Étude de quelques logiques de descriptions floues et de formalismes apparentés

Mathieu D'Aquin, Jean Lieber, Amedeo Napoli

Étude de quelques logiques de descriptions floues et de formalismes apparentés

Study of several fuzzy description logics and related formalisms

M. d'Aquin[1] J. Lieber[1] A. Napoli[1]

[1] LORIA (CNRS, INRIA, Universités de Nancy),

BP 239, 54 506 Vandœuvre-lès-Nancy, {daquin, lieber, napoli}@loria.fr

Résumé :

Les logiques de descriptions sont des formalismes de représentation des connaissances s'appuyant en particulier sur la notion de concept. Un concept est la représentation d'un ensemble. Différents travaux ont traité d'extensions floues de ces formalismes et de formalismes apparentés. Pour chacun d'eux, un concept s'interprète comme un ensemble flou. Cet article présente brièvement les logiques de descriptions classiques, à travers les exemples des formalismes $\mathcal{ALC}$ et $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, puis étudie et compare les travaux qui étendent ces formalismes, en particulier, sous l'angle de l'introduction du flou.

Mots-clés :

logiques de descriptions, représentation des connaissances

Abstract:

The description logics are knowledge representation formalisms based, in particular, on the notion of concept. A concept is the representation of a set. Several studies have treated fuzzy extensions of these formalisms and of related formalisms. For each of them, a concept is interpreted as a fuzzy set. This paper presents briefly the classical description logics, through the formalisms $\mathcal{ALC}$ and $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, and then presents and compares studies extending these formalisms, in particular, under the viewpoint of fuzziness introduction.

Keywords:

description logics, knowledge representation

1 Introduction

Les logiques de descriptions (LD [1, 15]) sont des formalismes de représentation des connaissances classiques et qui sont apparentés, en particulier, aux formalismes de représentation des connaissances par objets. La sémantique d'une telle logique s'exprime grâce à des notions ensemblistes. Il est apparu naturel d'étendre ce type de formalismes en des formalismes dont la sémantique s'exprime grâce à des notions de théorie des sous-ensemble flous. En effet, plusieurs travaux ont traité de telles logiques de descriptions floues. Le but de cet article est d'en présenter un certain nombre et de les comparer. Notons que cette comparaison est centrée sur les formalismes et pas sur les algorithmes réalisant les inférences.

La section 2 présente brièvement les logiques de descriptions classiques. La section 3 présente des logiques de descriptions floues et des formalismes proches.

2 Des logiques de descriptions classiques

Les logiques de descriptions — anciennement appelées logiques terminologiques — sont des formalismes de représentation de connaissances s'appuyant sur les notions de *concepts* (ou *classes*), de *rôles* (ou *propriétés*) et d'*instances* (ou *objets*). Les concepts représentent des ensembles d'instances et les rôles représentent des relations binaires.

Ci-dessous, la logique de descriptions $\mathcal{ALC}$ est présentée brièvement, ainsi qu'une de ses extensions classiques : $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$.

2.1 $\mathcal{ALC}$

Pour fixer les idées, considérons le concept « tarte aux pommes et aux noix dont toutes les pâtes sont feuilletées ou brisées (elle peut ne pas avoir de pâte, en avoir 1, 2, etc.) ». Il peut être

[Ax1] $\mathtt{Tarte} \sqsubseteq \mathtt{PréparationCulinaire}$
[Ax2] $\mathtt{Dessert} \sqsubseteq \mathtt{PréparationCulinaire}$
[Ax3] $\mathtt{ProduitSucré} \sqsubseteq \mathtt{Produit}$
[Ax4] $\mathtt{Fruit} \sqsubseteq \mathtt{ProduitSucré}$
[Ax5] $\mathtt{Pomme} \sqsubseteq \mathtt{Fruit}$
[Ax6] $\mathtt{Noix} \sqsubseteq \mathtt{Fruit}$
[Ax7] $\mathtt{Pomme} \sqcap \mathtt{Noix} \sqsubseteq \bot$
[Ax8] $\mathtt{TarteSucrée} \equiv \mathtt{Tarte} \sqcap \exists \mathtt{ingrédient.ProduitSucré}$
[Ax9] $\mathtt{TarteSalée} \equiv \mathtt{Tarte} \sqcap \neg \mathtt{TarteSucrée}$
[Ax10] $\mathtt{Tarte} \equiv \mathtt{TarteSucrée} \sqcup \mathtt{TarteSalée}$
[Ax11] $\mathtt{TarteSucrée} \sqsubseteq \mathtt{Dessert}$

(a) TBox.

[A1] $\mathtt{tarte1} : \mathtt{Tarte} \sqcap \exists \mathtt{ingrédient.Pomme}$
[A2] $\mathtt{noix1} : \mathtt{Noix}$
[A3] $(\mathtt{tarte1},\mathtt{noix1}) : \mathtt{ingrédient}$

(b) ABox.

