La méthode d'Euler vue comme une application du raisonnement à partir de cas

Jean Lieber

La méthode d'Euler vue comme une application du raisonnement à partir de cas

Jean Lieber
LORIA — UMR 7503 CNRS, INRIA, Universités de Nancy
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy

Résumé

Cet article montre comment la méthode d'Euler pour résoudre des équations différentielles du premier degré peut être vue comme une application du raisonnement à partir de cas. Cette application anachronique permet de mettre en évidence certaines idées liées à ce mode de raisonnement : la distinction entre analogie recours et analogie heuristique, les problèmes liés à la mémorisation d'un cas, la décomposition de l'adaptation en étapes simples et les liens entre remémoration et adaptation.

1 Introduction

« C'est dans les vieilles marmites qu'on fait les meilleures soupes. » dit la sagesse populaire culinaire. Fort de ce dicton gastronomique, nous avons entrepris de cuisiner le raisonnement à partir de cas (RÀPC) dans la vieille marmite du mathématicien Leonhard Euler (1707-1783). Si le résultat de cette étude est une soupe, il ne faut donc pas s'en étonner.

Ce papier montre comment, à un anachronisme près, la méthode d'Euler pour intégrer numériquement des équations différentielles d'ordre 1 peut être considérée comme une application du RÀPC, en particulier de la phase d'adaptation de ce mode de raisonnement. Au-delà de l'aspect purement anecdotique de cette constatation, celle-ci permet d'illustrer certaines idées liées au RÀPC.

Après avoir rappelé brièvement ce qu'est le RÀPC et donné les notations employées par la suite le concernant (au paragraphe 2), nous rappellerons ce qu'est la méthode d'Euler et nous montrerons comment elle peut être considérée sous l'angle du RÀPC (au paragraphe 3). La discussion a pour but d'analyser cette « application » du RÀPC (au paragraphe 4).

2 Le RÀPC : notions et notations

Ce paragraphe présente quelques notions générales sur le raisonnement à partir de cas et quelques notations. Ces notions et notations seront utilisées dans la suite de l'article.

Les notions de *problème* et de *solution* dépendent du domaine d'application. Un problème est par définition un élément de $\mathtt{Problèmes}$, l'*espace des problèmes*, et une solution, un élément de $\mathtt{Solutions}$, l'*espace des solutions*. On suppose qu'il existe une relation sur $\mathtt{Problèmes} \times \mathtt{Solutions}$ qui signifie « est une solution de ». Une solution d'un problème $\mathtt{pb}$ est dénotée $\mathtt{Sol}(\mathtt{pb})$. Résoudre $\mathtt{pb} \in \mathtt{Problèmes}$ consiste à trouver une solution $\mathtt{Sol}(\mathtt{pb})$ de $\mathtt{pb}$.

L'objectif du raisonnement à partir de cas (RÀPC) est de résoudre un *problème cible* $\mathtt{cible} \in \mathtt{Problèmes}$

$$\mathtt{RàPC} : \mathtt{cible} \mapsto \mathtt{Sol}(\mathtt{cible})$$

en utilisant une solution connue $\mathtt{Sol}(\mathtt{source})$ d'un problème $\mathtt{source}$, appelé *problème source*. Le couple $(\mathtt{source},\mathtt{Sol}(\mathtt{source}))$ est appelé un *cas source*. L'ensemble fini des cas sources est appelé la *base de cas*. Plus généralement, un cas est un couple $(\mathtt{pb},\mathtt{Sol}(\mathtt{pb}))$ avec $\mathtt{pb} \in \mathtt{Problèmes}$.

Le RÀPC est souvent constitué de trois étapes principales : la *remémoration*, l'*adaptation* et l'*apprentissage*. Étant donné $\mathtt{cible}$, un problème cible, la remémoration a pour objectif de choisir un cas source :

$$\mathtt{Remémoration} : \mathtt{cible} \mapsto (\mathtt{source},\mathtt{Sol}(\mathtt{source}))$$

Étant donné le cas remémoré et le problème cible, l'adaptation propose une solution de $\mathtt{cible}$:

$$\mathtt{Adaptation} : (\mathtt{source},\mathtt{Sol}(\mathtt{source})),\mathtt{cible} \mapsto \mathtt{Sol}(\mathtt{cible})$$

L'apprentissage quant à lui peut prendre diverses formes. Une de ces formes consiste dans un premier temps à évaluer l'opportunité de stocker le « nouveau cas » $(\mathtt{cible},\mathtt{Sol}(\mathtt{cible}))$ dans la base de cas, généralement en estimant l'*utilité* future de ce cas. Si le stockage de ce cas est jugé opportun, il est alors effectué.

