# Approche intrinsèque des fluctuations quantiques en mécanique stochastique (An intrinsic approach to the quantum fluctuations in stochastic mechanics)

Michel Fliess

# Approche intrinsèque des fluctuations quantiques en mécanique stochastique

## *An intrinsic approach to the quantum fluctuations in stochastic mechanics*

Michel FLIESS

Projet ALIEN, INRIA Futurs
& Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161)
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
E-mail : Michel.Fliess@polytechnique.edu

**Abstract**. This note is answering an old questioning about the Fényes-Nelson stochastic mechanics. The Brownian nature of the quantum fluctuations, which are associated to this mechanics, is deduced from Feynman's interpretation of the Heisenberg uncertainty principle via infinitesimal random walks stemming from nonstandard analysis. It is therefore no more necessary to combine those fluctuations with a background field, which has never been well understood.

**Key words**. Stochastic mechanics, quantum fluctuations, nonstandard analysis, random walks, fractal curves, stochastic differential equations.

## Abridged English version

**Introduction.** The background field of quantum fluctuations in the Fényes-Nelson *stochastic mechanics* [6, 19, 20, 22] (see also [5, 11, 12, 17, 18, 27, 28, 29, 32, 33]) has never received a clear-cut and well accepted justification. The aim of this note is to provide a new intrinsic construction of those fluctuations, which are of Brownian nature. Its main mathematical tool is Robinson's nonstandard analysis [30] and, more precisely, the nonstandard presentation of stochastic differential equations (see, e.g., [1, 4]).

### Nontechnical presentation of the main ideas

This summary is intended for readers who are not familiar with nonstandard analysis. It shows that the Brownian fluctuations are direct consequences of an infinitesimal time discretisation combined with the Heisenberg uncertainty principle. As often in nonstandard analysis (see, e.g., [1, 23]), we replace a continuous time interval by an infinite "discrete" set of infinitely closed time instants. Substituting $m\frac{\Delta x}{\Delta t}$ to $\Delta p$ in the well known expression of the uncertainty principle, where $x$ is the position, $m$ the mass, $p$ the momentum, $h = 2\pi\hbar$ the Planck constant, yields equation (1). We rewrite it by postulating that the quantity (2), where $\delta t > 0$ is a given infinitesimal, is limited and appreciable, i.e., it is neither infinitely large nor infinitely small. Those computations are stemming from Feynman's interpretation [7, 8] of the uncertainty principle (see, also, [16, 24]) : The "quantum trajectories" are fractal curves, of Hausdorff dimension 2. "Weak" mathematical assumptions permit to derive the infinitesimal difference equation (3). The lack of any further physical assumption yields the equiprobability of $+1$ and $-1$. If $x$ is *Markov*, i.e., if $b$ and $\sigma$ are are functions of $t$ and $x(t)$, and not of $\{x(\tau)|0 \leq \tau < t\}$, the corresponding infinitesimal random walk is « equivalent » to a stochastic differential equation in the usual sense (see, e.g., [1, 4]).

*Remark 1 More or less analogous random walks have already been introduced in the literature (see, e.g., [2, 13, 15, 25, 26]), but in another context.*

### Nonstandard analysis

Replace the interval $[0, 1]$ by the set $\mathfrak{Q} = \{k\delta t \mid 0 \leq k \leq N_q\}$, $\delta t = \frac{1}{N_q}$, where $N_q$ is an unlimited integer. A function $x : \mathfrak{Q} \to \mathbb{R}$ is said to verify the *Heisenberg condition* if, and only if, for any $t \in \mathfrak{Q} \setminus \{1\}$, equation (4) is satisfied, where $\sigma_t^\star \in \mathbb{R}$, $\sigma_t^\star > 0$, is limited and appreciable. The lack of any further physical assumption leads us to postulate the following properties for $\varepsilon(t)$ in equation (5) : the random variables $\varepsilon(t)$, $t \in \mathfrak{Q} \setminus \{1\}$, are independent ; $\Pr(\varepsilon(t) = +1) = \Pr(\varepsilon(t) = -1) = \frac{1}{2}$. The next properties are "natural" for the stochastic processes $\varepsilon$ and $x$ (see [23] and [3, 4]) : the random variables $x(0)$ and $\varepsilon(t)$, $t \in \mathfrak{Q}$, are independent ; $x(t)$, $t > 0$, is function of $\{\varepsilon(\tau)|0 \leq \tau \leq t - \delta t\}$. Set $E_t^\varepsilon(\bullet) = E_t(\bullet|\varepsilon(0), \varepsilon(\delta t), \ldots, \varepsilon(t - \delta t))$. Equation (6) yields the decomposition (7) [23], where $\eta$ is a stochastic process, such that $E_t^\varepsilon(\eta(t)) = 0$, $E_t^\varepsilon((\eta(t))^2) = 1$. Then, for all $t \in \mathfrak{Q} \setminus \{1\}$, $\sigma_t^\star \simeq s_t^\star$, $\varepsilon(t) = \eta(t)$.