Figure 1 – Une base de connaissances décrite en $\mathcal{ALC}$.

représenté sous la forme suivante en $\mathcal{ALC}$:

$$\begin{array}{l}\mathtt{Tarte} \sqcap \exists \mathtt{ingrédient.Pomme} \\ \sqcap \exists \mathtt{ingrédient.Noix} \\ \sqcap \forall \mathtt{pâte.}(\mathtt{Feuilletée} \sqcup \mathtt{Brisée})\end{array}$$

Ce concept s'appuie sur la base de connaissances de la figure 1. À titre d'exemples, l'axiome [Ax1] indique qu'une $\mathtt{Tarte}$ est une $\mathtt{PréparationCulinaire}$, l'axiome [Ax7], que $\mathtt{Pomme}$ et $\mathtt{Noix}$ sont des concepts incompatibles (il n'existe pas d'objet qui soit à la fois une pomme et une noix) et l'axiome [Ax8], qu'une $\mathtt{TarteSucrée}$ est une $\mathtt{Tarte}$ ayant au moins un $\mathtt{ingrédient}$ qui soit un $\mathtt{ProduitSucré}$.

Ci-dessous, la syntaxe, la sémantique et les principales inférences d'$\mathcal{ALC}$ sont présentées.

Syntaxe. Les *rôles* de $\mathcal{ALC}$ sont atomiques : un rôle est représenté simplement par son nom (un identificateur). Les *concepts* sont définis syntaxiquement comme suit. $\top$ et $\bot$ sont deux concepts représentant respectivement le concept le plus général et le concept insatisfiable (qui est aussi le concept le plus spécifique). Un concept atomique $\mathtt{A}$ est un nom de concept. Si $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$ sont deux concepts et $\mathtt{r}$ est un rôle, alors $\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D}$ (conjonction de $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$), $\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D}$ (disjonction), $\neg\mathtt{C}$ (négation), $\exists\mathtt{r.C}$ (quantification existentielle) et $\forall\mathtt{r.C}$ (quantification universelle) sont des concepts.

Une base de connaissances $\mathcal{BC}$ en $\mathcal{ALC}$ est généralement composée de deux parties : une TBox et une ABox. La TBox, ou base terminologique, est un ensemble d'*axiomes terminologiques*, qui peuvent être de la forme $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$ ou de la forme $\mathtt{C} \equiv \mathtt{D}$, $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$ étant deux concepts. La ABox est un ensemble d'*assertions* qui peuvent être de la forme $\mathtt{a} : \mathtt{C}$ ou $(\mathtt{a}, \mathtt{b}) : \mathtt{r}$ où $\mathtt{a}$ et $\mathtt{b}$ sont deux instances, $\mathtt{C}$ est un concept et $\mathtt{r}$ est un rôle. Le premier type d'assertion correspond à une instanciation de concept, le second, à une instanciation de rôle.

Sémantique. Une interprétation est un couple $\mathcal{I} = (\Delta_\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I})$ où $\Delta_\mathcal{I}$ est un ensemble appelé le domaine d'interprétation et où $\cdot^\mathcal{I}$ est appelé la fonction d'interprétation. Cette fonction associe à un concept $\mathtt{C}$, un sous-ensemble $\mathtt{C}^\mathcal{I}$ de $\Delta_\mathcal{I}$, à un rôle $\mathtt{r}$, un sous-ensemble $\mathtt{r}^\mathcal{I}$ de $\Delta_\mathcal{I} \times \Delta_\mathcal{I}$ et à une instance $\mathtt{a}$, un élément $\mathtt{a}^\mathcal{I}$ de $\Delta_\mathcal{I}$. Deux instances différentes (i.e., de noms différents) s'interprètent en éléments de $\Delta_\mathcal{I}$ distincts : si $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$ alors $\mathtt{a}^\mathcal{I} \neq \mathtt{b}^\mathcal{I}$. De plus, $\cdot^\mathcal{I}$ doit vérifier : $\top^\mathcal{I} = \Delta_\mathcal{I}$, $\bot^\mathcal{I} = \emptyset$, $(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D})^\mathcal{I} = \mathtt{C}^\mathcal{I} \cap \mathtt{D}^\mathcal{I}$, $(\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D})^\mathcal{I} = \mathtt{C}^\mathcal{I} \cup \mathtt{D}^\mathcal{I}$, $(\neg\mathtt{C})^\mathcal{I} = \Delta_\mathcal{I} \backslash \mathtt{C}^\mathcal{I}$, $(\exists\mathtt{r.C})^\mathcal{I} = \{x \in \Delta_\mathcal{I} \mid \exists y \in \mathtt{C}^\mathcal{I}, (x,y) \in \mathtt{r}^\mathcal{I}\}$ et $(\forall\mathtt{r.C})^\mathcal{I} = \{x \in \Delta_\mathcal{I} \mid \forall y \in \Delta_\mathcal{I}, (x,y) \in \mathtt{r}^\mathcal{I} \Rightarrow y \in \mathtt{C}^\mathcal{I}\}$.