L'adaptation s'appuie sur la *connaissance de l'adaptation* qui est la connaissance utilisée par le module d'adaptation. Souvent (presque toujours ?) cette connaissance peut se ramener à un ensemble de règles de la forme suivante :

étant donné un *écart* d'un certain type entre les problèmes `source` et `cible`, on a un certain *écart* entre les solutions $\mathtt{Sol}(\mathtt{source})$ et $\mathtt{Sol}(\mathtt{cible})$ qui permet de calculer $\mathtt{Sol}(\mathtt{cible})$ à partir de $\mathtt{Sol}(\mathtt{source})$.

Le choix effectué par la remémoration doit servir à l'adaptation. L'attitude la plus classique pour l'implantation de la remémoration consiste à se donner une mesure de similarité entre problèmes, en espérant qu'un problème proche au sens de cette mesure donnera une « bonne » adaptation (quitte à essayer de régler les paramètres de cette mesure afin de faciliter l'adaptation). À l'inverse, plusieurs études ont eu pour but d'utiliser la connaissance de l'adaptation lors de la remémoration (voir par exemple [14], [1], [7] ou [10]). L'idée est que le « meilleur » cas est celui qui va donner la « meilleure adaptation ». Dès que la notion de « meilleure adaptation » (qui dépend de ce qu'on veut faire du système) est définie, la remémoration est spécifiée.

3 La méthode d'Euler et le RÀPC

Après un rappel sur la méthode d'Euler (§3.1), cette méthode est considérée de l'angle du RÀPC (§3.2).

3.1 Principe de la méthode d'Euler

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable, bornée et à dérivées partielles bornées [1]. On considère une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on sait qu'elle est solution de l'équation différentielle suivante sur I :

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

De plus on connaît un ensemble fini de triplets (a,y_a,ε_a) avec $a \in I$, $y_a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_+$ tels que y_a est une valeur approchée de $y(a)$ à ε_a près :

$$|y(a) - y_a| \leqslant \varepsilon_a \tag{2}$$

Soit $h \in \mathbb{R}$ et soit y_{a+h} défini par

$$y_{a+h} = y_a + h \cdot f(a,y_a) \tag{3}$$

y_{a+h} est une valeur approchée de $y(a+h)$ à ε_{a+h} près, avec

$$\varepsilon_{a+h} = \varepsilon_a + K_1 \cdot \varepsilon_a |h| + K_2 \cdot h^2 \tag{4}$$

avec K_1 et K_2, deux constantes réelles positives [2].

On peut répéter un tel calcul (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$y_{a+(n+1)h} = y_{a+nh} + h \cdot f(a,y_{a+nh})$$

est une valeur approchée de $y(a + (n+1)h)$

avec une erreur majorée par

$$\varepsilon_{a+(n+1)h} = \varepsilon_{a+nh} + K_1 \varepsilon_{a+nh} |h| + K_2 \cdot h^2 \tag{5}$$

(5) entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{a+nh} = (1 + K_1 \cdot |h|)^n \, \varepsilon_a + \frac{K_2}{K_1} |h| \left[(1 + K_1 \cdot |h|)^n - 1 \right]$$

La méthode d'Euler peut s'énoncer de la façon suivante. Étant donné un triplet (a,y_a,ε_a) et un $b \in I$, on veut une valeur approchée y_b de $y(b)$. On considère un entier $n > 0$ et le réel $h = \frac{b-a}{n}$. Les formules ci-dessus donnent les valeurs pour $y_{a+nh} = y_b$ et $\varepsilon_{a+nh} = \varepsilon_b$, avec $|y(b) - y_b| \leqslant \varepsilon_b$.

