

# Etudes préliminaires d'ensembles accessibles pour des problèmes d'anti-collision

Alex Bombrun, Youssef El Fassy Fihry, Jean-Baptiste Pomet

► **To cite this version:**

Alex Bombrun, Youssef El Fassy Fihry, Jean-Baptiste Pomet. Etudes préliminaires d'ensembles accessibles pour des problèmes d'anti-collision. [Rapport de recherche] 2006. inria-00121514v1

**HAL Id: inria-00121514**

**<https://hal.inria.fr/inria-00121514v1>**

Submitted on 20 Dec 2006 (v1), last revised 22 Dec 2006 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Etudes préliminaires d'ensembles accessibles pour  
des problèmes d'anti-collision*

Alex Bombrun — Youssef El Fassy Fihry — Jean-Baptiste Pomet

N° ????

décembre 2006

Thème NUM



*R*apport  
de recherche





## Etudes préliminaires d'ensembles accessibles pour des problèmes d'anti-collision

Alex Bombrun\* , Youssef El Fassy Fihry† , Jean-Baptiste Pomet‡

Thème NUM — Systèmes numériques  
Projet Apics

Rapport de recherche n° 0000 — décembre 2006 — 33 pages

**Résumé :** On présente des résultats autour du problème suivant: pour un point matériel dont l'accélération est bornée par une constante donnée, et pour un domaine donné de l'espace des positions, déterminer le (bord du) domaine dans l'espace des positions-vitesses à partir desquels la position peut rester dans le premier domaine ci-dessus pour tous les temps positifs.

**Mots-clés :** Ensemble accessible, Viabilité, Anti-collision

Ce document est essentiellement le rapport de stage d'option Robotique P03 l'École des Mines de Paris effectué par Y. El Fassy Fihry à l'INRIA, sous la direction de J.-B. Pomet avec la participation de A. Bombrun. Stage soutenu en juillet 2006.

\* [Alex.Bombrun@sophia.inria.fr](mailto:Alex.Bombrun@sophia.inria.fr)

† [École des Mines de Paris, youssef.eff@gmail.com](mailto:youssef.eff@gmail.com)

‡ [Jean-Baptiste.Pomet@sophia.inria.fr](mailto:Jean-Baptiste.Pomet@sophia.inria.fr)

# Preliminary results on accessible sets for collision avoidance problems

**Abstract:** The following problem is addressed and partially solved in this report: given a bound  $\varepsilon > 0$  on the acceleration of a point, and a domain in the position space, determine (the boundary of) the domain in position+velocity space that are initial conditions of solutions whose position remains in the prescribed domain for positive times and whose acceleration remains no larger than  $\varepsilon$ .

**Key-words:** Accessible sets, Viability, Collision avoidance

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires et position du problème</b>	<b>7</b>
2.1	Préliminaires . . . . .	7
2.2	Propriétés fondamentales . . . . .	9
2.3	Viabilité et temps maximum . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Premiers résultats</b>	<b>17</b>
3.1	Viabilité affaiblie . . . . .	17
3.2	Théorème fondamental . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Le double intégrateur dans le disque de <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>25</b>
4.1	Le principe du maximum . . . . .	25
4.2	Étude des paraboles . . . . .	28
4.3	Critère de viabilité . . . . .	29

# 1 Introduction

Formulé le plus généralement, le problème que l'on se pose ici est le suivant.

**Problème Générique :** *Pour un système contrôlé « suffisamment régulier »*

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m ,$$

on se donne une « région »  $\mathcal{C}$  de l'espace des états, un couple d'états  $(\xi_0, \bar{\xi}) \in \mathcal{C}^2$ , et on cherche une loi de commande  $u(\cdot)$  admissible pour laquelle la trajectoire associée  $\xi(\cdot)$  partant de  $\xi_0$  au temps 0, arrive à  $\bar{\xi}$  pour un certain temps  $T$ , tout en restant dans  $\mathcal{C}$  :

- (i)  $\xi(0) = \xi_0 \quad \dot{\xi}(t) = f(\xi(t), u(t))$  p.p et  $\exists T \geq 0 \quad \xi(T) = \bar{\xi}$
- (ii)  $\forall t \geq 0 \quad u(t) \in B$
- (iii)  $\forall t \geq 0 \quad \xi(t) \in \mathcal{C}$

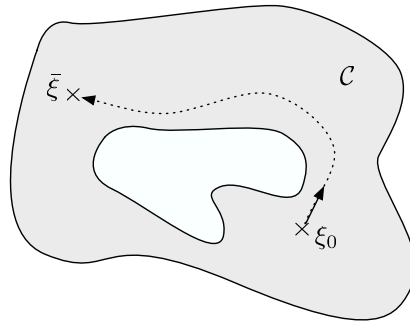


FIG. 1 – Le problème générique

Remarquons qu'on pourrait demander en plus que le contrôle  $u$  soit réalisable par feedback sur l'état, c'est-à-dire que  $u$  s'écrive  $u(\xi)$ , et alors  $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), u(\xi(t)))$ . Ceci n'est pas abordé.