We will not make any distinction between two equations of type (7) if the coefficients are limited and infinitely closed. The process $x$ is said to be *Markov*, or to satisfy the *Markov condition*, if, and only if, there exist $b \simeq D^\varepsilon x(t)$, $\sigma \simeq s_t^\star$, such that they are functions of $t$ et $x(t)$, and not of $\{x(\tau)|0 \leq \tau < t\}$. Assume that $x$ is Markov. Consider the infinitesimal random walk (8). According to [3] (see, also, [4]) it defines a diffusion if, and only if, the following conditions are satisfied (see [1] for another approach) : $b$ and $\sigma$ are of class $S^0$ ; the shadows $\tilde{b}$ and $\tilde{\sigma}$ of $b$ et $\sigma$ are of class $C^\infty$ ; the function $\tilde{\sigma}$ is always strictly positive ; the random variable $x(0)$ is almost surely limited.

# 1 Introduction

Inventée par Fényes [6], développée et popularisée par Nelson [19, 20, 22], la *mécanique stochastique* offre, ainsi que diverses variantes (renvoyons à quelques travaux [5, 11, 12, 17, 18, 27, 28, 29, 32, 33], tous postérieurs aux publications de Nelson), une alternative passionnante aux fondements du quantique, déjà recherchée par Schrödinger [31] (cf. [34]). Elle y parvient par l'introduction d'un champ de fluctuations quantiques, de nature brownienne, proche des bruits dans des domaines d'ingéniérie, comme l'automatique et le signal. Nous justifions, ici, ces fluctuations, sans la nécessité d'un tel champ, qui n'a pas reçu de justifications convaincantes. Que l'on nous permette une citation ([22], p. 68) : « *Let me remark that I have no evidence for the background field hypothesis (if I did, I would gladly sacrifice an ox)* » ! Voir les références précédentes pour un examen critique et des indications bibliographiques supplémentaires. Cette note repose sur

- l'interprétation par Feynman [7, 8] du principe d'incertitude de Heisenberg ;
- l'*analyse non standard* de Robinson [30], déjà employée en quantique (voir, par exemple, [1], sa bibliographie, et [13, 24]), et, plus précisément,
  - une discrétisation infinitésimale du temps,
  - le calcul non standard des probabilités de Nelson [23] et son extension aux équations différentielles stochastiques [3, 4].

Terminons par une autre citation ([22], p. 94) à propos de l'expérience des fentes d'Young : « *The particle doesn't know whether the other slit is open, but the background field does* ». Cet embarras se retrouve peu ou prou dans les explications des paradoxes célèbres, fournies en [11, 12, 17, 18, 22, 29] et souvent séduisantes. Il semble, ici, dissipé.

*Remarque 1 Afin d'alléger l'écriture, nous nous restreignons à un espace de dimension* 1.

*Remarque 2 Alors que certains travaux autour de la mécanique stochastique se rattachent à l'automatique et, plus précisément, à la commande optimale stochastique (cf. [14]), notre point de vue fait suite à une approche nouvelle [10] de l'estimation et de l'identification, en automatique et signal. Rappelons les liens entre quantique actuel et certains aspects du traitement du signal (cf. [9]).*

## 2 Présentation générale

Voici une synthèse des principales idées directrices, sans prétention de rigueur, mais, espérons-le, claire et transparente, destinée aux lecteurs peu au fait de l'-analyse non standard :