3.2 La méthode d'Euler vue sous l'angle du RÀPC

On considère un ensemble $\mathcal{B}$ de triplets $(a,y_a,\varepsilon_a) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ réalisant l'équation (2). On cherche une valeur approchée y_b de $y(b)$ pour un $b \in I$. Il y a (au moins) deux types de problèmes différents qu'on peut traiter :

(A) Chercher une valeur approchée y_b de $y(b)$ avec la plus petite majoration de l'erreur ε_b possible, en fixant le nombre n d'itérations.

(B) Chercher une valeur approchée y_b de $y(b)$ avec une majoration de l'erreur ε_b inférieure à une valeur donnée e_b. Toute valeur approchée de ce type convient, mais plus vite on trouvera une solution, mieux ce sera.

Les deux paragraphes suivants font le lien entre les notions et notations concernant le RÀPC (cf. paragraphe 2) et chacun des types de problèmes traités.

3.2.1 Type de problèmes (A) : erreur à minimiser à durée d'adaptation constante

La durée de l'adaptation est (à peu près) proportionnelle à n. On suppose donc dans ce paragraphe que n est une constante.

Un problème cible est donné par un $b \in I$ pour lequel on cherche une valeur approchée y_b de $y(b)$ avec une erreur majorée par un ε_b minimal. Une solution d'un tel problème est donc donnée par y_b et ε_b :

$$\mathtt{cible} = b \qquad \mathtt{Sol}(\mathtt{cible}) = (y_b,\varepsilon_b)$$

En toute rigueur, pour être cohérent avec la philosophie d'Alain Mille [11], il faudrait ajouter à `cible` des expressions du genre « $y_b = ?$ » et « minimiser ε_b » afin de bien mettre en évidence le problème posé. La deuxième expression, permet de spécifier la remémoration, comme nous le verrons plus loin.

1. On se place volontairement sous des hypothèses simplifi catrices : ce qu'on perd en généralité, on le gagne en simplicité.
2. Pour démontrer que $|y(a+h) - y_{a+h}|$ est minoré par ε_{a+h}, on utilise un développement de Taylor-Lagrange d'ordre 1 sur y et d'ordre 0 sur $u \mapsto f(a,u)$.

Un cas source est donné par un $a \in I$ dont une valeur approchée y_a de $y(a)$ est connue à ε_a près :

$$\texttt{source} = a \qquad \texttt{Sol}(\texttt{source}) = (y_a,\varepsilon_a)$$

L'équation différentielle (1) peut s'écrire :

$$dy = dx \cdot f(x,y)$$

dx peut être considéré comme un écart élémentaire entre problèmes et dy comme un écart élémentaire entre solutions. L'équation différentielle lie ces deux écarts et constitue de ce fait la *connaissance de l'adaptation*. L'adaptation se fait en appliquant la méthode d'Euler qui exploite effectivement cette connaissance. En effet, l'équation (3) découle des approximations $h \simeq dx$ et $y_a \simeq y(a)$.

La remémoration consiste à choisir le meilleur cas, c'est-à-dire celui qui donnera la meilleure adaptation. En l'occurrence, on veut minimiser l'erreur, donc la remémoration a pour objectif de trouver le cas source $(\texttt{source},\texttt{Sol}(\texttt{source}))$ avec $\texttt{source} = a$, $\texttt{Sol}(\texttt{source}) = (y_a,\varepsilon_a)$ tel que :

$$\varepsilon_b = (1 + K_1 \cdot |h|)^n \, \varepsilon_a + \frac{K_2}{K_1}|h| \left[(1 + K_1 \cdot |h|)^n - 1\right]$$
$$\text{soit minimum avec } h = \frac{b-a}{n}$$

Notons que ε_b est une fonction non seulement des problèmes $\texttt{source} = a$ et $\texttt{cible} = b$ mais également de ε_a qui est une partie de la solution $\texttt{Sol}(\texttt{source})$. Notons également qu'à ε_a fixé, ε_b est une fonction strictement croissante de $|b - a|$.