Soit $\mathcal{I}$, une interprétation. $\mathcal{I}$ satisfait un axiome $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$ (resp., $\mathtt{C} \equiv \mathtt{D}$) si $\mathtt{C}^\mathcal{I} \subseteq \mathtt{D}^\mathcal{I}$ (resp., si $\mathtt{C}^\mathcal{I} = \mathtt{D}^\mathcal{I}$). $\mathcal{I}$ satisfait une assertion $\mathtt{a} : \mathtt{C}$ (resp.,

$(\mathtt{a}, \mathtt{b}) : \mathtt{r})$ si $\mathtt{a}^{\mathcal{I}} \in \mathtt{C}^{\mathcal{I}}$ (resp., $(\mathtt{a}^{\mathcal{I}}, \mathtt{b}^{\mathcal{I}}) \in \mathtt{r}^{\mathcal{I}}$). $\mathcal{I}$ est un *modèle* d'une base de connaissances si elle satisfait tous les axiomes de la TBox et toutes les assertions de la ABox.

Inférences dans $\mathcal{ALC}$. Étant donné une base de connaissances $\mathcal{BC}$, plusieurs inférences sont possibles. Le *test de subsomption* consiste, étant donné deux concepts $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$, à tester si le premier est *subsumé* par le second — ce qu'on note $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$ — c'est-à-dire si pour tout modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{BC}$, $\mathtt{C}^{\mathcal{I}} \subseteq \mathtt{D}^{\mathcal{I}}$. La *classification de concept* consiste, étant donné un concept, à donner l'ensemble des concepts nommés dans $\mathcal{BC}$ qui le subsument et ceux qu'il subsume. La *classification d'instance* consiste, étant donné une instance $\mathtt{a}$, à donner l'ensemble des concepts $\mathtt{C}$ nommés dans $\mathcal{BC}$, tels que $\mathtt{a}$ est une instance de $\mathtt{C}$, i.e., $\mathtt{a}^{\mathcal{I}} \in \mathtt{C}^{\mathcal{I}}$ pour tout modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{BC}$. Enfin, le *test de satisfiabilité* d'une base de connaissances consiste, pour une base $\mathcal{BC}$ à savoir s'il existe un modèle de $\mathcal{BC}$. Ces inférences sont généralement implantées grâce à la méthode des tableaux sémantiques.

Étant donné la base de connaissances de la figure 1, on peut inférer que $\mathtt{Pomme} \sqsubseteq \mathtt{ProduitSucré}$, que $\mathtt{tarte1}$ est une instance de $\mathtt{Dessert}$, que $\mathtt{Tarte} \not\sqsubseteq \mathtt{Dessert}$, etc.

2.2 $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$

Les logiques de descriptions $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est un *domaine concret*, sont décrites en détail dans [12]. Nous nous contenterons ici d'une vision intuitive et simplificatrice, à travers l'exemple du domaine concret $\mathsf{R} = (\Delta_{\mathsf{R}}, \Phi_{\mathsf{R}})$ où $\Delta_{\mathsf{R}} = \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et Φ_{R} est l'ensemble des noms de prédicats unaires P_x où $P \in \{<, \leqslant, \geqslant, >\}$ et $x \in \mathbb{R}$, tels que, pour $y \in \mathbb{R}$, $P_x(y)$ s'interprète comme vrai ssi $y \; P \; x$. Par exemple, $<_x (y)$ ssi $y < x$.

$\mathcal{ALC}(\mathsf{R})$ est obtenue en ajoutant à $\mathcal{ALC}$ les constructeurs $\exists g.\varphi$, où $\varphi \in \Phi_{\mathsf{R}}$ et g est un identificateur appelé *attribut concret*. Pour une interprétation $\mathcal{I}$, $g^{\mathcal{I}}$ est interprété comme une fonction partielle de $\Delta_{\mathcal{I}}$ dans Δ_{R} et $(\exists g.\varphi)^{\mathcal{I}}$ comme l'ensemble des $x \in \Delta_{\mathcal{I}}$ tels que $g^{\mathcal{I}}(x)$ est défini et $\varphi(g^{\mathcal{I}}(x))$ est vrai.

On peut ainsi introduire le concept de tartelette par l'axiome :

$$\mathtt{Tartelette} \equiv \mathtt{Tarte} \sqcap \exists \mathtt{diamètre}. \leqslant_{10}$$

(une tartelette est une tarte dont le diamètre est inférieur ou égal à $10\,\mathrm{cm}$).

Plus généralement, un domaine concret $\mathcal{D}$ est donné par un ensemble $\Delta_{\mathcal{D}}$ fixé (p. ex., l'ensemble des entiers relatifs, des réels, etc.) et par un ensemble $\Phi_{\mathcal{D}}$ de noms de prédicats (d'arités quelconques) sur $\Delta_{\mathcal{D}}$.

3 Des logiques de descriptions floues et des formalismes apparentés

3.1 Principes généraux des LD floues

Les LD classiques sont interprétées grâce à des concepts ensemblistes classiques : ensemble, relation binaire, appartenance, etc. Les extensions floues des LD ont une sémantique exprimée grâce à la théorie des sous-ensembles flous : pour une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta_{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, un concept $\mathtt{C}$ s'interprète comme un sous-ensemble flou $\mathtt{C}^{\mathcal{I}}$ de $\Delta_{\mathcal{I}}$, un rôle $\mathtt{r}$ comme une relation binaire floue $\mathtt{r}^{\mathcal{I}}$ de $\Delta_{\mathcal{I}}$, l'appartenance d'une instance $\mathtt{a}$ à un concept $\mathtt{C}$ — qui est $\mathtt{a}^{\mathcal{I}} \in \mathtt{C}^{\mathcal{I}}$ dans le cas classique — devient le degré d'appartenance de $\mathtt{a}^{\mathcal{I}}$ à $\mathtt{C}^{\mathcal{I}}$: $\mu_{\mathtt{C}^{\mathcal{I}}}(\mathtt{a}^{\mathcal{I}})$.