1. On remplace, comme souvent en non-standard (cf. [1, 23]), le temps continu par un ensemble infini « discret » d'instants infiniment proches.
2. Les calculs suivants émanent d'une reformulation par Feynman [7, 8] du principe d'incertitude de Heisenberg (voir, aussi, [16, 24]) : la « trajectoire quantique » est une courbe continue, non dérivable, c'est-à-dire fractale, de dimension de Hausdorff 2, traduisant la « *Zitterbewegung* ». Soient $x$ la position, $m$ la masse, $p$ la quantité de mouvement, $h = 2\pi\hbar$ la constante de Planck. L'expression familière $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$ du principe d'incertitude devient (cf. [16], p. 85) :
$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \gtrsim \frac{\hbar}{m} \tag{1}$$
Soit $\delta t > 0$ infinitésimal donné. On réécrit (1) en postulant que
$$\frac{(x(t + \delta t) - x(t))^2}{\delta t} \tag{2}$$
est limité et appréciable, c'est-à-dire ni infiniment grand ni infiniment petit.
3. On en déduit, moyennant des hypothèses mathématiques « faibles », l'équation aux différences infinitésimales
$$x(t + \delta t) = x(t) + b\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t} \tag{3}$$
4. L'absence de toute hypothèse physique supplémentaire conduit à postuler l'équiprobabilité de $\pm 1$.
5. Si $x$ est *markovien*, c'est-à-dire si $b$ et $\sigma$ sont fonctions de $t$ et $x(t)$, et non de $\{x(\tau) | 0 \leq \tau < t\}$, cette marche aléatoire infinitésimale « équivaut » à une équation différentielle stochastique au sens usuel (cf. [1, 4]).

*Remarque 3 Nos marches aléatoires, qui pourraient venir compléter les* marches aléatoires quantiques *et leurs applications informatiques (cf. [15]), découlent de principes premiers. Les liens de telles marches avec le quantique étaient déjà connus (cf. [13, 25, 26]). Voir, à propos de l'irréversibilité thermodynamique, [2] pour une condition voisine de (1)-(2) dans un espace-temps discret.*

*Remarque 4 Ce travail est une autre manifestation des liens, déjà évoqués en maintes publications et soulignés en [24], entre mécanique stochastique et approche fractale de la microphysique.*

*Remarque 5 Le caractère statistique du quantique, confirmé par tant d'expériences, se fonde, comme on le sait, sur l'interprétation, due à Born, de la fonction d'onde de Schrödinger. L'explication fournie ici est autre.*

# 3 Analyse non standard

On rédige selon la terminologie *IST* de [21, 23].

## 3.1 Condition de Heisenberg

Remplaçons l'intervalle $[0,1]$ par $\mathfrak{Q} = \{k\delta t \mid 0 \leq k \leq N_q\}$, $\delta t = \frac{1}{N_q}$, où $N_q$ est un entier illimité. Appelons $\mathfrak{Q}$ et $\delta t$, respectivement, l'*échelle* et le *pas de temps quantiques*. Une fonction $x : \mathfrak{Q} \to \mathbb{R}$ est dite vérifier la *condition de Heisenberg* si, et seulement si, pour tout $t \in \mathfrak{Q} \setminus \{1\}$,

$$\frac{(x(t+\delta t) - x(t))^2}{\delta t} \simeq (\sigma_t^\star)^2 \tag{4}$$

où $\sigma_t^\star \in \mathbb{R}$, $\sigma_t^\star > 0$, est limité et appréciable. Il en découle

$$x(t+\delta t) - x(t) \simeq \varepsilon(t)(\sigma_t^\star)\sqrt{\delta t} \quad \text{où } \varepsilon(t) = \pm 1 \tag{5}$$

## 3.2 Équiprobabilité de $+1$ et $-1$

Postulons les deux propriétés suivantes, qui découlent « naturellement » de l'absence de toute hypothèse physique supplémentaire :
- les $\varepsilon(t)$, $t \in \mathfrak{Q} \setminus \{1\}$, sont des variables aléatoires indépendantes,
- $\Pr(\varepsilon(t) = +1) = \Pr(\varepsilon(t) = -1) = \frac{1}{2}$.

## 3.3 Processus stochastiques

Comme $\varepsilon$ peut être vu comme un processus stochastique, il est loisible de postuler les propriétés suivantes (cf. [23] et [3, 4]) :
- $x$ est un processus stochastique ;
- les variables aléatoires $x(0)$ et $\varepsilon(t)$, $t \in \mathfrak{Q}$, sont indépendantes ;
- $x(t)$, $t > 0$, est fonction de $\{\varepsilon(\tau) | 0 \leq \tau \leq t - \delta t\}$.