3.2.2 Type de problèmes (B) : minimiser la durée de l'adaptation

Résoudre un problème de type (B) c'est chercher une valeur approchée y_b de $y(b)$ à ε_b près, avec $\varepsilon_b \leqslant e_b$:

$$\texttt{cible} = (b,e_b) \quad \texttt{Sol}(\texttt{cible}) = (y_b,\varepsilon_b) \text{ avec } \varepsilon_b \leqslant e_b$$

Alain Mille aurait rajouté au problème des expressions « $y_b =?$ », « contrainte $\varepsilon_b \leqslant e_b$ » et « n minimal ».

Si on connaît un triplet (a,y_a,ε_a) tel que $|y(a) - y_a| \leqslant \varepsilon_a$, on a un problème source donné par a et ε_a et une solution donnée par y_a et ε_a :

$$\texttt{source} = (a,e_a) \text{ avec } e_a = \varepsilon_a \quad \texttt{Sol}(\texttt{source}) = (y_a,\varepsilon_a)$$

$\texttt{Sol}(\texttt{source})$ est bien une solution de $\texttt{source}$ puisque $\varepsilon_a \leqslant e_a$.

L'adaptation se fait de la même façon que pour les problèmes de type (A), à la différence qu'il faut choisir le paramètre n : on veut n tel que n soit l'entier minimum tel que $\varepsilon_b \leqslant e_b$.

Par conséquent, un cas source similaire (c'est-à-dire adaptable) au problème cible est un cas pour lequel il existe un n tel que l'adaptation donnera $\texttt{Sol}(\texttt{cible}) = (y_b,\varepsilon_b)$ avec $\varepsilon_b \leqslant e_b$. Le meilleur cas source similaire est celui pour lequel un tel n sera minimal. Là encore, l'expression complète — à la Mille — du problème cible permettait de spécifier complètement la remémoration.

4 Discussion entre Leonhard et Jules

Jules Martin, inventeur d'une machine à voyager dans le temps et spécialiste du RÀPC, a voulu rencontrer Leonhard Euler pour discuter de sa méthode. Il a ensuite reproduit ce long dialogue dans [8], dialogue dont nous reprenons des passages ci-dessous, en les adaptant quelque peu aux termes du présent article.

JULES — Donc on peut dire que ta méthode, c'est du RÀPC ?

LEONHARD — Si tu le dis. Dans ce cas, les problèmes de type (A), c'est de l'analogie recours et les problèmes de type (B), c'est de l'analogie heuristique.

JULES — C'est ce qui me semble, d'après [2] : pour les problèmes de type (A), on cherche une *bonne* solution, pour les problèmes de type (B), on cherche une solution satisfaisante rapidement (sauf que, pour les problèmes de type (B), comme le note [15], il faudrait tenir compte du temps de remémoration également).

LEONHARD — Tu m'as dit qu'après l'adaptation s'effectue une mémorisation éventuelle du nouveau cas $(\texttt{cible},\texttt{Sol}(\texttt{cible}))$ dans la base de cas. Or, on a toujours $\varepsilon_b > \varepsilon_a$: l'erreur augmente.

JULES — À moins que $a = b$, donc, pour les problèmes de type (A), à moins que les problèmes source et cible soient égaux.

LEONHARD — Oui. Or, pour ces problèmes, on cherche à minimiser l'erreur, autrement dit, plus l'erreur est faible, meilleure est la *qualité* du résultat. Par conséquent, si j'ajoute le nouveau cas à la base, j'aurais tendance à faire baisser la qualité moyenne des cas de la base, non ?

JULES — C'est d'autant plus vrai que, souvent, on considère opportun de mémoriser le nouveau cas s'il est particulièrement éloigné du cas remémoré, donc si ε_b est grand (voir, par exemple, [13]). Donc, paradoxalement, on aura tendance à mémoriser les cas de moins bonne qualité.

LEONHARD — Cela conduit donc à une dégénérescence de la base au cours du temps. Comment régler ce problème ?

JULES — Il y a eu des études sur cela à la fin des années dix (voir notamment [3]). La technique utilisée est relativement simple, comme tu vas le voir. (...)[3]

LEONHARD — Bon, pour en revenir à ma méthode vue comme une technique d'adaptation, l'idée de base était que cette tâche d'adaptation étant complexe on allait la décomposer en n tâches simples. Une tâche simple, étant de confondre la courbe de y avec sa tangente, ce qui est

3. Pour éviter un paradoxe spatio-temporel, ce passage a été censuré.

une approximation correcte entre deux points proches de la courbe.

