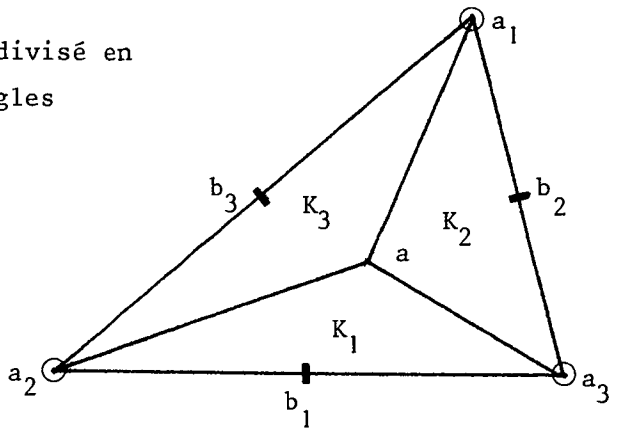
REMERCIEMENTS : La présentation matérielle est due au soin et à la diligence de Madame F. Weber.

1. - IMPLEMENTATION DE L'ELEMENT FINI DE HSIEH-CLOUGH-TOCHER COMPLET

1.1. Définition de l'élément fini H.C.T.-complet

Soit un triangle K de sommets a_1, a_2, a_3 et de centre de gravité a. Nous notons K_i les triangles de sommets a, a_{i+1}, a_{i+2}, $i=1,2,3$. Ici et dans la suite, les indices appartiennent à l'ensemble $\{1,2,3\}$ modulo 3. Nous désignons par b_i le milieu du côté $a_{i+1}a_{i+2}$, et par c_i la projection orthogonale du point a_i sur le côté $a_{i+1}a_{i+2}$, respectivement.

Triangle K divisé en trois triangles K_1, K_2, K_3



$$P_K = \{p \in \mathcal{C}^1(K) \ ; \ r_i = p|_{K_i} \in P_3(K_i) \ ; \ 1 \le i \le 3\} \ ;$$

$$\dim P_K = 12 \ ;$$

$$\Sigma_K = \{p(a_i), Dp(a_i)(a_{i-1}-a_i), Dp(a_i)(a_{i+1}-a_i), Dp(b_i)(a_i-c_i) \ , \ 1 \le i \le 3\} \ ;$$

a = centre de gravité du triangle K

Figure 1.1-1 : Elément fini H.C.T.-Complet

Alors, la définition de l'élément fini H.C.T-complet (K, P_K, Σ_K) est condensée sur la figure 1.1-1. Rappelons que P_K et Σ_K désignent respectivement l'espace des fonctions approchées et l'ensemble des degrés de liberté.

Remarque 1.1.-1 : Pour définir cet élément fini, on peut remplacer le centre de gravité a du triangle K par un point quelconque, intérieur au triangle. CIARLET [1] a montré que l'ordre de l'erreur d'interpolation est indépendant de la position de ce point. ■

1.2. Coordonnées barycentriques. Coordonnées Cartésiennes

Dans tout ce qui suit nous supposons donné un repère orthonormé fixe du plan $\mathbb{R}^2$, $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Les coordonnées d'un point P sont notées (x,y), i.e.,

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 .$$

Soit alors un triangle K de sommets $a_1(x_1,y_1)$, $a_2(x_2,y_2)$, $a_3(x_3,y_3)$, non dégénéré, i.e., $\overrightarrow{a_1a_2} \times \overrightarrow{a_1a_3} \neq \vec{0}$.

Les coordonnées cartésiennes (x,y) du point P sont données en fonction des coordonnées barycentriques $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ par les expressions :

$$(1.2\text{-}1) \quad \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 , \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 . \end{cases}$$

Rappelons que

$$(1.2\text{-}2) \quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 .$$

Inversement,

$$(1.2\text{-}3) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{(x-x_2)(y_2-y_3)+(x_3-x_2)(y-y_2)}{\Delta} \\ \lambda_2 = \dfrac{(x-x_3)(y_3-y_1)+(x_1-x_3)(y-y_3)}{\Delta} \\ \lambda_3 = \dfrac{(x-x_1)(y_1-y_2)+(x_2-x_1)(y-y_1)}{\Delta} \end{cases}$$

où

$$(1.2\text{-}4) \quad \begin{cases} \Delta = x_1(y_2-y_3)+ x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2) \\ \quad = (x_1-x_3)(y_2-y_3)+(x_2-x_3)(y_3-y_1) \\ \quad = (\overrightarrow{a_1a_3} \times \overrightarrow{a_2a_3})\ (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \neq 0 \end{cases}$$

1.3. Paramètres d'excentricité

L'élément fini H.C.T.-complet comporte parmi ses degrés de liberté trois dérivées normales, calculées aux milieux b_1, b_2, b_3 des côtés a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 du triangle K (cf. Figure 1.1-1)

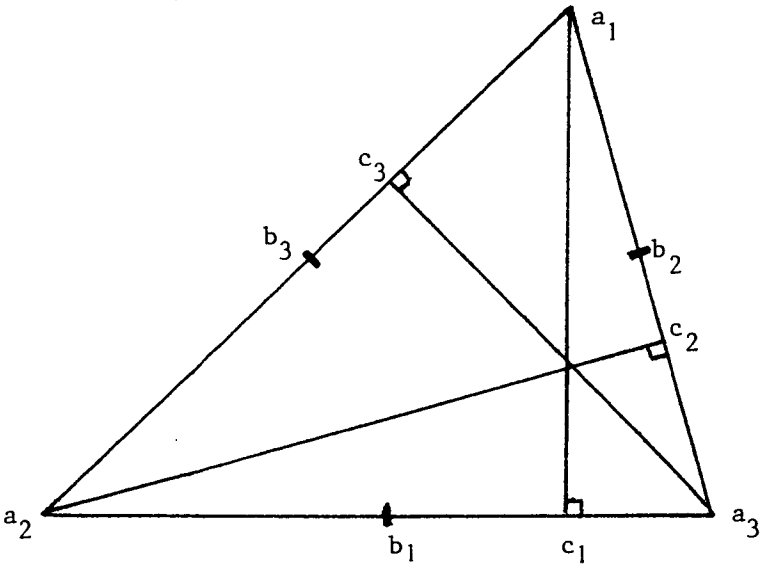


Figure 1.3-1 - La géométrie nécessaire pour calculer les paramètres d'excentricité.

Alors les paramètres d'excentricité ($\in \mathbb{R}$) sont définis par les relations

$$(1.3\text{-}1) \qquad \eta_i = 2\,\frac{\overline{c_i b_i}}{\overline{a_{i-1}a_{i+1}}} \quad , \; i=1,2,3 \; ;$$

ces paramètres peuvent être facilement calculés à partir des coordonnées des trois sommets du triangle

$$(1.3\text{-}2) \qquad \eta_i = \frac{(\ell_{i+2})^2 - (\ell_{i+1})^2}{\ell_i^2} \quad , \; i=1,2,3 \, ,$$

où

$$(1.3\text{-}3) \qquad \ell_i = \sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2 + (y_{i+1}-y_{i-1})^2} \quad , \quad i=1,2,3,$$

désigne la longueur du côté $a_{i-1}a_{i+1}$ du triangle.

1.4. Passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux.
Dans la définition des degrés de liberté de l'élément fini H.C.T.-complet nous utilisons uniquement la géométrie du triangle. Nous qualifions ces degrés de liberté de "locaux". Pour procéder à l'assemblage, il convient de définir des degrés de liberté "globaux", ce qui revient essentiellement à remplacer les directions des côtés du triangle par les directions fixes des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, puis à normer.

Les degrés de liberté globaux attachés aux sommets a_i, i=1,2,3 :
Aux trois degrés de liberté locaux relatifs au sommet a_i du triangle considéré, i.e.,

$$(1.4\text{-}1) \qquad v \to \{v(a_i), Dv(a_i)(a_{i-1}-a_i), Dv(a_i)(a_{i+1}-a_i)\} \ ,$$

on associe les trois degrés de liberté globaux suivants :

$$(1.4\text{-}2) \qquad v \to \{v(a_i), Dv(a_i)\vec{e}_1 = \frac{\partial v}{\partial x}(a_i), Dv(a_i)\vec{e}_2 = \frac{\partial v}{\partial y}(a_i)\} \ .$$

L'expression des degrés de liberté locaux en fonction des degrés de liberté globaux est donnée par les relations suivantes :

$$(1.4\text{-}3) \qquad \begin{bmatrix} Dv(a_i)(a_{i-1}-a_i) \\ \\ Dv(a_i)(a_{i+1}-a_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i-1}-x_i & y_{i-1}-y_i \\ \\ x_{i+1}-x_i & y_{i+1}-y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}(a_i) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_i) \end{bmatrix}$$

Les dérivées normales aux milieux des côtés :
Il convient de les normer et de les orienter. Notons tout d'abord que le vecteur $\overrightarrow{c_i a_i}$ a pour composantes :

$$(1.4\text{-}4) \qquad \overrightarrow{c_i a_i} = a_i - c_i = \begin{cases} x_i - \frac{1}{2}(1-\eta_i)x_{i+1} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)x_{i-1} \ , \\ y_i - \frac{1}{2}(1-\eta_i)y_{i+1} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)y_{i-1} \ . \end{cases}$$