Notons $E_t^\varepsilon(\bullet)$ l'espérance conditionnelle du processus $\bullet$ en l'instant $t \in \mathfrak{Q}$, sachant le passé du processus $\varepsilon$. Posons

$$\begin{array}{r}
D^\varepsilon x(t) = \frac{E_t^\varepsilon(x(t+\delta t) - x(t))}{\delta t} \\
s_t^\star \simeq \sqrt{\frac{(x(t+\delta t) - x(t) - D^\varepsilon x(t)\delta t)^2}{\delta t}}
\end{array} \tag{6}$$

Supposons $D^\varepsilon x(t)$ limité. On obtient la décomposition [23] (voir, aussi, [3]) :

$$x(t+\delta t) = x(t) + (D^\varepsilon x(t))\delta t + (s_t^\star)\eta(t)\sqrt{\delta t} \tag{7}$$

où $\eta$ est un processus stochastique, tel que $E_t^\varepsilon(\eta(t)) = 0$, $E_t^\varepsilon((\eta(t))^2) = 1$. La proposition suivante relie les quantités $\sigma_t^\star$ et $\varepsilon(t)$ des paragraphes précédents aux nouvelles :

**Proposition 3.1** *Pour tout $t \in \mathfrak{Q} \setminus \{1\}$, il est loisible de poser $\sigma_t^\star \simeq s_t^\star$, $\varepsilon(t) = \eta(t)$.*

### 3.4 Condition de Markov

Soit

$$x_i(t + \delta t) = x_i(t) + (D^\varepsilon x_i(t))\delta t + (s^\star_{i,t})\varepsilon(t)\sqrt{\delta t}$$

où $i = 1, 2$. La propriété suivante est facile :

**Lemme 3.2** *Si, pour tout $t \in \mathfrak{Q}\backslash\{1\}$, les quantités infiniment proches $D^\varepsilon x_1(t) \simeq D^\varepsilon x_2(t)$, $s^\star_{1,t} \simeq s^\star_{2,t}$, $x_1(0) \simeq x_2(0)$ sont limitées en valeur absolue par $C \in \mathbb{R}$, la différence $x_1(t) - x_2(t)$ reste infinitésimale pour tout $t \in \mathfrak{Q}$.*

Nous ne distinguerons pas deux équations de type (7) avec coefficients limités et infiniment proches. On dit que $x$ est *markovien*, ou satisfait la *condition de Markov*, si, et seulement si, il existe des quantités $b \simeq D^\varepsilon x(t)$, $\sigma \simeq s^\star_t$ fonctions de $t$ et $x(t)$, et non de $\{x(\tau) | 0 \leq \tau < t\}$.

### 3.5 Diffusions

Supposons, dorénavant, $x$ markovien et considérons la marche aléatoire infinitésimale

$$x(t + \delta t) = x(t) + b(t, x(t))\delta t + \sigma(t, x(t))\varepsilon(t)\sqrt{\delta t} \tag{8}$$

Renvoyons à [23] (voir, aussi, [3, 4]) pour la notion d'*équivalence* de processus stochastiques. Le représentant (8) définit, selon [3] (voir, aussi, [4]), une diffusion si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :

- $b$ et $\sigma$ sont de classe $S^0$,
- les ombres $\tilde{b}$ et $\tilde{\sigma}$ de $b$ et $\sigma$ sont de classe $C^\infty$,
- la fonction $\tilde{\sigma}$ est toujours strictement positive,
- la variable aléatoire $x(0)$ est presque sûrement limitée.

*Remarque 6 Voir [1] pour une autre approche des liens entre (8) et équations différentielles stochastiques, où les conditions requises pour $b$ et $\sigma$ sont sensiblement différentes.*

**Remerciements**. L'auteur exprime sa reconnaissace à E. Benoît (La Rochelle) pour lui avoir communiqué la référence [3], à J.-M. Lévy-Leblond (Nice) pour des remises en question salutaires, à P. Rouchon (Paris) pour des discussions précieuses, et à T. Sari (Mulhouse) pour des conseils utiles.

## Références

[1] S. Albeverio, J.E. Fenstad, R. Hoegh-Krøhn, T. Lindstrøm, Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics, Academic Press, Orlando, FL, 1986.