JULES — Cette idée a été reprise dans le cadre du RÀPC par les gens qui s'intéressent à la reformulation et aux chemins de similarité (voir en particulier [10; 6; 9]). Une reformulation étant la donnée d'une relation entre problèmes et d'une relation correspondante entre solutions...

LEONHARD — Comme dans ma méthode le lien entre dx et dy donné par l'équation différentielle. Mais, dis-moi, le terme reformulation ne prête-t-il pas à confusion ? Il donne à penser que les deux problèmes considérés sont, en quelque sorte, équivalents, dans un certain sens...

JULES — Oui, et ce n'est pas nécessairement le cas. La relation qui permet de passer d'un problème à un autre peut prendre diverses formes. On peut perdre de l'information (généralisation/abstraction), en gagner (spécialisation/raffinement) ou transformer un problème en un autre (« ce problème se ramène au problème suivant... »).

LEONHARD — Il y a un dernier point que je voulais soulever. Tu as parlé précédemment des rapports entre remémoration et adaptation en disant que certains travaux utilisait des connaissances d'adaptation pour la remémoration.

JULES — Oui, c'est notamment le cas des travaux de [14] et les travaux sur la reformulation. Dans le cadre de ta méthode, chercher le cas source qui minimise ε_b pour les problèmes de type (A) et qui minimise le temps d'adaptation (avec la contrainte $\varepsilon_b \leqslant e_b$) pour les problèmes de type (B), c'est entrer dans le cadre de ces travaux. Mais dans ce domaine, c'est facile puisqu'on a des outils pour majorer l'erreur commise par l'adaptation. Cela dit, si on avait utilisé une approche classique pour la remémoration, on aurait eu un résultat assez proche.

LEONHARD — Ça semble vrai dans le cadre des problèmes de type (A) à condition de supposer que l'erreur ε_a de chaque cas source est la même. En effet, si on avait cherché le cas le plus proche au sens de la distance $a,b \mapsto |b-a|$ sur $\mathbb{R}$ (choix qui me semble naturel...), alors, le cas le plus proche au sens de cette distance est aussi celui qui minimise ε_b.

JULES — Sur cet exemple, l'apport de la prise en compte de connaissances d'adaptation consiste à prendre en compte ε_a, c'est-à-dire une partie de la solution du problème source.

LEONHARD — Pour les problèmes de type (B), la prise en compte de connaissances d'adaptation fait que la remémoration ne se contente pas de retourner un cas source mais donne également la valeur de n qui sera utilisée par l'adaptation.

JULES — Oui, c'est le cas aussi pour la remémoration s'appuyant sur les chemins de similarité et la reformulation : la remémoration permet de mettre en évidence un chemin de similarité qui indique comment l'adaptation sera effectuée. C'est aussi le cas pour ta méthode : une fois qu'on a n, on a un chemin de similarité qu'il suffira de « suivre » pour effectuer l'adaptation :

$$a \to a+h \to a+2h \cdots a+(n-1)h \to a+nh = b$$
$$\text{avec } h = \frac{b-a}{n}$$

LEONHARD — Ce qui arrive parfois, pour ces problèmes de type (B), c'est que la remémoration peut échouer.

JULES — Oui, elle échouera si et seulement si l'adaptation est incapable de résoudre correctement le problème cible.