L'origine de ce problème est la reconfiguration sans collision de "constellations" d'engins spatiaux. Brièvement, on considère un certain nombre d'engins spatiaux possédant chacun des moyens de propulsion autonomes, et on cherche à concevoir des lois de commande qui assurent de gagner, à partir d'une certaine configuration initiale en *positions et vitesses*, une configuration désirée en garantissant de rester dans un certain domaine autorisé : tous les engins

doivent rester à une distance supérieure (resp. inférieure) à un certain minimum (resp. maximum) les uns des autres (resp. de l'un d'entre eux). Les commandes sont des poussées, donc des accélérations, et ne peuvent dépasser une certaine valeur donnée. L'espace d'état pertinent est donc celui des *positions et vitesses*, et il est clair que pour une position donnée satisfaisant les deux contraintes ci dessus, mais pour une vitesse initiale (relative) suffisamment grande, il est impossible d'éviter la collision, par exemple.

Dans ce rapport, on ne va pas jusqu'à concevoir de telles commandes ; on cherche à déterminer l'ensemble des points (dans l'espace positions-vitesses) à partir desquels il est *possible* de rester dans le domaine désiré.

La réécriture du problème de vol en formation d'engins spatiaux dans les termes du problème précédent est immédiate. En effet, on considère ici comme système le double intégrateur à commande bornée :

$$\ddot{x} = u \quad \text{où} \quad \|u\| \leq \epsilon$$

et on cherche à joindre  $(x_i, v_i)_{i=1..n}$  et  $(\bar{x}_i, \bar{v}_i)_{i=1..n}$ , tout en respectant les contraintes de sécurité sur les positions des engins spatiaux. En d'autres termes, on cherche ici à rester dans une région  $\mathcal{C}$  qui serait définie de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_i, v_i)_{i=1..n} \in (\mathbb{R}^{2d})^n : \forall i \neq j \quad \|x_i - x_j\| \geq \delta \right. \\ \left. \text{et} \quad \forall i \quad \|x_i\| \leq \Delta \right\}$$

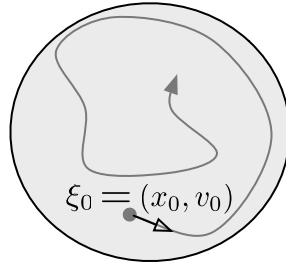
Un autre exemple important est celui d'une particule accélérée amenée à se déplacer dans le disque du plan. Plus précisément, on considère le système

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \|u\| \leq \epsilon$$

et on cherche à rester dans  $\mathcal{C} = \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}^2$  (*positions et vitesses*) tout en respectant  $\|u\| \leq \epsilon$ . Nous verrons que cet exemple est suffisamment simple pour nous permettre de l'étudier quasi-complètement.

Notons enfin que les obstructions à la résolution de ce type de problème sont principalement de deux types de nature très différente.



FIG. 2 – Particule dans  $\mathcal{C} = \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}^2$ 

Le premier type d'obstruction vient du fait que pour certaines conditions initiales (par exemple, dans le cas d'une vitesse initiale sortante trop importante, dans le cas de la particule dans le cylindre  $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}^2$ ), il n'est de toutes façons pas possible d'éviter de sortir de  $\mathcal{C}$ , et cela quelque soit le contrôle que l'on applique en entrée. On parlera de la **viabilité** ou non d'une condition initiale pour rester dans  $\mathcal{C}$ .

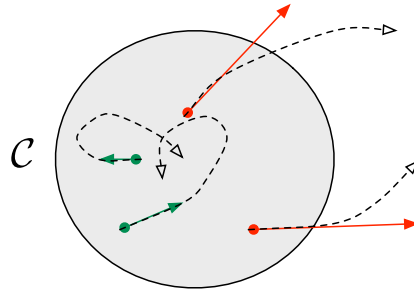


FIG. 3 – Conditions viables et non viables

Le deuxième type d'obstruction relève quant à lui de la **contrôlabilité** ou non du système concerné. Pour obtenir un exemple trivial, le lecteur pourra considérer le système

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

et se convaincra aisément que le système ne pourra jamais atteindre l'état  $(1, 1)$  en partant de  $(0, 0)$ , par exemple.

Les deux problèmes ne sont ici bien évidemment pas indépendants, mais on s'attache principalement dans ce rapport à étudier la première question.