[2] J.-P. Badiali, Entropy, time-irreversibility and the Schrödinger equation in a primarily discrete spacetime, J. Phys. A: Math. Gen., 38, 2005, 2835-2847.

[3] E. Benoît, Diffusions discrètes et mécanique stochastique, Prépubli. Lab. Math. J. Dieudonné, Université de Nice, 1989.

[4] E. Benoît, Random walks and stochastic differential equations, in: F. & M. Diener (Eds), Nonstandard Analysis in Practice, Springer, Berlin, 1995, p. 71-90.

[5] M Davidson, Stochastic mechanics, trace dynamics, and differential space - a synthesis, Prépublication, 2006 (accessible sur http://www.arxiv.org/abs/quant-ph/0602211).

[6] I. Fényes, Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik, Zeitschrift Physik, 132, 1952, 81-106.

[7] R.P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Modern Physics, 22, 1948, 367-387.

[8] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965.

[9] P. Flandrin, Temps-fréquence, $2^e$ éd., Hermès, Paris, 1998.

[10] M. Fliess, Analyse non standard du bruit, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 342, 2006, 797-802.

[11] L. Fritsche, M. Haugk, A new look at the derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics, Annalen Physik, 12, 2003, 371-403.

[12] L. Fritsche, M. Haugk, Anschauliche Quantenmechanik, Manuscrit, 2006.

[13] S. Gudder, Hyperfinite quantum random walks, Chaos Solitons Fractals, 7, 1996, 669-679

[14] F. Guerra, L.M. Morato, Quantization of dynamical systems and stochastic control theory, Physical Rev. D, 27, 1983, 1774-1786.

[15] J. Kempe, Quantum random walks - an introductory overview, Contemporary Physics, 44, 2003, 307-327.

[16] H. Kröger, Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin systems, Physics Rep., 323, 2000, 81-181.

[17] M. Nagasawa, Schrödinger Equations and Diffusion Theory, Birkhäuser, Bâle, 1993.

[18] M. Nagasawa, Stochastic Processes in Quantum Physics, Birkhäuser, Bâle, 2000.

[19] E. Nelson, Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics, Physical Rev., 150, 1966, 1079-1085.

[20] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1967 ($2^e$ éd., datant de 2001, accessible sur http://www.math.princeton.edu/%7Enelson/books/bmotion.pdf).

[21] E. Nelson, Internal set theory, Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1977, 1165-1198.

[22] E. Nelson, Quantum Fluctuations, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985 (accessible sur http://www.math.princeton.edu/%7Enelson/books/qf.pdf).

[23] E. Nelson, Radically Elementary Probability Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987 (accessible sur http://www.math.princeton.edu/%7Enelson/books/rept.pdf).

[24] L. Nottale, Fractal Space-Time and Microphysics, World Scientific, Singapour, 1993.

[25] G.N. Ord, A.S. Deakin, Random walks, continuum limits, and Schrödinger's equation, Physical Rev. A, 54, 1996, 3772-3778.

[26] G.N. Ord, R.B. Mann, Entwined pairs and Schrödinger's equation, Annals Physics, 308, 2003, 478-492.

[27] O. Oron, L.P. Horwitz, Relativistic Brownian motion and gravity as an eikonal approximation to a quantum evolution equation, Foundat. Physics, 35, 2005, 1181-1203.

[28] M. Pavon, Stochastic mechanics and the Feynman integral, J. Math. Physics, 41, 2000, 6060-6078.

[29] L. de la Peña, A.M. Cetto, The Quantum Dice: An Introduction to Stochastic Electrodynamics, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[30] A. Robinson, Non-Standard Analysis, $2^{nd}$ ed., North-Holland, Amsterdam, 1974.

[31] E. Schrödinger, Sur la théorie relativiste de l'électron et l'interprétation de la mécanique quantique, Annales Institut H. Poincaré, 2, 1932, 269-310.

[32] L. Smolin, Matrix models and non-local hidden variables theories, in: A. Elitzur, S. Dolev, N. Kolenda (Eds), Quo Vadis Quantum Mechanics, Springer, Berlin, 2005, pp. 121-152.

[33] L. Smolin, Could quantum mechanics be an approximation to another theory ?, Prépublivation, 2006 (accessible sur `http://www.arxiv.org/abs/quant-ph/0609109`).

[34] J.C. Zambrini, Stochastic mechanics according to E. Schrödinger, Physical Rev. A, 33, 1986, 1532-1548.