Les LD floues que nous allons étudier partagent entre elles l'essentiel de ce qui concerne l'interprétation des constructeurs classiques. Par exemple, si $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$ sont deux concepts d'une telle logique, on aura $(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D})^{\mathcal{I}} = \mathtt{C}^{\mathcal{I}} \cap \mathtt{D}^{\mathcal{I}}$ où $\cap$ est l'intersection entre sous-ensembles flous de $\Delta_{\mathcal{I}}$ pour la t-norme de Zadeh :

$$\mu_{(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D})^{\mathcal{I}}}(x) = \mu_{\mathtt{C}^{\mathcal{I}} \cap \mathtt{D}^{\mathcal{I}}}(x) = \min\{\mu_{\mathtt{C}^{\mathcal{I}}}(x), \mu_{\mathtt{D}^{\mathcal{I}}}(x)\} \quad \text{pour } x \in \Delta_{\mathcal{I}}$$

De façon similaire (voir par exemple [17]) :

$$
\begin{aligned}
\mu_{\top^\mathcal{I}}(x) &= 1\\
\mu_{\bot^\mathcal{I}}(x) &= 0\\
\mu_{(\mathtt{C}\sqcup\mathtt{D})^\mathcal{I}}(x) &= \max\{\mu_{\mathtt{C}^\mathcal{I}}(x), \mu_{\mathtt{D}^\mathcal{I}}(x)\}\\
\mu_{(\neg\mathtt{C})^\mathcal{I}}(x) &= 1 - \mu_{\mathtt{C}^\mathcal{I}}(x)\\
\mu_{(\exists\mathtt{r}.\mathtt{C})^\mathcal{I}}(x) &= \sup_{y\in\Delta_\mathcal{I}} \min\{\mu_{\mathtt{r}^\mathcal{I}}(x,y), \mu_{\mathtt{C}^\mathcal{I}}(y)\}\\
\mu_{(\forall\mathtt{r}.\mathtt{C})^\mathcal{I}}(x) &= \inf_{y\in\Delta_\mathcal{I}} \max\{1-\mu_{\mathtt{r}^\mathcal{I}}(x,y), \mu_{\mathtt{C}^\mathcal{I}}(y)\}
\end{aligned}
$$

La sémantique des axiomes et assertions classiques ($\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$, $\mathtt{C} \equiv \mathtt{D}$, $\mathtt{a} : \mathtt{C}$ et $(\mathtt{a},\mathtt{b}) : \mathtt{r}$) est inchangée, sauf que, désormais, l'inclusion et l'égalité sont les opérations entre ensembles flous et que l'appartenance devient un degré d'appartenance.

Concernant les inférences des LD floues, nous nous sommes concentrés sur la « subsomption floue ». Ce terme, un peu trompeur, désigne le fait, étant donnés deux concepts flous $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$ de tester si (oui ou non) $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$. On aura $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$ si, pour tout modèle $\mathcal{I}$ de la base de connaissances, $\mathtt{C}^\mathcal{I} \subseteq \mathtt{D}^\mathcal{I}$, au sens de l'inclusion entre ensembles flous, i.e. $\mu_{\mathtt{C}^\mathcal{I}}(x) \leqslant \mu_{\mathtt{D}^\mathcal{I}}(x)$, pour tout $x \in \Delta_\mathcal{I}$. Certains travaux considèrent un « degré de subsomption » entre deux concepts. Étant donné deux concepts $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$, le degré de subsomption de $\mathtt{C}$ dans $\mathtt{D}$ est la valeur $F_\sqsubseteq(\mathtt{C},\mathtt{D}) \in [0;1]$ définie par

$$F_\sqsubseteq(\mathtt{C},\mathtt{D}) = \inf\{F_\subseteq(\mathtt{C}^\mathcal{I},\mathtt{D}^\mathcal{I}) \,|\, \mathcal{I} : \text{modèle de } \mathcal{BC}\}$$

où $F_\subseteq$ est une mesure du degré d'inclusion entre ensembles flous. Par exemple, $F_\subseteq(A,B) = \inf\limits_x F_\Rightarrow(\mu_A(x),\mu_B(x))$, où $F_\Rightarrow$ est une implication floue (si on choisit l'implication de Gödel ou celle de Łukasiewicz, alors $F_\sqsubseteq(\mathtt{C},\mathtt{D}) = 1$ ssi $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$). La majorité des algorithmes réalisant ces inférences pour les LD floues étudiées utilisent — comme dans le cas classique — la méthode des tableaux sémantiques.