## 2 Préliminaires et position du problème

### 2.1 Préliminaires

Commentons tout d'abord par définir ce que l'on entend par le mot « région », puis précisons le type de systèmes auxquels on s'intéresse. On énoncera enfin, plus formellement, le problème que l'on se propose d'étudier.

**Définition 2.1.** On appelle **cible** ou cible lisse de  $\mathbb{R}^n$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord (topologique) est une sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$ .

**Définition 2.2.** Soit  $u$  une application mesurable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^m$ . On dira que  $u$  est un **contrôle admissible** s'il vérifie

$$\|u(t)\| \leq \epsilon$$

pour tout  $t \geq 0$ , et on note  $\mathcal{U}_\epsilon(\mathbb{R}^m)$  l'ensemble des tels contrôles.

On considère alors, dans tout ce qui suit, une cible lisse  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et des systèmes linéaires contrôlés de la forme :

$$(\Sigma) \quad \dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t)$$

où  $A \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$  et  $B \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, M_{n,m}(\mathbb{R}))$ , et pour des contrôles  $u \in \mathcal{U}_\epsilon(\mathbb{R}^m)$ .

On notera  $\xi_{\xi_0, u}(t)$  la solution absolument continue de  $(\Sigma)$  associée à  $u$  qui vérifie  $\xi_{\xi_0, u}(0) = \xi_0$  (se reporter par exemple à l'annexe C de [5] pour l'existence et l'unicité de solutions d'o.d.e. non partout différentiables).

On définit ensuite l'**ensemble accessible**  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  au temps  $t$  partant de  $\xi_0$  au temps 0 pour le système  $(\Sigma)$  par :

$$\mathcal{A}(\xi_0, t) = \{\xi_{\xi_0, u}(t) \in \mathbb{R}^n : u \in \mathcal{U}_\epsilon(\mathbb{R}^m)\}$$

Si on se donne un sous ensemble  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^n$ , on sera aussi amené à considérer  $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(\xi_0, t)$  comme étant le sous ensemble de  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  formé des  $\xi$  pouvant être atteint au temps  $t$ , en partant de  $\xi_0$  au temps 0, par une solution du système restant dans  $\mathcal{V}$ .

On se pose alors la question suivante : partant de  $\xi_0 \in \mathcal{C}$  au temps 0, existe-t-il un  $u \in \mathcal{U}_\epsilon(\mathbb{R}^m)$  tel que  $\xi_{\xi_0, u}(t)$  reste indéfiniment dans  $\mathcal{C}$  pour les temps  $t$  positifs ? On dira alors que  $\xi_0$  appartient au **noyau de viabilité**  $\text{Viab}(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  pour notre système  $(\Sigma)$ , et on notera  $\xi_0 \in \text{Viab}(\mathcal{C})$ . La définition qui suit résume cela et introduit la notion de **viabilité jusqu'au temps  $T$**  pour  $T \geq 0$ . On pourra se reporter à [2] pour une étude plus générale de la notion de viabilité.

**Définition 2.3.** Soit  $\Omega$  un sous ensemble de l'espace des états (sous-entendu, pour le système considéré). On définit le noyau de viabilité de  $\Omega$ , comme étant le sous ensemble de  $\Omega$  de conditions initiales viables :

$$\text{Viab}(\Omega) = \{\xi_0 \in \Omega : \exists \text{ solution } \gamma \text{ t.q. } \gamma(0) = \xi_0 \text{ et } \gamma(\mathbb{R}^+) \subset \Omega\}$$

On définit aussi le noyau de viabilité jusqu'au temps  $T$  pour  $T \geq 0$  par :

$$\text{Viab}_T(\Omega) = \{\xi_0 \in \Omega : \exists \text{ solution } \gamma \text{ t.q. } \gamma(0) = \xi_0 \text{ et } \gamma([0, T]) \subset \Omega\}$$

Le sous-problème introduit dans la section précédent et que l'on cherche à résoudre s'écrit alors maintenant :

**Problème :** Calculer  $\text{Viab}(\mathcal{C})$  *explicitement* pour  $\mathcal{C}$  suffisamment général.

L'approche suivie ici est de commencer par tenter de décrire le bord  $\partial\text{Viab}(\mathcal{C})$  du noyau de viabilité, et cela, en utilisant les propriétés géométriques des ensembles  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  et leur rapport au *principe du maximum*. Pour cela, on commence par rappeler quelques résultats fondamentaux sur ces ensembles  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  dans le cas des systèmes *linéaires*. Pour des généralisations voir par exemple [6] ou [7].