Posons

$$(1.4\text{-}5) \qquad \begin{cases} XCAI = x_i - \frac{1}{2}(1-\eta_i)x_{i+1} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)x_{i-1} \ , \\ \\ YCAI = y_i - \frac{1}{2}(1-\eta_i)y_{i+1} - \frac{1}{2}(1+\eta_i)y_{i-1} \ . \end{cases}$$

Alors, le degré de liberté global $\frac{\partial v}{\partial \nu_i}(b_i)$ associé au degré de liberté local $Dv(b_i)(a_i-c_i)$ est défini comme suit :

$$(1.4\text{-}6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \nu_i}(b_i) = \dfrac{1}{|\overrightarrow{c_i a_i}|}\dfrac{XCAI}{|XCAI|}\, Dv(b_i)(a_i-c_i) & \text{si } XCAI \neq 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_i}(b_i) = \dfrac{1}{|\overrightarrow{c_i a_i}|}\dfrac{YCAI}{|YCAI|}\, Dv(b_i)(a_i-c_i) & \text{si } XCAI = 0. \end{cases}$$

Matrice de passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux

Soit à calculer la matrice carrée D, de dimension 12, telle que

$$(1.4\text{-}7)\quad [DLLC(v)]_{(1,12)} = [DLGL(v)]_{(1,12)}[D]_{(12,12)}$$

où

$$(1.4\text{-}8)\quad \begin{cases} [DLGL(v)] = [v(a_1)\ v(a_2)\ v(a_3)\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a_1)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(a_1)\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a_2)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(a_2) \\ \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x}(a_3)\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(a_3)\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_1}(b_1)\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_2}(b_2)\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_3}(b_3)], \end{cases}$$

et

$$(1.4\text{-}9)\quad \begin{cases} [DLLC(v)] = [v(a_1)\ v(a_2)\ v(a_3)\ Dv(a_1)(a_3-a_1)\ Dv(a_1)(a_2-a_1) \\ \qquad Dv(a_2)(a_1-a_2)\ Dv(a_2)(a_3-a_2)\ Dv(a_3)(a_2-a_3) \\ \qquad Dv(a_3)(a_1-a_3)\ Dv(b_1)(a_1-c_1)\ Dv(b_2)(a_2-c_2)\ Dv(b_3)(a_3-c_3)]. \end{cases}$$

Posons

$$(1.4\text{-}10)\quad [d_i]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} x_{i-1}-x_i & x_{i+1}-x_i \\ y_{i-1}-y_i & y_{i+1}-y_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3,$$

et

$$(1.4\text{-}11)\quad n_i = \begin{cases} |\overrightarrow{c_i a_i}|\dfrac{XCAI}{|XCAI|} & \text{si } XCAI \neq 0 \\ |\overrightarrow{c_i a_i}|\dfrac{YCAI}{|YCAI|} & \text{si } XCAI = 0 \end{cases}, \quad i=1,2,3,$$

où les quantités XCAI et YCAI sont définies par les relations (1.4-5) et où

$$(1.4\text{-}12)\quad |\overrightarrow{c_i a_i}| = [(XCAI)^2 + (YCAI)^2]^{1/2}.$$

Dès lors, la matrice de passage D des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux, définie par la relation (1.4-7), s'écrit :

$$(1.4\text{-}13)\quad [D]_{12\times 12} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & d_1 & & & & & & & & \\ & & & & d_2 & & & & & & & \\ & & & & & d_3 & & & & & & \\ & & & & & & n_1 & & & & & \\ & & & & & & & n_2 & & & & \\ & & & & & & & & n_3 & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale par blocs.

1.5. Expression des polynômes de base

Sur chaque triangle K_i, l'espace fonctionnel d'approximation est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 par rapport à l'ensemble des variables x et y. Grâce aux relations (1.2-1) et (1.2-2), il est loisible d'exprimer les 10 monômes de base à l'aide des 10 monômes en λ_1, λ_2, λ_3, homogènes, de degré 3.
On montre alors que les polynômes de base relatifs au triangle K_i s'écrivent sous la forme matricielle suivante (cf. BERNADOU-HASSAN [1] ou HASSAN [2]) :

$$(1.5\text{-}1)\quad [R_i]_{12\times 1} = [A_i]_{12\times 10} \times [\lambda]_{10\times 1} .$$

Plus précisément, si l'on pose

$$(1.5\text{-}2)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_{K_i} v = {} & v(a_i)\, r^0_{i,i} + v(a_{i+1}) r^0_{i,i+1} + v(a_{i+2}) r^0_{i,i+2} \\ & + Dv(a_i)(a_{i+2}-a_i) r^1_{i,i,i+2} + Dv(a_i)(a_{i+1}-a_i) r^1_{i,i,i+1} \\ & + Dv(a_{i+1})(a_i-a_{i+1}) r^1_{i,i+1,i} + Dv(a_{i+1})(a_{i+2}-a_{i+1}) r^1_{i,i+1,i+2} \\ & + Dv(a_{i+2})(a_{i+1}-a_{i+2}) r^1_{i,i+2,i+1} + Dv(a_{i+2})(a_i-a_{i+2}) r^1_{i,i+2,i} \\ & + Dv(b_i)(a_i-c_i) r^\perp_{i,i} + Dv(b_{i+1})(a_{i+1}-c_{i+1}) r^\perp_{i,i+1} \\ & + Dv(b_{i+2})(a_{i+2}-c_{i+2}) r^\perp_{i,i+2} , \end{aligned} \right.$$

la relation (1.5-1) s'écrit sous la forme indiquée figure 1.5-1.

$$
\begin{bmatrix} r^{o}_{i,i} \\ r^{o}_{i,i+1} \\ r^{o}_{i,i+2} \\ r^{1}_{i,i,i+2} \\ r^{1}_{i,i,i+1} \\ r^{1}_{i,i+1,i} \\ r^{1}_{i,i+1,i+2} \\ r^{1}_{i,i+2,i+1} \\ r^{1}_{i,i+2,i} \\ r^{\perp}_{i,i} \\ r^{\perp}_{i,i+1} \\ r^{\perp}_{i,i+2} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}(\eta_{i+1}-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & \frac{3}{2}(3+\eta_{i+1}) & \frac{3}{2}(3-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}(1-2\eta_i-\eta_{i+2}) & 1 & 0 & -\frac{3}{2}(1-\eta_i) & \frac{3}{2}(\eta_i+\eta_{i+2}) & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1-\eta_i) \\
\frac{1}{2}(1+2\eta_i+\eta_{i+1}) & 0 & 1 & -\frac{3}{2}(\eta_i+\eta_{i+1}) & -\frac{3}{2}(1+\eta_i) & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1+\eta_i) \\
-\frac{1}{12}(1+\eta_{i+1}) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(7+\eta_{i+1}) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{12}(1-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(7-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{12}(7+\eta_{i+2}) & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(5+\eta_{i+2}) & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\frac{1}{6}(4-\eta_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(3-\eta_i) & -\frac{1}{4}(5-\eta_i) & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(3-\eta_i) \\
\frac{1}{6}(4+\eta_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(5+\eta_i) & -\frac{1}{4}(3+\eta_i) & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(3+\eta_i) \\
-\frac{1}{12}(7-\eta_{i+1}) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(5-\eta_{i+1}) & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\frac{4}{3} & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
-\frac{2}{3} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_i^3 \\ \lambda_{i+1}^3 \\ \lambda_{i+2}^3 \\ \lambda_i^2\lambda_{i+2} \\ \lambda_i^2\lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+1}^2\lambda_i \\ \lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2} \\ \lambda_{i+2}^2\lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+2}^2\lambda_i \\ \lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} \end{bmatrix}
$$

Figure I.5-1 - Les polynômes de base associés au triangle K_i

1.6. Dérivées des polynômes de base

Soit à calculer les dérivées des polynômes de base par rapport aux variables x et y. Nous procédons en deux temps, et pour simplifier l'écriture nous remplaçons R_i, A_i dans la relation (1.5-1) par r et A, respectivement :

i) Dérivation par rapport aux $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

En notant $\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}$, $\partial^2_{ij} r = \frac{\partial^2 r}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$ on a :

$$(1.6\text{-}1)\quad \begin{cases} [\partial_i r]_{12\times 1} = [A]_{12\times 10}\,[\partial_i \lambda]_{10\times 1} \quad ; \quad i=1,2,3 \ , \\ [\partial^2_{ij} r]_{12\times 1} = [A]_{12\times 10}\,[\partial^2_{ij}\lambda]_{10\times 1} \quad ; \quad i,j=1,2,3 \ . \end{cases}$$

Les expressions des matrices $[\lambda], [\partial_i \lambda], [\partial^2_{ij}\lambda]$ sont données dans le tableau 1.6-1.

ii) Dérivation par rapport aux x,y

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \ ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \lambda_3}{\partial y} \ ,$$

ce qui s'écrit, compte tenu de (1.2-3) (1.2-4) :

$$(1.6\text{-}2)\quad \begin{cases} \partial_x r = \frac{1}{\Delta}\{(y_2-y_3)\partial_1 r + (y_3-y_1)\partial_2 r + (y_1-y_2)\partial_3 r\} \ , \\ \partial_y r = \frac{1}{\Delta}\{(x_3-x_2)\partial_1 r + (x_1-x_3)\partial_2 r + (x_2-x_1)\partial_3 r\} \ . \end{cases}$$