3.2 Des logiques de descriptions floues

Les LD floues que nous allons étudier diffèrent entre elles principalement par le moyen par lequel elles « introduisent le flou », c'est-à-dire par les éléments syntaxiques (constructeurs, axiomes, assertions) pour lesquels l'interprétation classique s'avère insuffisante. Nous avons distingué trois de ces moyens :

(a) Utilisation de prédicats flous dans les domaines concrets ;

(b) Utilisation de modificateurs[1] sur les concepts ;

(c) Association aux axiomes ou aux assertions de la base de connaissances d'informations concernant leurs degrés de vérité.

[20] relève de **(a)**. Ce travail, un des premiers sur les LD floues (le premier ?), décrit en détail l'extension en LD floue que nous avons brièvement décrite dans 3.1. Il présente également un algorithme pour le test de subsomption floue. La seule façon d'introduire du flou dans ce formalisme passe par la définition explicite d'une fonction d'appartenance : elle repose donc sur des domaines concrets. Le test de subsomption s'appuie sur un raisonneur externe, supposé pouvoir tester l'inclusion de deux sous-ensembles flous d'un même domaine concret. Si on reprend l'exemple des tartelettes de la section 2.2 et qu'on estime que le seuil de 10 centimètres doit être graduel, on peut redéfinir les tartelettes par exemple, par[2] :

$$\mathtt{Tartelette} \equiv \mathtt{Tarte} \sqcap \exists\mathtt{diamètre}.\varphi$$

$$\text{où, pour } x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 8 \\ \frac{12-x}{4} & \text{si } x \in [8;12] \\ 0 & \text{si } x \geqslant 12 \end{cases}$$

Les modificateurs sont utilisées sur les fonctions d'appartenance φ (mais pas sur les concepts). Par exemple, si le modificateur *très*

[1] Nous utilisons ce terme comme traduction de *(linguistic) modifier*, de *(membership) manipulator* et de *hedge*. Nous définissons un modificateur comme étant une fonction $m : [0;1] \to [0;1]$. Étant donné un sous-ensemble flou A de X, mA est le sous-ensemble flou de X défini par $\mu_{mA} = m \circ \mu_A$.

[2] La syntaxe de LD utilisée dans cet article est différente, mais nous avons préféré homogénéiser la syntaxe du présent article.

est défini par *très*$(x) = x^2$, on peut faire inférer que :

$$\texttt{Tarte} \sqcap \exists \texttt{diamètre}.\textit{très}\varphi \sqsubseteq \texttt{Tartelette}$$

le prédicat flou φ peut être substitué par le prédicat flou *très*φ mais ne peut être appliqué sur les concepts directement.

[19] relève de **(b)**. La LD floue décrite dans cette étude est une extension d'$\mathcal{ALC}$ baptisée $\mathcal{ALC}_{F_M}$ et s'appuyant sur le constructeur mC, où m est un modificateur et C, un concept. La sémantique de mC, pour une interprétation $\mathcal{I}$, est simplement $(m\texttt{C})^{\mathcal{I}} = m(\texttt{C}^{\mathcal{I}})$. Les modificateurs m utilisés dans [19] sont des applications continues et surjectives pour lesquelles il existe $x_1 \in [0;1]$ tel que la restriction de m à $[0;x_1]$ (resp., à $[x_1;1]$) est affine croissante (resp., décroissante). L'exemple du modificateur *plus_ou_moins* correspond à $x_1 = 0,8$, *plus_ou_moins*$(0) = 0$ et *plus_ou_moins*$(1) = 0,8$. Par exemple, on peut définir le concept ProduitPlusOuMoinsSucré par l'axiome

$$\begin{aligned}&\texttt{ProduitPlusOuMoinsSucré}\\ &\equiv \textit{plus\_ou\_moins}\texttt{ProduitSucré}\end{aligned}$$

Dans cette étude, le degré de subsomption est défini et son calcul — s'appuyant sur la méthode des tableaux sémantiques — est décrit. Par exemple, si m est un modificateur défini par $x_1 = 0,7, m(0) = 0$ et *plus_ou_moins*$(1) = 0,7$ on peut calculer que

$$\begin{aligned}&F_{\sqsubseteq}(\texttt{ProduitPlusOuMoinsSucré}, m\texttt{ProduitSucré})\\ &= \inf_{t\in[0;1]} F_{\Rightarrow}(m(t), \textit{plus\_ou\_moins}(t))\\ &= 0,7 \text{ si } F_{\Rightarrow} \text{ est l'implication de Gödel}\end{aligned}$$

Ce travail a été étendu dans [14] grâce à des prédicats flous sur des domaines concrets. Le formalisme décrit dans cette extension est appelé $\mathcal{ALC}_{F_M}(\mathcal{D})$ et relève à la fois de **(a)** et de **(b)**. De plus, [14] décrit une application de ce travail théorique dans le domaine médical.