5 Conclusion et perspectives

Ce papier présente la méthode d'Euler pour résoudre numériquement les équations différentielles d'ordre 1 vue comme une application du RÀPC. Le domaine de cette application a l'avantage d'avoir été bien étudié ce qui permet une discussion précise de cette application. Cette discussion permet de voir comment la méthode d'Euler illustre certaines idées liées au RÀPC : la distinction analogie heuristique et analogie recours et la décomposition de l'adaptation en étapes simples. De plus, elle illustre une idée qui, à notre connaissance, n'a pas été étudiée ailleurs : c'est le fait que la mémorisation du nouveau cas a tendance à faire baisser la qualité moyenne des cas de la base. Cela sera d'autant plus vrai qu'on aura tendance à mémoriser de préférence les cas qui sont éloignés de tous les cas de la base, ce qui apparaît souvent comme un principe utilisé pour la mémorisation des cas. Cette constatation n'a été montrée que dans le cadre de cette application. Il serait intéressant de voir si elle reste vraie pour d'autres applications : c'est une première perspective de ce travail. Une autre perspective consisterait à poursuivre ce travail « à l'ordre 2 », c'est-à-dire étudier une méthode de résolution numérique des équations différentielles de la forme $y'' = f(x,y,y')$ sous l'angle du RÀPC. Ce travail-là pourrait alors être reliés aux travaux sur les cas d'adaptation de [4] et aux travaux de [5] et ceux de [12].

Références

[1] R. Bergmann et W. Wilke. Towards a New Formal Model of Transformational Adaptation in Case-Based Reasoning. In H. Prade, éditeur, *Proceedings of the 13th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-98), Brighton, United Kingdom*, pages 53–57, 1998.

[2] D. Coulon, J.-F. Boivieux, L. Bourrelly, L. Bruneau, E. Chouraqui, J.-M. David, C. R. Lu, M. Py, J. Savelli, B. Seroussi et C. Vrain. Le raisonnement par analogie en intelligence artificielle. In B. Bouchon-Meunier, éditeur, *Actes des 3$^{\text{èmes}}$ journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle*, pages 45–88, 1990.

[3] A. de Mil. Tirer partie du *bug* de l'an 2000 pour éviter les *bugs* des années 3000 et 10000. *Revue de la théorie des catastrophes appliquée à l'informatique et ses dérivés*, 1(2):34–105, 2018.

[4] O. Herbeaux. Utilisation de cas d'adaptation en conception. In A. Mille, éditeur, *Actes du V^{ème} séminaire français de raisonnement à partir de cas*, pages 65–70, Lyon, campus de la Doua, avril 1996.

[5] D. B. Leake, A. Kinley et D. Wilson. Learning to Improve Case Adaptation by Introspective Reasoning and CBR. In M. Veloso et A. Aamodt, éditeurs, *Case-Based Reasoning Research and Development – First International Conference, ICCBR'95, Sesimbra, Portugal*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1010, pages 229–240. Springer Verlag, Berlin, 1995.

[6] J. Lieber et A. Napoli. Using Classification in Case-Based Planning. In W. Wahlster, éditeur, *Proceedings of the 12th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'96), Budapest, Hungary*, pages 132–136. John Wiley & Sons, Ltd., 1996.

[7] J. Lieber et A. Napoli. Correct and Complete Retrieval for Case-Based Problem-Solving. In H. Prade, éditeur, *Proceedings of the 13th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-98), Brighton, United Kingdom*, pages 68–72, 1998.

[8] J. Martin. *Du fer à repasser au chronoscaphe : une simple question de dosage de la vapeur*. Édition physique théorique, électroménager et raisonnement à partir de cas, 2053.

[9] E. Melis. A model of analogy-driven proof-plan construction. In *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 182–189, Montréal, 1995.

[10] E. Melis, J. Lieber et A. Napoli. Reformulation in Case-Based Reasoning. In B. Smyth et P. Cunningham, éditeurs, *Fourth European Workshop on Case-Based Reasoning, EWCBR-98*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1488, pages 172–183. Springer, 1998.

[11] A. Mille. Habilitation à diriger les recherches en informatique, 1998.

[12] T. Okada et T. Kawai. Analogical Reasoning in Chemistry. 1. Introduction and General Strategy. *Tetrahedron Computer Methodology*, 2(6):327–336, 1989.

[13] B. Smyth et M. T. Keane. Remembering To Forget. In *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95), Montréal*, volume 1, pages 377–382, august 1995.

[14] B. Smyth et M. T. Keane. Using adaptation knowledge to retrieve and adapt design cases. *Knowledge-Based Systems*, 9(2):127–135, 1996.

[15] M. M. Veloso. *Planning and Learning by Analogical Reasoning*. LNAI 886. Springer Verlag, Berlin, 1994.