De même, comme $\partial^2_{xx}\lambda_i \equiv 0$, $\partial^2_{xy}\lambda_i \equiv 0$, $\partial^2_{yy}\lambda_i \equiv 0$, i=1,2,3, on a

$$(1.6\text{-}3)\quad \begin{cases} \partial_{xx} r = \frac{1}{\Delta^2}\{(y_2-y_3)^2\partial_{11} r + (y_3-y_1)^2\partial_{22} r + (y_1-y_2)^2\partial_{33} r \\ \qquad + 2(y_2-y_3)(y_3-y_1)\partial_{12} r + 2(y_3-y_1)(y_1-y_2)\partial_{23} r \\ \qquad + 2(y_1-y_2)(y_2-y_3)\partial_{31} r\} \ , \end{cases}$$

$[\lambda]$	$[\partial_1\lambda]$	$[\partial_2\lambda]$	$[\partial_3\lambda]$	$[\partial_{11}\lambda]$	$[\partial_{12}\lambda]$	$[\partial_{13}\lambda]$	$[\partial_{22}\lambda]$	$[\partial_{23}\lambda]$	$[\partial_{33}\lambda]$
λ_1^3	$3\lambda_1^2$	0	0	$6\lambda_1$	0	0	0	0	0
λ_2^3	0	$3\lambda_2^2$	0	0	0	0	$6\lambda_2$	0	0
λ_3^3	0	0	$3\lambda_3^2$	0	0	0	0	0	$6\lambda_3$
$\lambda_1^2\lambda_3$	$2\lambda_1\lambda_3$	0	λ_1^2	$2\lambda_3$	0	$2\lambda_1$	0	0	0
$\lambda_1^2\lambda_2$	$2\lambda_1\lambda_2$	λ_1^2	0	$2\lambda_2$	$2\lambda_1$	0	0	0	0
$\lambda_2^2\lambda_1$	λ_2^2	$2\lambda_2\lambda_1$	0	0	$2\lambda_2$	0	$2\lambda_1$	0	0
$\lambda_2^2\lambda_3$	0	$2\lambda_2\lambda_3$	λ_2^2	0	0	0	$2\lambda_3$	$2\lambda_2$	0
$\lambda_3^2\lambda_2$	0	λ_3^2	$2\lambda_3\lambda_2$	0	0	0	0	$2\lambda_3$	$2\lambda_2$
$\lambda_3^2\lambda_1$	λ_3^2	0	$2\lambda_3\lambda_1$	0	0	$2\lambda_3$	0	0	$2\lambda_1$
$\lambda_1\lambda_2\lambda_3$	$\lambda_2\lambda_3$	$\lambda_1\lambda_3$	$\lambda_1\lambda_2$	0	λ_3	λ_2	0	λ_1	0

Tableau 1.6-1 : Expressions des matrices $[\lambda]$, $[\partial_i\lambda]$, $[\partial^2_{ij}\lambda]$.

$$
(1.6\text{-}3)\quad
\begin{cases}
\partial_{xy}r = \dfrac{1}{\Delta^2}\{(y_2-y_3)(x_3-x_2)\partial_{11}r+(y_3-y_1)(x_1-x_3)\partial_{22}r+(y_1-y_2)(x_2-x_1)\partial_{33}r \\
\qquad + [(y_2-y_3)(x_1-x_3)+(y_3-y_1)(x_3-x_2)]\partial_{12}r \\
\qquad + [(y_3-y_1)(x_2-x_1)+(y_1-y_2)(x_1-x_3)]\partial_{23}r \\
\qquad + [(y_1-y_2)(x_3-x_2)+(y_2-y_3)(x_2-x_1)]\partial_{31}r\}, \\
\partial_{yy}r = \dfrac{1}{\Delta^2}\{(x_3-x_2)^2\partial_{11}r+(x_1-x_3)^2\partial_{22}r+(x_2-x_1)^2\partial_{33}r \\
\qquad + 2(x_3-x_2)(x_1-x_3)\partial_{12}r+2(x_1-x_3)(x_2-x_1)\partial_{23}r+2(x_2-x_1)(x_3-x_2)\partial_{31}r\}.
\end{cases}
$$

1.7. Interpolation d'une fonction v et dérivées de la fonction interpolée.
Soit $\pi_{K_i}v$ la fonction interpolée sur le triangle K_i. Les relations (1.4-9) et (1.5-2) permettent d'écrire

$$\pi_{K_i}v = [DLLC(v)]_{1\times 12}[R_i]_{12\times 1} ,$$

ou encore, grâce aux relations (1.4-7) et (1.5-1) :

$$(1.7\text{-}1)\qquad \pi_{K_i}v = [DLGL(v)]_{1\times 12}[D]_{12\times 12}[A_i]_{12\times 10}[\lambda]_{10\times 1} .$$

Par suite

$$
(1.7\text{-}2)\quad
\begin{cases}
\partial_x\pi_{K_i}v = [DLGL(v)]\,[D]\,[A_i][\partial_x\lambda] , \\
\partial_y\pi_{K_i}v = [DLGL(v)]\,[D]\,[A_i]\,[\partial_y\lambda] , \\
\partial_{xx}\pi_{K_i}v = [DLGL(v)]\,[D]\,[A_i]\,[\partial_{xx}\lambda] , \\
\partial_{xy}\pi_{K_i}v = [DLGL(v)]\,[D]\,[A_i]\,[\partial_{xy}\lambda] , \\
\partial_{yy}\pi_{K_i}v = [DLGL(v)]\,[D]\,[A_i]\,[\partial_{yy}\lambda] .
\end{cases}
$$

Les matrices colonnes $[\partial_x \lambda]$ et $[\partial_y \lambda]$ sont définies en fonction des matrices $[\partial_i \lambda]$, i=1,2,3 (cf. Tableau 1.6-1) comme suit :

$$(1.7\text{-}3) \quad \begin{cases} [\partial_x \lambda] = \frac{1}{\Delta} \{(y_2-y_3)[\partial_1 \lambda]+(y_3-y_1)[\partial_2 \lambda]+(y_1-y_2)[\partial_3 \lambda]\} , \\ [\partial_y \lambda] = \frac{1}{\Delta} \{(x_3-x_2)[\partial_1 \lambda]+(x_1-x_3)[\partial_2 \lambda]+(x_2-x_1)[\partial_3 \lambda]\} . \end{cases}$$

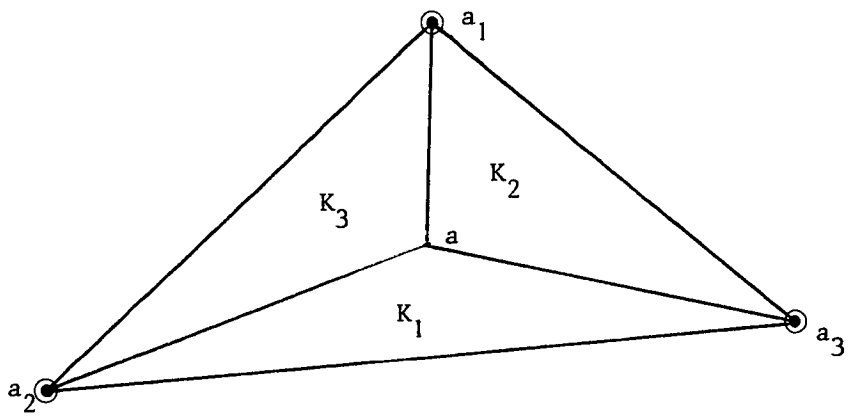
On obtient de même les matrices $[\partial_{xx} \lambda]$, $[\partial_{xy} \lambda]$, $[\partial_{yy} \lambda]$ en fonction des matrices $[\partial_{11} \lambda]$, $[\partial_{12} \lambda]$, $[\partial_{13} \lambda]$, $[\partial_{22} \lambda]$, $[\partial_{23} \lambda]$, $[\partial_{33} \lambda]$ par analogie avec les relations (1.6-3) (remplacer r par λ).

2. - IMPLEMENTATION DE L'ELEMENT FINI DE HSIEH-CLOUGH-TOCHER-REDUIT

Dans ce numéro, nous indiquons les modifications qu'il convient d'apporter aux résultats du paragraphe 1 pour réaliser l'implémentation de l'élément fini de HSIEH-CLOUGH-TOCHER réduit.

2.1. Définition de l'élément fini H.C.T.-réduit :

La définition de l'élément fini H.C.T.-réduit (K,P_K,Σ_K) est condensée sur la Figure 2.1-1, les notations étant similaires à celles de la Figure 1.1-1.