[17] relève de **(c)**. Il étend $\mathcal{ALC}$ grâce à des *assertions floues* de la forme $\langle \texttt{a} : \texttt{C} \geqslant n\rangle$ qui se lit « a est une instance du concept C avec un degré de vérité supérieur ou égal à n. » Une interprétation $\mathcal{I}$ satisfait cette assertion si $\mu_{\texttt{C}^{\mathcal{I}}}(\texttt{a}) \geqslant n$. De façon similaire, les assertions floues $\langle \texttt{a} : \texttt{C} \leqslant n\rangle$, $\langle (\texttt{a}, \texttt{b}) : \texttt{r} \geqslant n\rangle$ et $\langle (\texttt{a}, \texttt{b}) : \texttt{r} \leqslant n\rangle$ sont définies. À titre d'exemple, supposons qu'à la ABox de la figure 1, on ajoute les assertions suivantes :

[A4] $\langle \texttt{carotte1} : \texttt{ProduitSucré} \leqslant 0,6\rangle$

[A5] $\langle \texttt{carotte1} : \texttt{ProduitSucré} \geqslant 0,4\rangle$ (carotte1 est un produit qu'on estime moyennement sucré.)

[A6] tarte2 : Tarte

[A7] $(\texttt{tarte2}, \texttt{carotte1})$: ingrédient

Une inférence essentielle décrite dans ce travail a pour objectif, étant donné une instance a et un concept C, de caractériser $\mu_{\texttt{C}^{\mathcal{I}}}(\texttt{a}^{\mathcal{I}})$, pour les modèles $\mathcal{I}$ de $\mathcal{BC}$. Plus précisément, cette inférence consiste à calculer *glb* (*the greatest lower bound*) et *lub* (*the lowest upper bound*) définis par

$$\textit{glb} = \sup\left\{ n \in [0;1] \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{pour tout modèle } \mathcal{I}\\ \text{de } \mathcal{BC}, \mu_{\texttt{C}^{\mathcal{I}}}(\texttt{a}^{\mathcal{I}}) \geqslant n\end{array}\right\}$$
$$\textit{lub} = \inf\left\{ n \in [0;1] \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{pour tout modèle } \mathcal{I}\\ \text{de } \mathcal{BC}, \mu_{\texttt{C}^{\mathcal{I}}}(\texttt{a}^{\mathcal{I}}) \leqslant n\end{array}\right\}$$

ce qui donne l'encadrement $\textit{glb} \leqslant \mu_{\texttt{C}^{\mathcal{I}}}(\texttt{a}^{\mathcal{I}}) \leqslant \textit{lub}$. Cette inférence s'applique également aux assertions portant sur des rôles.

Avec la base de connaissances obtenue en ajoutant à celle de la figure 1 les assertions [A4] à [A7] ci-dessus, on peut inférer que

$$\textit{glb} = 0,4 \leqslant \mu_{\texttt{Dessert}^{\mathcal{I}}}(\texttt{tarte2}^{\mathcal{I}}) \leqslant \textit{lub} = 1$$

Notons que le fait qu'il n'y ait pas de meilleur majorant que 1 s'explique par l'existence de modèles de $\mathcal{BC}$ pour lesquels tarte2 a d'autres ingrédients qui peuvent être pleinement sucrés (par exemple, des pommes).

Cette LD floue n'ajoute rien à la description des concepts, en revanche, un travail antérieur du même auteur, [16], introduit des *axiomes terminologiques flous* dénotés par $\langle \mathtt{C} \Rightarrow \mathtt{D}\ n \rangle$ avec la sémantique $F_{\subseteq}(\mathtt{C}^{\mathcal{I}}, \mathtt{D}^{\mathcal{I}}) \geqslant n$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$ satisfaisant cet axiome. Ces axiomes ont été abandonnés dans [17] car, d'après l'auteur, « L'origine du n — qui le définit et comment il est déterminé — n'est pas claire » (*"it is not clear where the* n *[...] comes from, i.e. who defines the value* n *and how it is determined."*). Notons que dans [17], le terme d'axiome terminologique flou est utilisé pour les axiomes classiques $\mathtt{C} \sqsubseteq \mathtt{D}$ et $\mathtt{C} \equiv \mathtt{D}$ (même si une nouvelle notation est utilisée).

[18] présente une variante, appelée $\mu\mathcal{ALC}$, de la LD floue de [17] et qui s'appuie également sur des assertions floues. Il est expliqué comment une base de connaissances en $\mu\mathcal{ALC}$ peut être réduit en une base de connaissances en $\mathcal{ALC}$ (l'idée semble être de considérer tous les n intervenant dans les assertions floues et de considérer les α-coupes pour ces n).

Le travail de [6] étend celui de [17] en un formalisme baptisé $\mathcal{ALC}_{FH}$ grâce aux modificateurs de concepts, comme dans le travail de [19]. Une différence entre [6] et [19] tient aux modificateurs utilisés : dans [6] ils sont de la forme $m : x \mapsto x^{\beta}$ (β : constante réelle strictement positive). Ces modificateurs laissent invariant les ensembles classiques (si $\mu_A(x) \in \{0;1\}$ alors $\mu_{mA}(x) = \mu_A(x)$). La conséquence de cela est que ces modificateurs à eux seuls n'introduisent pas du flou au sens où, si une base de connaissance de $\mathcal{ALC}_{FH}$ ne contient pas d'assertions floues, les inférences en logique classique sont suffisantes.

Enfin, [13] étudie les LD floues en s'appuyant essentiellement sur le travail de [17] pour lequel il propose des extensions.