$P_K = \{p \in \mathcal{C}^1(K)\ ;\ r_i = p|_{K_i} \in P_3(K_i)\ ,\ 1 \le i \le 3\ ,$

$\partial_\nu p \in P_1(K')$ pour chaque côté K' de K$\}$;

$\dim P_K = 9$;

$\Sigma_K = \{p(a_i), Dp(a_i)(a_{i-1}-a_i),\ Dp(a_i)(a_{i+1}-a_i),\ 1 \le i \le 3\}$;

a = centre de gravité du triangle K (pour simplifier)

Figure 2.1-1 : Elément fini H.C.T.-réduit

2.2. Passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux :

Par analogie avec la relation (1.4-7), nous avons

$$(2.2\text{-}1) \qquad [DLLC(v)]_{(1,9)} = [DLGL(v)]_{1,9}\,[D]_{(9,9)}$$

où

$$(2.2\text{-}2) \qquad [DLGL(v)] = [v(a_1)\ v(a_2)\ v(a_3)\ \frac{\partial v}{\partial x}(a_1)\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_1)\ \frac{\partial v}{\partial x}(a_2)\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_2)\ \frac{\partial v}{\partial x}(a_3)\ \frac{\partial v}{\partial y}(a_3)],$$

$$(2.2\text{-}3) \qquad \left\{ \begin{aligned} [DLLC(v)] = [&v(a_1)\ v(a_2)\ v(a_3)\ Dv(a_1)(a_3-a_1)\ Dv(a_1)(a_2-a_1) \\ &Dv(a_2)(a_1-a_2)\ Dv(a_2)(a_3-a_2)\ Dv(a_3)(a_2-a_3)\ Dv(a_3)(a_1-a_3)] \end{aligned} \right.$$

et

$$(2.2\text{-}4) \qquad [D] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \bigcirc \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & d_1 & & & & & \\ & & & & d_2 & & & & \\ \bigcirc & & & & & d_3 & & & \end{bmatrix} \quad ;$$

dans cette dernière expression, les matrices $[d_i]$ sont données par les relations (1.4-10).

2.3. Expression des polynômes de base

Dans BERNADOU-HASSAN [1], on montre que les polynômes de base relatifs au triangle K_i s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$(2.3\text{-}1) \qquad [R_i]_{9\times 1} = [A_i]_{9\times 10} \times [\lambda]_{10\times 1} \ .$$

De façon plus précise, si l'on pose

$$
(2.3\text{-}2)\quad
\begin{cases}
\pi_{K_i} v = v(a_i) r^0_{i,i} + v(a_{i+1}) r^0_{i,i+1} + v(a_{i+2}) r^0_{i,i+2} \\
\qquad + Dv(a_i)(a_{i+2}-a_i) r^1_{i,i,i+2} + Dv(a_i)(a_{i+1}-a_i) r^1_{i,i,i+1} \\
\qquad + Dv(a_{i+1})(a_i-a_{i+1}) r^1_{i,i+1,i} + Dv(a_{i+1})(a_{i+2}-a_{i+1}) r^1_{i,i+1,i+2} \\
\qquad + Dv(a_{i+2})(a_{i+1}-a_{i+2}) r^1_{i,i+2,i+1} + Dv(a_{i+2})(a_i-a_{i+2}) r^1_{i,i+2,i}
\end{cases}
$$

la relation (2.3-1) s'écrit sous la forme indiquée Figure 2.3-1.

Les dérivées des polynômes de base s'obtiennent d'une manière entièrement analogue à celle décrite dans la section 1.6. En particulier, les relations (1.6-2) et (1.6-3) restent valables, sans aucun changement.

2.4. Interpolation d'une fonction v et dérivées partielles de la fonction interpolée

Soit $\pi_{K_i} v$ la fonction interpolée sur le triangle K_i. Les relations (2.2-3) et (2.3-2) permettent d'écrire

$$
(2.4\text{-}1)\quad \pi_{K_i} v = [DLLC(v)]_{1\times 9}\, [R_i]_{9\times 1} ,
$$

ou encore, grâce aux relations (2.2-1) et (2.3-1) :

$$
(2.4\text{-}2)\quad \pi_{K_i} v = [DLGL(v)]_{1\times 9}\, [D]_{9\times 9}\, [A_i]_{9\times 10}\, [\lambda]_{10\times 1} .
$$

Les dérivées de la fonction interpolée $\pi_{K_i} v$ sont alors données par

$$
(2.4\text{-}3)\quad
\begin{cases}
\partial_x \pi_{K_i} v = [DLGL(v)]\, [D]\, [A_i]\, [\partial_x \lambda] , \\
\partial_y \pi_{K_i} v = [DLGL(v)]\, [D]\, [A_i]\, [\partial_y \lambda] , \\
\partial_{xx} \pi_{K_i} v = [DLGL(v)]\, [D]\, [A_i]\, [\partial_{xx} \lambda] , \\
\partial_{xy} \pi_{K_i} v = [DLGL(v)]\, [D]\, [A_i]\, [\partial_{xy} \lambda] , \\
\partial_{yy} \pi_{K_i} v = [DLGL(v)]\, [D]\, [A_i]\, [\partial_{yy} \lambda] .
\end{cases}
$$

Pour la définition des matrices $[\partial_x \lambda]$, $[\partial_y \lambda]$, $[\partial_{xx} \lambda]$, $[\partial_{xy} \lambda]$, $[\partial_{yy} \lambda]$, nous renvoyons à la section 1.7.

$$
\begin{bmatrix} r^{o}_{i,i} \\ r^{o}_{i,i+1} \\ r^{o}_{i,i+2} \\ r^{1}_{i,i,i+2} \\ r^{1}_{i,i,i+1} \\ r^{1}_{i,i+1,i} \\ r^{1}_{i,i+1,i+2} \\ r^{1}_{i,i+2,i+1} \\ r^{1}_{i,i+2,i} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}(\eta_{i+1}-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & \frac{3}{2}(3+\eta_{i+1}) & \frac{3}{2}(3-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}(1-2\eta_i-\eta_{i+2}) & 1 & 0 & -\frac{3}{2}(1-\eta_i) & \frac{3}{2}(\eta_i+\eta_{i+2}) & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1-\eta_i) \\
\frac{1}{2}(1+2\eta_i+\eta_{i+1}) & 0 & 1 & -\frac{3}{2}(\eta_i+\eta_{i+1}) & -\frac{3}{2}(1+\eta_i) & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1+\eta_i) \\
-\frac{1}{4}(1+\eta_{i+1}) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(5+3\eta_{i+1}) & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4}(1-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(5-3\eta_{i+2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4}(1-\eta_{i+2}) & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}(1-3\eta_{i+2}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-\frac{1}{2}\eta_i & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1-3\eta_i) & \frac{1}{4}(1+3\eta_i) & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-3\eta_i) \\
\frac{1}{2}\eta_i & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-3\eta_i) & -\frac{1}{4}(1+3\eta_i) & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(1+3\eta_i) \\
\frac{1}{4}(1+\eta_{i+1}) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1+3\eta_{i+1}) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_i^3 \\ \lambda_{i+1}^3 \\ \lambda_{i+2}^3 \\ \lambda_i^2\lambda_{i+2} \\ \lambda_i^2\lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+1}^2\lambda_i \\ \lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2} \\ \lambda_{i+2}^2\lambda_{i+1} \\ \lambda_{i+2}^2\lambda_i \\ \lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} \end{bmatrix}
$$

Figure 2.3-1 : Les polynômes de base associés au triangle K_i

3. - RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES DE POTENTIEL ET DE PLAQUES

On va donner deux exemples d'applications de l'élément fini H.C.T.-complet (resp. H.C.T.-réduit), le premier est un problème de potentiel (2ème ordre), et le deuxième un problème de plaque (4ème ordre).

3.1. Un problème de potentiel.

Formulation variationnelle du problème

Soit Ω un ouvert borné du plan R^2. Le problème s'énonce alors :

Trouver $u \in H_o^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_o^1(\Omega)$ on ait

$$(3.1\text{-}1) \qquad \int_\Omega \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla v} \, dx \, dy = \int_\Omega f \, v \, dx \, dy,$$

où $\overrightarrow{\nabla u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2$, ce qui est(formellement) équivalent à

$$(3.1\text{-}2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \ , \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Les problèmes approchés

La solution u est approchée dans l'espace discret V_h construit à partir de l'élément fini H.C.T.-complet (resp. H.C.T.-réduit). Le problème discret s'énonce :

$$(3.1\text{-}3) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u}_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h, \\ a(\tilde{u}_h, v_h) = f(v_h). \end{cases}$$

Les relations (1.7-2) (resp. (2.4-3)) permettent d'écrire sur chaque sous-triangle K_i :

$$(3.1\text{-}4) \qquad \begin{cases} \partial_x \tilde{u}_h = [DLGL\ (\tilde{u}_h)]\ [D]\ [A_i]\ [\partial_x \lambda] \ , \\ \partial_y \tilde{u}_h = [DLGL\ (\tilde{u}_h)]\ [D]\ [A_i]\ [\partial_y \lambda] \ . \end{cases}$$

La matrice de rigidité élémentaire liée à chacun des sous-triangles K_i, i=1,2,3, est obtenue à partir de la relation

$$
(3.1\text{-}5)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\int_{K_i} [\partial_x \tilde{u}_h \;\; \partial_y \tilde{u}_h] \begin{bmatrix} \partial_x v_h \\ \partial_y v_h \end{bmatrix} \, dx\, dy \\
= [DLGL(\tilde{u}_h)]_{1\times 12}\, [DA_i]_{12\times 10} \left\{ \displaystyle\int_{K_i} [\partial_x \lambda \;\; \partial_y \lambda]_{10\times 2} \; {}^t[\partial_x \lambda \;\; \partial_y \lambda]_{2\times 10} \, dx\, dy \right\} \\
\qquad\qquad {}^t[DA_i]_{10\times 12} \; {}^t[DLGL(v_h)]_{12\times 1}
\end{cases}
$$

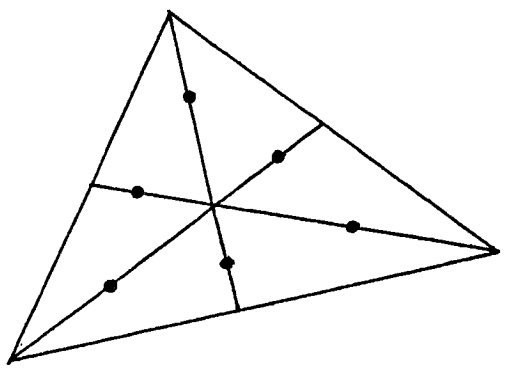
(resp. une expression analogue où la dimension 12 est remplacée par 9).

L'intégrale peut être calculée exactement (on doit intégrer un polynôme de degré 4) ou bien, évaluée à l'aide d'un schéma d'intégration numérique tel que (cf. BERNADOU-DUCATEL [1]) :

$$
(3.1\text{-}6)\quad \forall\, \hat{\phi} \in P_4(\hat{K}),\ \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\ ,
$$

où $\hat{K}$ désigne le triangle de référence, et $\hat{E}$ désigne la différence entre l'intégrale exacte et l'intégrale approchée.
Dans la figure 3.1-1 nous donnons un schéma d'intégration numérique vérifiant la condition (3.1-6). Ce schéma est extrait de LYNESS-JESPERSEN [1]. On note S-I-J le schéma d'intégration qui utilise I points d'intégration, et qui est exact pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à J.

S-6-4



Coordonnées barycentriques $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 = 1-\lambda_1-\lambda_2)$		Ordre de multiplicité	Poids (à multiplier par l'aire du triangle)
λ_1	λ_2		
0.816847572980458 5	0.09157621350977073	3	0.1099517436553218
0.1081030181680702	0.4459484909159649	3	0.2233815896780115

Figure 3.1-1

Schéma d'intégration numérique exact pour les polynômes de degré 4, 6 noeuds.

Nous écrivons

$$\int_{K_i} \phi(x,y)\,dx\,dy \sim \text{aire}(K_i) \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell\, \phi(b_\ell).$$

D'une manière générale, la prise en compte de l'intégration numérique équivaut à la résolution du nouveau problème discret suivant :

$$(3.1\text{-}7)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h, \\ a_h(u_h,v_h) = f_h(v_h)\ , \end{cases}$$

où

$$(3.1\text{-}8)\quad \begin{cases} a_h(u_h,v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left([DLGL(u_h)]_{1\times 12}\ [M]_{12\times 12}\ {}^t[DLGL(v_h)]_{12\times 1}\right)\ , \\ [M] = \sum_{i=1}^{3} [M_i], \\ [M_i] = [DA_i]\left[\text{aire}(K_i) \sum_{\ell=1}^{L} [\omega_\ell \{[\partial_x\lambda\ \partial_y\lambda]\ {}^t[\partial_x\lambda\ \partial_y\lambda]\}\ (b_\ell)]\right]\ {}^t[DA_i]\ , \\ \\ f_h(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left([B]_{1\times 12}\ {}^t[DLGL(v_h)]_{12\times 1}\right)\ , \\ [B] = \sum_{i=1}^{3} [B_i]\ , \\ [B_i] = \text{aire}\ (K_i) \sum_{\ell=1}^{L} \{w_\ell\ f\ (b_\ell)\ {}^t[\ \lambda(b_\ell)]_{1\times 10}\}\ {}^t[DA_i]_{10\times 12}\ , \end{cases}$$

(resp. une expression analogue où la dimension 12 est remplacée par 9).

Un problème particulier

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[,$$

$$(3.1\text{-}9)\quad f = 2[x^2(1-x)-y(1-y)(1-3x)].$$

La solution exacte est alors

$$(3.1\text{-}10)\quad u = x^2y(1-x)(1-y).$$

Prise en compte des conditions aux limites

Sur la figure 3.1-2 nous indiquons comment s'effectue la prise en compte des conditions aux limites. A chaque sommet de triangle situé sur la frontière est associé un vecteur à trois composantes dont les valeurs sont 0 ou 1. Les éléments de ce vecteur correspondent respectivement aux 3 degrés de liberté suivants :

$$[v \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y}]$$

i) La valeur (1) indique que le degré de liberté correspondant est bien une inconnue du problème.

ii) La valeur (0) indique que le degré de liberté correspondant est nul (compte tenu des conditions aux limites) et doit être supprimé. Pour ce faire, on supprime la ligne et la colonne afférente à ce noeud dans la matrice de rigidité globale ; il est préfarable d'effectuer cette suppression lors de la formation de la matrice de rigidité élémentaire.

Sur la Figure 3.1-2 nous indiquons les trois types de situations rencontrées dans l'étude de notre exemple :

1 - sommet sur un côté parallèle à l'axe des x ;
2 - sommet sur un côté parallèle à l'axe des y ;
3 - sommet situé en un coin du carré.

Précisons que les degrés de liberté associés aux dérivées normales aux milieux des côtés des triangles situés sur Γ sont des inconnues du problème.

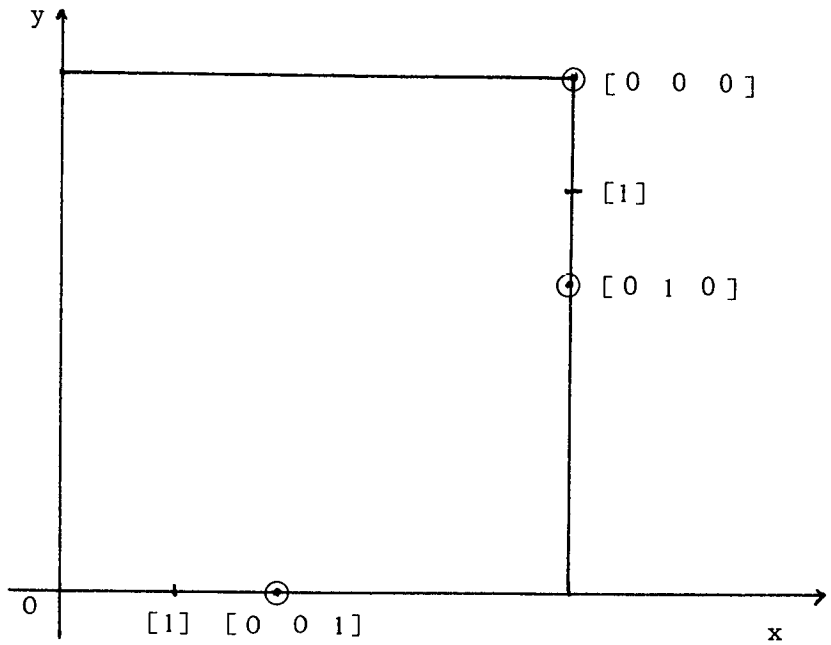


Figure 3.1-2 : Prise en compte des conditions aux limites.

Méthode de résolution

Pour résoudre le système d'équations linéaires simultanées à matrice symétrique définie positive, nous employons la méthode de factorisation de Cholesky (cf. BERNADOU-BOISSERIE [1]).

Résultats numériques :

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. A chaque valeur de N nous associons une triangulation du carré à l'aide de triangles rectangles isocèles dont les côtés ont pour mesure $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N}$, $\frac{\sqrt{2}}{N}$ (cf. Figure 3.1-3). Le problème approché est résolu successivement pour N = 4,8,12,16.