3.3 Des formalismes apparentés aux LD floues

Des formalismes proches des LD floues sont décrites brièvement ci-dessous.

[8] et [7] présentent une extension de la LD $\mathcal{ALCN}$[3] à la logique possibiliste. Les nouveaux axiomes et les nouvelles assertions sont donnés par les axiomes et assertions classiques et par des valeurs $\Pi\alpha$ ou $\mathrm{N}\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, indiquant respectivement un degré de possibilité ou de nécessité (ces travaux relèvent donc de **(c)**). Cette étude décrit en particulier une méthode de preuve adaptée à ce formalisme. À titre d'exemple, considérons l'axiome suivant :

$$\begin{aligned}
&(\mathtt{PréparationCulinaire}\\
&\ \sqcap \exists \mathtt{ingrédient}.\mathtt{ProduitSucré}\\
&\ \sqcap \exists \mathtt{ingrédient}.\mathtt{ProduitSalé}\\
&\ \sqsubseteq \mathtt{PlatDeLaNouvelleCuisine},\\
&\Pi 0,8)
\end{aligned}$$

Cet axiome exprime qu'il est fortement possible, pour une préparation culinaire à la fois sucrée et salée, de relever de la nouvelle cuisine.

[4] décrit un formalisme de représentation des connaissances par objets proche d'une LD floue. Dans ce formalisme, les co-domaines *permis* ou *typiques* associés à un attribut d'une classe sont des représentations d'ensembles flous. L'inclusion entre classes (similaire au degré de subsomption entre concepts) est discutée en détails. Plusieurs mécanismes sont présentés, tels que la classification et l'héritage. À titre d'exemple, on peut définir la classe `Tarte` avec plusieurs attributs, dont l'attribut `pâte` ayant le co-domaine permis $\{1/\mathtt{Brisée}; 1/\mathtt{Sablée}; 0,8/\mathtt{Feuilletée}; 0,5/\mathtt{PâteÀPain}\}$ et le co-domaine typique $\{1/\mathtt{Brisée}; 1/\mathtt{Sablée}\}$. On peut définir la sous-classe `Pizza` de `Tarte` en précisant certains attributs ; pour pâte, on pourra avoir les co-domaines permis et typique tous deux égaux à $\{1/\mathtt{PâteÀPain}\}$ (on notera, qu'à la différence de la subsomption dans les LD, le masquage est possible dans la spécialisation des classes). Pour reprendre la terminologie des LD, on peut

[3] $\mathcal{ALCN}$ est une extension d'$\mathcal{ALC}$ permettant de restreindre le nombre d'instances reliées à une instance par un rôle. Par exemple, le concept $\mathtt{Tarte} \sqcap \exists_{\geqslant 2}\mathtt{ingrédient} \sqcap \exists_{\leqslant 2}\mathtt{ingrédient}$ représente le concept des « tartes ayant exactement deux `ingrédients` ».

considérer que, dans ce travail, le flou est introduit au niveau des domaines concrets et qu'il relève donc de **(a)**.

[10] décrit une autre extension de $\mathcal{ALC}$ qui gère l'incertitude grâce à des probabilités. En particulier, une instance a de cette LD probabiliste est interprétée par une probabilité exprimant l'incertitude au sujet de a. $\mathcal{ALC}$ est étendu grâce à des axiomes et des assertions probabilistes (ce formalisme relève donc de **(c)**, sauf que ce sont des probabilités qui sont introduites). À titre d'exemple, considérons l'axiome suivant :

$$\begin{aligned}(&\mathtt{Dessert} \sqcap \exists \mathtt{ingrédient.Pomme}\\ &\sqcap \exists \mathtt{pâte.Brisée}\\ &\sqsubseteq \mathtt{Tarte},\\ &0,8)\end{aligned}$$

Il signifie qu'un dessert aux pommes ayant une pâte brisée est probablement une tarte.

[3] décrit un formalisme et un système de représentation des connaissances par objets proche d'une LD simple avec des domaines concrets (entiers et réels, ce formalisme relève donc de **(a)**) et appliqué à la représentation de protocoles médicaux. Les prédicats φ sont des intervalles classiques ou flous. Les inférences principales sont le calcul de $F_{\sqsubseteq}$ et la classification hiérarchique floue (pour cette dernière, voir [11]).

4 Conclusion

Les LD floues sont des formalismes de représentation des connaissances encore assez peu étudiés mais qui, du moins nous l'espérons, sont amenés à se développer. L'étude de cet article les envisage essentiellement sous l'angle de la façon dont elles étendent les LD classiques par introduction du flou : cela peut être grâce aux prédicats flous dans des domaines concrets, grâce à des modificateurs de concepts ou grâce à des informations sur le degré de vérité des axiomes et assertions des bases de connaissances. Les formalismes apparentés à ces LD floues qui ont été présentés brièvement s'appuient sur des principes analogues.

Un des atouts qui a facilité l'essor des LD classiques réside dans le fait qu'il existe des systèmes performants et largement utilisés (et gratuits) qui les implantent, en particulier FaCT [9] et RACER [5]. Nous exprimons le souhait, en tant qu'utilisateurs de tels systèmes désireux de représenter des connaissances graduelles, que des implantations de LD floues avec les mêmes qualités émergent. Dans le même ordre d'idées, le langage OWL DL, logique de descriptions standard pour le Web sémantique [2], dont l'utilisation se développe, pourrait bénéficier d'une extension floue.