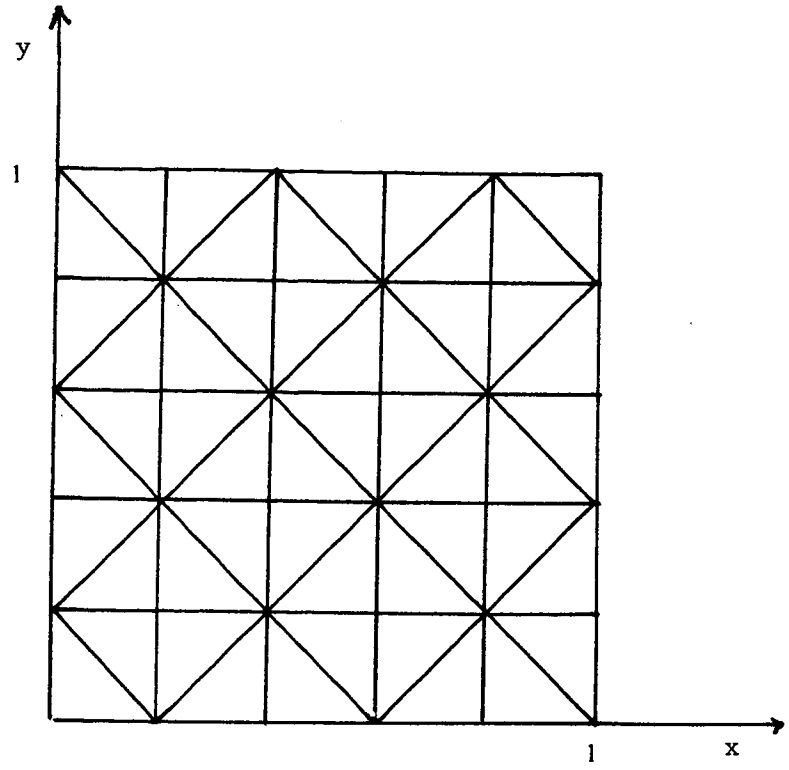


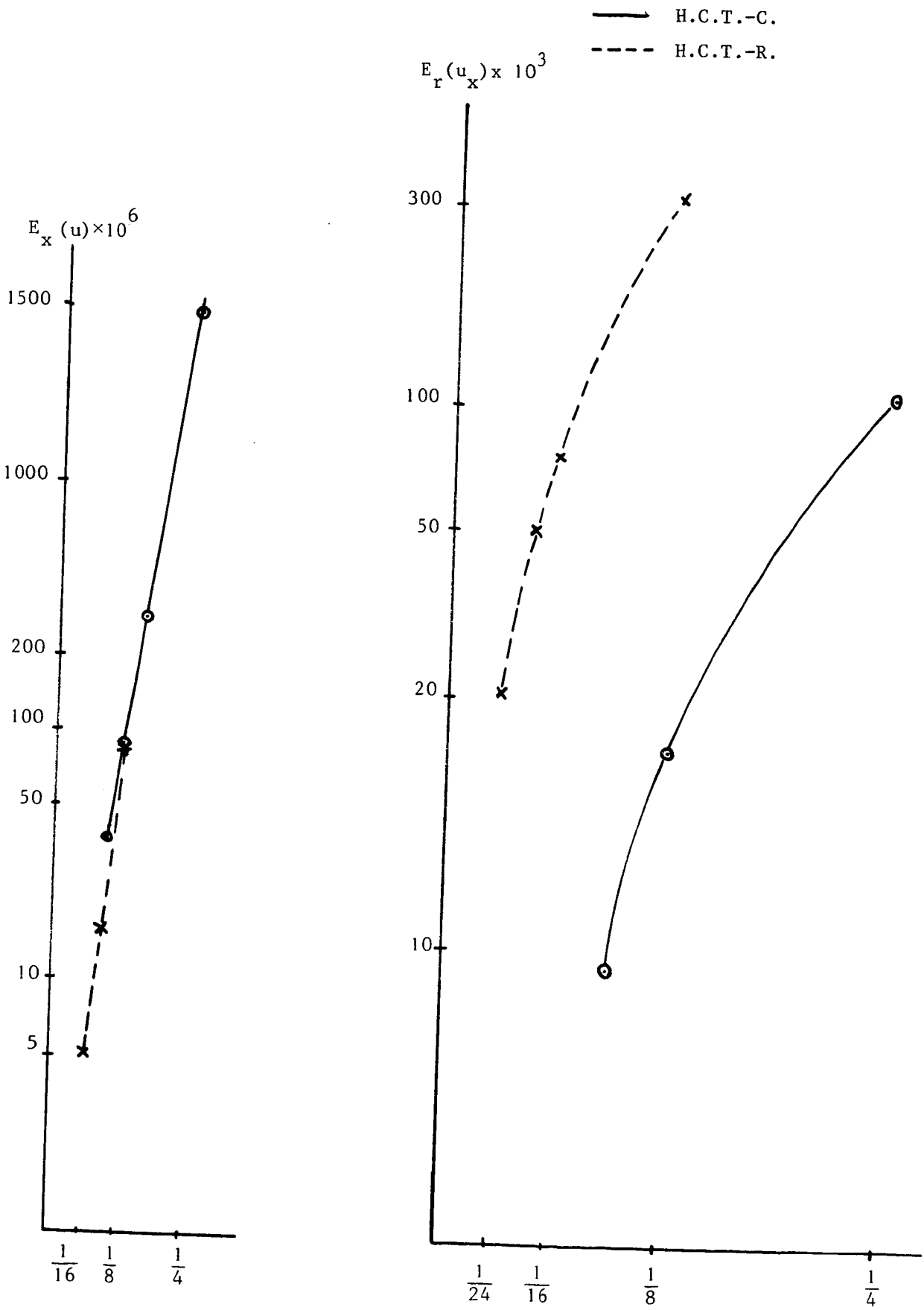
Figure 3.1-3 : Exemple de triangulation du carré dans le cas N=4.

Sur le graphique 3.1-1 nous indiquons les variations, en fonction de h, des erreurs relatives

$$E_r(u) = \left|\frac{u-u_h}{u}\right| \quad , \quad E_r(u_x) = \left|\frac{\partial_x u - \partial_x u_h}{\partial_x u}\right| \quad \text{calculées au point } (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Le tableau 3.1-1 (resp. 3.1-2) contient les résultats numériques obtenus à l'aide de H.C.T.-complet (resp. H.C.T.-réduit).

Les essais numériques ont été réalisés sur des ordinateurs CII/IRIS-80 et IBM/B 168.



Graphique 3.1.1 - Problème de potentiel

L'erreur relative au point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (coordonnées semi-logarithmiques)

$h = \frac{1}{N}$	Nombre d'éléments	$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0.03125$	$u_x(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0.0625$	$E_r(u)$	$E_r(u_x)$
		u_h	u_{hx}	$\left\lvert \frac{u - u_h}{u} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{u_x - u_{hx}}{u_x} \right\rvert$
1/2	8	0.03036326209	0.05502723817	0.028375616	0.119564192
1/4	32	0.03120220624	0.06344213994	0.001529408	0.015074224
1/6	72	0.03124080863	0.06278352599	0.000294124	0.0045364
1/8	128	0.03124710304	0.06259999996	0.000092704	0.001599984
1/10	200	0.0312488162	0.06254233565	0.000037882	0.00067737

Tableau 3-1-1

Problème du potentiel

H.C.T.-complet

La solution du problème du potentiel au point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$E_r(u) = 0.476\ h^{4.112}$$

$$E_r(u_x) = 1.172\ h^{3.180}$$

$h = \frac{1}{N}$	Nombre d'éléments	$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0.03125$	$u_x(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0.0625$	$E_r(u)$	$E_r(u_x)$
		u_h	u_{hx}	$\left\lvert \frac{u - u_h}{u} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{u_x - u_{hx}}{u_x} \right\rvert$
1/2	8	0.03049148147	0.06302432426	.024272593	0.008389188
1/4	32	0.03120520189	0.0645031809	0.00143354	0.032050894
1/8	128	0.03124730993	0.0630065877	0.000086082	0.008105403
1/12	288	0.03124947138	0.0627339257	0.000016918	0.00374281
1/16	512	0.031249833	0.06262531874	0.00000534	0.0020051

Tableau 3-1-2

Problème du potentiel

H.C.T.-réduit

La solution du problème du potentiel au point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$E_r(u) = 0.398\ h^{4.05}$$

$$E_r(u_x) = 0.035\ h^{0.852}$$

3.2. Un problème de plaque :

Formulation variationnelle du problème

Soit Ω un ouvert borné du plan $\mathbf{R}^2$. Le problème s'énonce alors :

Trouver $u \in H_o^2(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_o^2(\Omega)$ on ait :

$$(3.2\text{-}1)\quad \int_\Omega \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \{(1-\nu)[u_{xx}v_{xx}+2u_{xy}v_{xy}+u_{yy}v_{yy}] + \nu[u_{xx}+u_{yy}][v_{xx}+v_{yy}]\}dx\,dy = \int_\Omega fv\,dx\,dy ,$$

où E,ν,e désignent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la plaque. Si l'on suppose, pour simplifier, que ces trois paramètres sont constants, alors le problème (3.2-1) est (formellement) équivalent aux équations :

$$(3.2\text{-}2)\quad \begin{cases} \dfrac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega , \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma=\partial\Omega . \end{cases}$$

Le problème approché

Soit V_h l'espace discret construit à partir de l'élément fini H.C.T.-complet (resp. H.C.T.-réduit). Le problème approché s'énonce ainsi :

$$(3.2\text{-}3)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u}_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h \\ a(\tilde{u}_h, v_h) = f(v_h) . \end{cases}$$

Les relations (1.7-2) (resp. (2.4-3)) permettent d'écrire sur chaque sous-triangle K_i :

$$(3.2\text{-}4)\quad \begin{cases} \partial_x \tilde{u}_h = [DLGL(\tilde{u}_h)][DA_i][\partial_x \lambda] , \\ \partial_y \tilde{u}_h = [DLGL(\tilde{u}_h)][DA_i][\partial_y \lambda] , \\ \partial_{xx} \tilde{u}_h = [DLGL(\tilde{u}_h)][DA_i][\partial_{xx} \lambda] , \\ \partial_{xy} \tilde{u}_h = [DLGL(\tilde{u}_h)][DA_i][\partial_{xy} \lambda] , \\ \partial_{yy} \tilde{u}_h = [DLGL(\tilde{u}_h)][DA_i][\partial_{yy} \lambda] . \end{cases}$$

La matrice de rigidité élémentaire liée à chacun des sous-triangles K_i, i=1,2,3, est obtenue à l'aide de la relation suivante

$$
\begin{aligned}
&\int_{K_i} \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \left[\partial_{xx}\tilde{u}_h \;\; \partial_{xy}\tilde{u}_h \;\; \partial_{yy}\tilde{u}_h\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{xx}v_h \\ \partial_{xy}v_h \\ \partial_{yy}v_h \end{bmatrix} dx\, dy \\
&= [DLGL(\tilde{u}_h)]_{1\times 12} [DA_i]_{12\times 10} \left\{ \int_{K_i} \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} [\partial_{xx}\lambda \;\; \partial_{xy}\lambda \;\; \partial_{yy}\lambda]_{10\times 3} \right. \\
&\left. \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} {}^t[\partial_{xx}\lambda \;\; \partial_{xy}\lambda \;\; \partial_{yy}\lambda]_{3\times 10} \; dx\, dy \right\} {}^t[DA_i]_{10\times 12} \times \\
&{}^t[DLGL(v_h)]_{12\times 1}
\end{aligned}
\tag{3.2-5}
$$

(resp. une expression analogue où la dimension 12 est remplacée par 9).