Remerciements :

Les auteurs remercient les rapporteurs et leur prie de les excuser de ne pas avoir pu tenir compte de toutes leurs remarques, notamment pour une question de place.

Références

[1] Baader (F.), Calvanese (D.), McGuinness (D.), Nardi (D.) et Patel-Schneider (P.) (édité par). – *The Description Logic Handbook*. – cambridge, UK, Cambridge University Press, 2003.

[2] Bechhofer (S.), van Harmelen (F.), Hendler (J.), Horrocks (I.), McGuinness (D. L.), Patel-Schneider (P. F.) et Stein (L. A.). – OWL Web Ontology Language Reference, www.w3.org/TR/owl-ref. – dernière consultation : juin, 2004.

[3] d'Aquin (M.), Brachais (S.), Lieber (J.) et Napoli (A.). – Decision Support and Knowledge Management in Oncology using Hierarchical Classification. *In : Proceedings of the Symposium on Computerized Guidelines and Protocols (CGP-2004)*, éd. par Kaiser (Katherina), Miksch (Silvia) et Tu (Samson W.). pp. 16–30. – IOS Press, 2004.

[4] Dubois (D.), Prade (H.) et Rossazza (J.-P.). – Vagueness, Typicality and Uncertainty in Class Hierarchies. *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 6, 1991, pp. 167–183.

[5] Haarslev (V.) et Möller (R.). – RACER system description, www.cs.concordia.ca/~haarslev/racer/. – dernière consultation : septembre, 2004.

[6] Hölldobler (S.), Khang (T. D.) et Störr (H.-P.). – A Fuzzy Description Logic with Hedges as Concept Modifiers. *In : Proceedings of the Joint Third International Conference on Intelligent Technologies and Third Vietnam-Japan Symposium on Fuzzy Systems and Applications (InTech/VJFuzzy'2002), Hanoi, Vietnam*, éd. par Phuong (Nguyen Hoang), Nguyen (Hung T.), Ho (Nguyen Cat) et Santiprabhob (Pratit), pp. 25–34. – 2002.

[7] Hollunder (B.). – *An Alternative Proof Method for Possibilistic Logic and its Application to Terminological Logics*. – Research report n° RR-93-01, DFKI, 1993.

[8] Hollunder (B.). – An Alternative Proof Method for Possibilistic Logic and its Application to Terminological Logics. *In : Proceedings of the 10th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, éd. par de Mantaras (Ramon Lopez) et Poole (David). pp. 327–335. – San Francisco, CA, USA, 1994.

[9] Horrocks (I.). – The FaCT System, www.cs.man.ac.uk/~horrocks/FaCT/. – dernière consultation : septembre, 2004.

[10] Jaeger (M.). – Probabilistic Reasoning in Terminological Logics. *In : KR'94 : Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, éd. par Doyle (Jon), Sandewall (Erik) et Torasso (Pietro). pp. 305–316. – Morgan Kaufmann, 1994.

[11] Lieber (J.). – Raisonnement à partir de cas s'appuyant sur les classifications dure, floue et élastique dans une hiérarchie de problèmes. *In : Actes des rencontres francophones sur la logique floue et ses applications (LFA-03)*, éd. par Frélicot (Carl). pp. 99–106. – CEPADUES, 2003.

[12] Lutz (C.). – Description Logics with Concrete Domains – A Survey. *In : Advances in Modal Logics Volume 4*. – King's College Publications, 2003.

[13] Marchitan (A.). – *Logiques descriptives floues pour la construction d'ontologies*. – Mémoire de DEA en informatique, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 2004.

[14] Molitor (R.) et Tresp (C.B.). – Extending Description Logics to Vague Knowledge in Medicine. *In : Fuzzy Systems in Medicine*, éd. par Szczepaniak (P.), Lisboa (P.J.G.) et Tsumoto (S.), pp. 617–635. – Springer Verlag, 2000.

[15] Napoli (A.). – *Une introduction aux logiques de descriptions*. – Rapport de Recherche n° RR 3314, INRIA, 1997.

[16] Straccia (U.). – A Fuzzy Description Logic. *In : Proceedings of the 15th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-98) and of the 10th Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence (IAAI-98)*. pp. 594–599. – AAAI Press, 1998.

[17] Straccia (U.). – Reasoning within Fuzzy Description Logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 14, 2001, pp. 137–166.

[18] Straccia (U.). – *Reducing Fuzzy Description Logics into Classical Description Logics*. – Rapport technique, 2004. disponible sur dienst.isti.cnr.it, dernière consultation : juin 2004.

[19] Tresp (C.B.) et Molitor (R.). – A Description Logic for Vague Knowledge. *In : Proceedings of the 13th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'98)*. pp. 361–365. – J. Wiley and Sons, 1998.

[20] Yen (J.). – Generalizing Term Subsumption Languages to Fuzzy Logic. *In : Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'91), Sidney*, pp. 472–477. – august 1991.