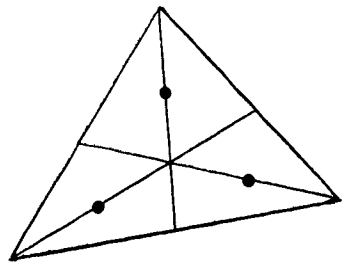
Lorsque E,e,ν sont constants, l'intégrale peut être calculée exactement (on doit intégrer un polynôme de degré 2). Dans le cas général on utilise un schéma d'intégration numérique tel que :

$$
\forall\, \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}) \;,\; \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \;, \tag{3.2-6}
$$

où $\hat{K}$ désigne le triangle de référence, et $\hat{E}$ désigne la différence entre l'intégrale exacte et l'intégrale approchée (cf. BERNADOU [1]).

Dans la figure 3.2-1 nous donnons un schéma d'intégration numérique classique vérifiant la condition (3.2-6).

S-3-2



Coordonnées barycentriques ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 = 1-\lambda_1-\lambda_2$)		Ordre de multiplicité	Poids (à multiplier par l'aire du triangle)
λ_1	λ_2		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{1}{3}$

Figure 3.2-1

Schéma d'intégration numérique exact pour les polynômes de degré 2, 3 noeuds

Ainsi,la prise en compte de l'intégration numérique équivaut à la résolution du nouveau problème discret suivant :

$$(3.2\text{-}7)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h, \\ a_h(u_h,v_h) = f_h(v_h)\ , \end{cases}$$

où

$$(3.2\text{-}8)\quad \begin{cases} a_h(u_h,v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} ([DLGL(u_h)]_{1\times 12}\ [M]_{12\times 12}\ {}^t[DLGL(v_h)]_{12\times 1})\ , \\ [M] = \sum_{i=1}^{3} [M_i], \\ [M_i] = [DA_i] \left[aire(K_i) \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell \left\{ \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}\ [\partial_{xx}\lambda\ \partial_{xy}\lambda\ \partial_{yy}\lambda] \right.\right. \\ \left.\left. {}^t[\partial_{xx}\lambda\ \partial_{xy}\lambda\ \partial_{yy}\lambda]\right\}(b_\ell)\right]\ {}^t[DA_i]\ , \\ f_h(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} ([B]_{1\times 12}\ {}^t[DLGL(v_h)]_{12\times 1})\ , \\ [B] = \sum_{i=1}^{3} [B_i], \\ [B_i] = aire(K_i) \sum_{\ell=1}^{L} \{\omega_\ell\ f(b_\ell)\ {}^t[\lambda(b_\ell)]_{1\times 10}\}\ {}^t[DA_i]_{10\times 12}\ , \end{cases}$$

(resp. une expression analogue où la dimension 12 est remplacée par 9).

Un problème particulier

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[\ , \ (E,e,\nu = \text{constantes}),$$

$$(3.2\text{-}9) \qquad f = \frac{2Ee^3}{3(1-\nu^2)} [3x^2(1-x)^2 + 3y^2(1-y)^2 + (1-6x+6x^2)(1-6y+6y^2)] \ .$$

La solution exacte est alors

$$(3.2\text{-}10) \qquad u = x^2(1-x)^2 \, y^2(1-y)^2 \ .$$

Prise en compte des conditions aux limites

Pour le problème continu que nous considérons (plaque encastrée) les conditions aux limites sont :

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega,$$

ce qui revient à annuler tous les degrés de liberté situés sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ (cf. Figure 3.2-2).

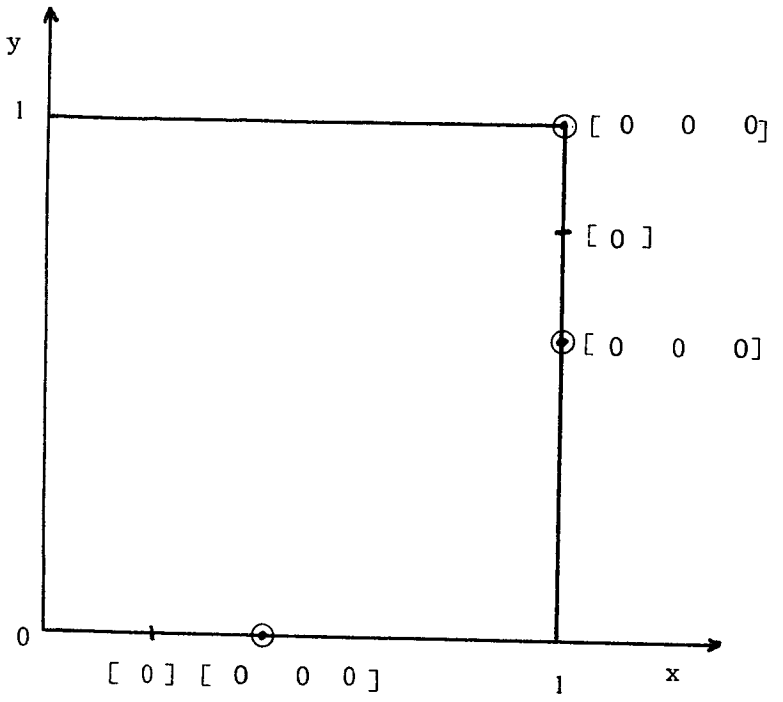


Figure 3.2-2 : Prise en compte des conditions aux limites

(resp. les valeurs des dérivées normales aux milieux des côtés ne figurent pas).

Résultats numériques

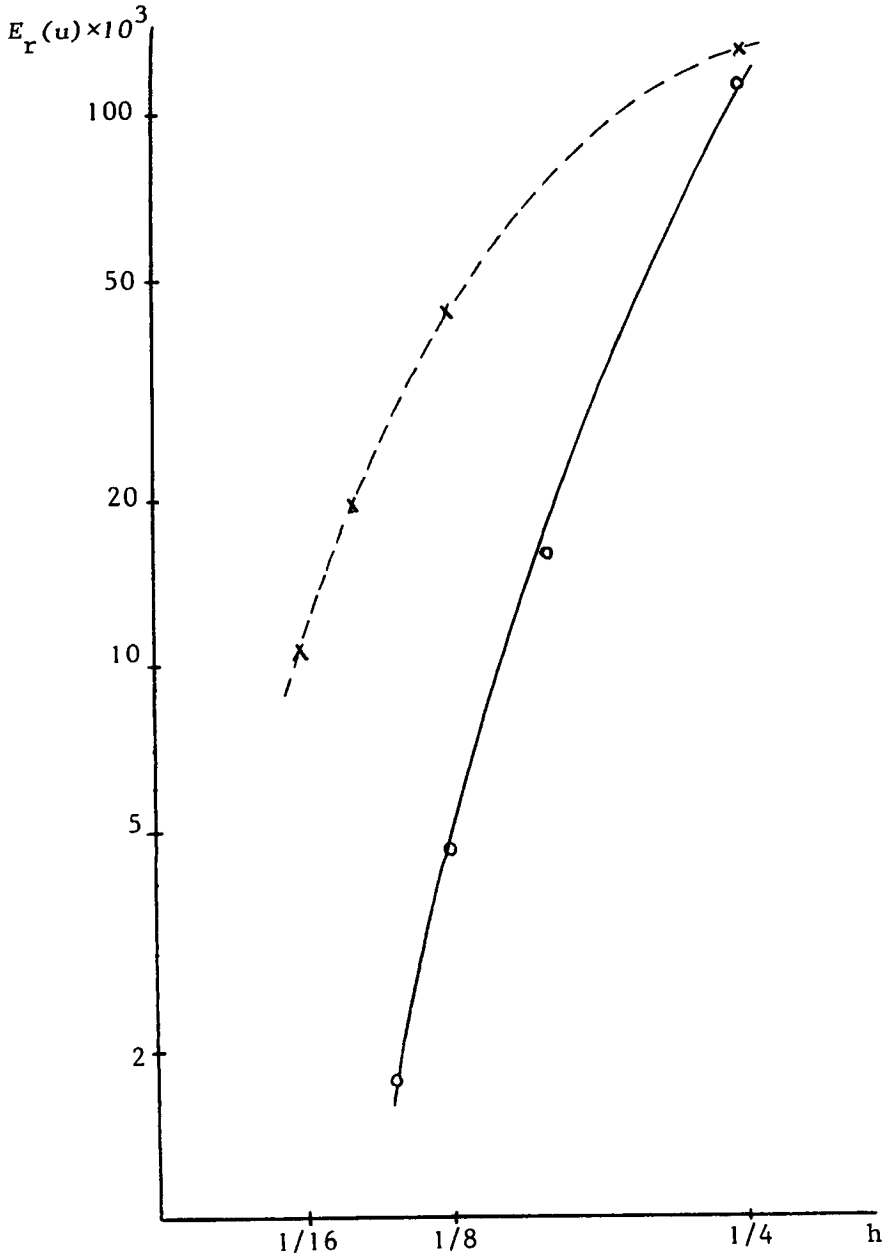
Nous utilisons la même méthode de triangulation et la même méthode de résolution que pour le problème du potentiel.

Sur les graphiques 3.2-1 nous indiquons les variations, en fonction de h, des erreurs relatives

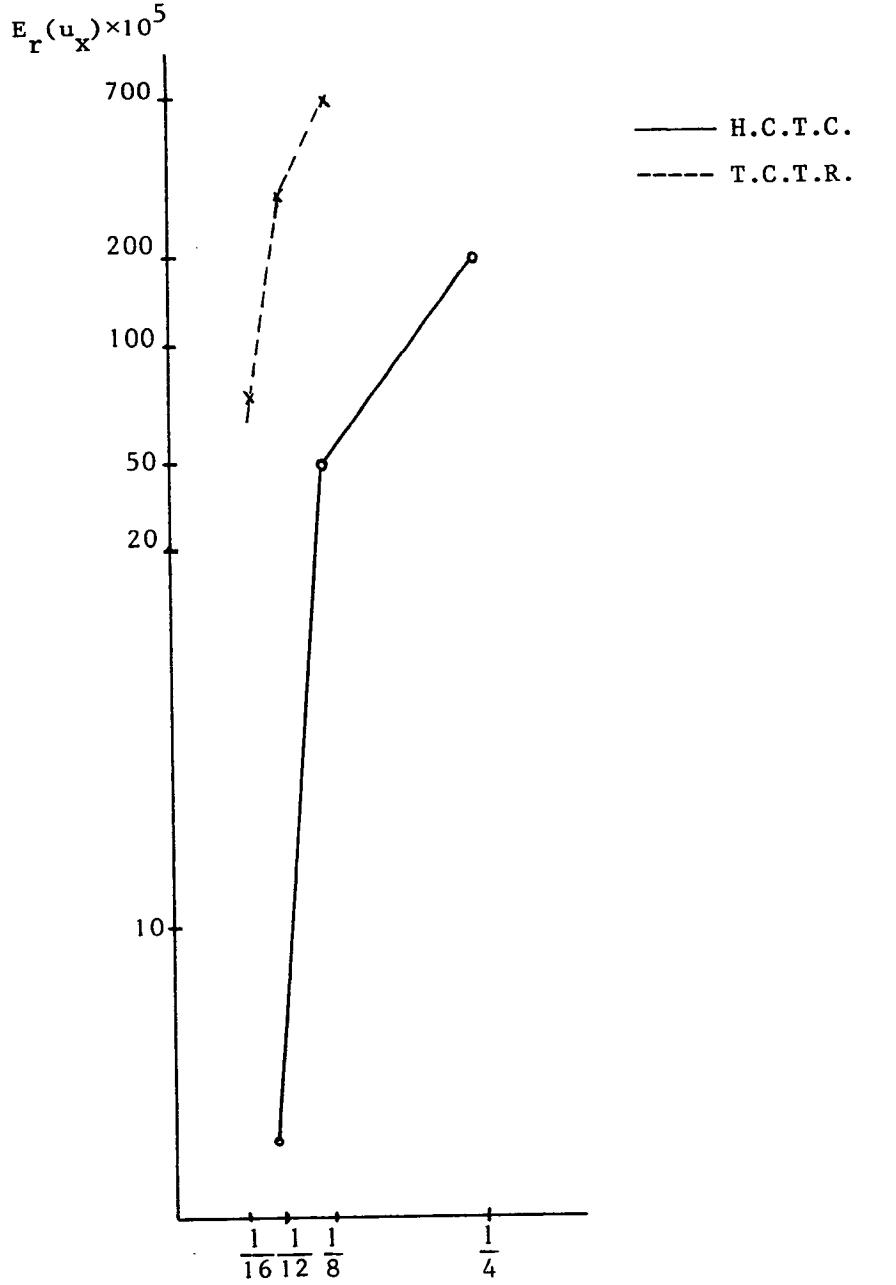
$$E_r(u) = \left|\frac{u-u_h}{u}\right| \quad \text{au point } (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ et } E_r(u_x) = \left|\frac{\partial_x u-\partial_x u_h}{\partial_x u}\right| \quad \text{au point } (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}).$$

Le tableau 3.2-1 (resp. 3.2-2) contient les résultats numériques obtenus à l'aide de H.C.T.-complet (resp. H.C.T.-réduit).

Les essais numériques ont été réalisés sur des ordinateurs CII/IRIS 80 et IBM/B168.



I : L'erreur relative au point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$



II : L'erreur relative au point $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

Graphique 3.2-1 : Problème de plaque
(Coordonnées semi-logarithmiques)

$h = \frac{1}{N}$	Nombre d'éléments	$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0.00390625$	$u_x(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 0.006591796875$	$E_r(u)$	$E_r(u_x)$
		$u_h \times 10^3$	$u_{hx} \times 10^3$	$\left\lvert \frac{u - u_h}{u} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{u_x - u_{hx}}{u_x} \right\rvert$
1/2	8	1.121639333	-	0.71286033	-
1/4	32	3.46721192	6.461638429	0.112393749	0.019745519
1/6	72	3.841935967	-	0.0164387925	-
1/8	128	3.88722026	6.617887845	0.0048716134	0.003958097
1/10	200	3.898910549	-	0.001878899456	-
1/12	288	3.902784505	6.591918537	0.00088716672	0.000018457

Tableau 3.2.1

Problème de la plaque

H.C.T.-COMPLET

$$E_r(u) = 14.014\ h^{3.828}$$

$h = \frac{1}{N}$	Nombre d'éléments	$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 3.90625 \times 10^{-3}$	$u_x(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 6.591796875 \times 10^{-3}$	$E_r(u)$	$E_r(u_x)$
		$u_h \times 10^3$	$u_{hx} \times 10^3$	$\left\lvert \frac{u - u_h}{u} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{u_x - u_{hx}}{u_x} \right\rvert$
1/4	32	3.39655601	-	0.130481661	-
1/6	72	3.608720771	-	0.076167483	-
1/8	128	3.732299074	6.400034375	0.044531456	0.06900029
1/10	200	3.79322577	-	0.028934203	-
1/12	288	3.827163725	6.51479753	0.020246086	0.031118389
1/16	512	3.861442069	6.548706259	0.01147083	0.006537006

Tableau 3.2.2.

Problème de la plaque

H.C.T.-REDUIT

$$E_r(u) = 1.689\ h^{1.777}$$

BIBLIOGRAPHIE

ARGYRIS J.H., FRIED I., SCHARPF D.W.,

[1] The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, 72 (1968), 701-709.

BERNADOU M.,

[1] Sur l'analyse numérique du modèle linéaire de coques minces de W.T. KOITER. Thèse d'Etat, Paris, Juin 1978.

BERNADOU M., BOISSERIE J.M.,

[1] Implémentation de l'élément fini d'ARGYRIS, Rapport IRIA-LABORIA N° 301, Mai 1978.

BERNADOU M., DUCATEL Y.,

[1] Méthodes d'éléments finis avec intégration numérique pour des problèmes elliptiques du quatrième ordre. R.A.I.R.O. Analyse Numérique, 12, N° 1, (1978), 3-26.

BERNADOU M., HASSAN K.,

[1] Basis functions for general HSIEH-CLOUGH-TOCHER triangles, complete or reduced (to appear).

CIARLET P.G.,

[1] The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1977.

CLOUGH R.W., TOCHER J.L.,

[1] Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Octobre 1965.

HASSAN K.,

[1] Programmation des éléments finis $\mathcal{C}^1$-conformes du type Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit, Publication Modulef (à paraître).

[2] Les éléments finis du type HSIEH-CLOUGH-TOCHER complet et réduit pour les coques. Thèse de Docteur Ingénieur, Toulouse, 1979.

LYNESS J.N., JESPERSEN D.,

[1] Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. J. Inst. Maths. Applics., 15 (1975), 19-32.

PERRONNET A.,

[1] The club MODULEF, a library of subroutines for finite element analysis, Proc. "Third Internat. Symp. Comp. Meth. Appl. Sc. Engng.", Versailles (1977).