## 2.2 Propriétés fondamentales

**Lemme 2.1 (Propriétés fondamentales).** *Soit un système linéaire contrôlé dans  $\mathbb{R}^n$  :*

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

dont les contrôles sont à valeurs dans un ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , alors :

- (i) l'ensemble  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  est convexe pour tout  $t \geq 0$ .
- (ii) si  $\mathcal{U}$  est strictement convexe, les  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  le sont aussi.
- (iii) si  $\mathcal{U}$  est compact, alors les  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  le sont aussi.

**Preuve.** Voir par exemple [6] page 19.  $\square$

**Lemme 2.2 (Continuité).** *Soit un système linéaire contrôlé dans  $\mathbb{R}^n$  :*

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t)$$

On a la propriété suivante :

$$\lim_{(\xi', s) \rightarrow (\xi, t)} d(\mathcal{A}(\xi, t), \mathcal{A}(\xi', s)) = 0 \quad (1)$$

où l'on a posé

$$d(A, B) = \max \left( \sup_{y \in A} d(y, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right)$$

En particulier, pour tout  $\xi_1 \in \mathcal{A}_{\xi_0}(t)$ , et tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\xi_1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $(\xi_0, t)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ , tel que

$$\forall (\xi, s) \in \mathcal{O} \quad \mathcal{A}_{\xi}(s) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset \quad (2)$$

**Preuve.** Il s'agit tout simplement de « continuité par rapport aux conditions initiales ». Soit donc  $\xi_1 \in \mathcal{A}_{\xi_0}(t)$ , alors si  $R(s, t)$  est la résolvante du système, on sait qu'il existe un contrôle  $u$  tel que :

$$\xi_1 = R(0, t)\xi_0 + R(0, t) \int_0^t R(0, \tau)^{-1} B(\tau)u(\tau) d\tau$$

Alors si définit (pour  $\xi'_0$  et  $s$  arbitraires) :

$$\xi_2 = R(0, s)\xi'_0 + R(0, s) \int_0^s R(0, \tau)^{-1}B(\tau)u(\tau)d\tau$$

On a que  $\xi_2 \in \mathcal{A}(\xi'_0, s)$  et :

$$\xi_1 - \xi_2 = R(0, t)(\xi_0 - \xi'_0) + (R(0, t) - R(0, s)) \int_0^s R(0, \tau)^{-1}B(\tau)u(\tau)d\tau + R(0, t) \int_s^t R(0, \tau)^{-1}B(\tau)u(\tau)d\tau$$

On peut donc prendre  $\xi_0 - \xi'_0$  aussi petit qu'on veut, et  $R$  et les intégrales sont continues par rapport à  $s$ . Il ne reste alors plus qu'à conclure.  $\square$

**Lemme 2.3.** Soit  $\xi \in \mathcal{A}(\xi^0, t)$  et  $(t_n)$  une suite telle que  $t_n \rightarrow t$ , alors il existe une suite  $(\xi_n)$  telle que,  $\xi_n \in \mathcal{A}(\xi^0, t_n)$  et  $\xi_n \rightarrow \xi$ .

**Preuve.** Découle du lemme précédent.  $\square$

**Lemme 2.4 (Continuité 2).** Si  $\xi^* \in \text{Int}(\mathcal{A}(\xi_0, t))$  alors  $\xi^* \in \mathcal{A}(\xi_0, s)$  pour tout  $s$  suffisamment proche de  $t$ .

**Preuve.** On simplifie et explicite ici la preuve de [7] (lemme 3.3 page 165).

Supposons donc que  $\forall n \geq 0 \exists t_n$  tel que  $t - \frac{1}{2^n} < t_n < t + \frac{1}{2^n}$  et  $\xi^* \notin \mathcal{A}(\xi_0, t_n)$ . Comme  $\mathcal{A}(\xi_0, t_n)$  est convexe et  $\xi^* \notin \mathcal{A}(\xi_0, t_n)$ , le théorème de séparation convexe nous fournit un vecteur normal unitaire  $p_n$  tel que  $\langle p_n | z - \xi^* \rangle \leq 0$  pour tout  $z \in \mathcal{A}(\xi_0, t_n)$ . Par compacité, on peut extraire une sous-suite convergente, toujours notée  $(p_n)$ , et on obtient finalement deux suites  $(p_n)$  et  $(t_n)$ , avec  $p_n \rightarrow p$ ,  $|p| = 1$ ,  $t_n \rightarrow t$  et surtout,  $p_n$  sépare  $\mathcal{A}(\xi_0, t_n)$  et  $\xi^*$  :

$$\langle p_n | z - \xi^* \rangle \leq 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{A}(\xi_0, t_n)$$

Soit alors  $z \in \mathcal{A}(\xi_0, t)$ , on sait d'après le lemme précédent que  $z$  est limite d'une suite  $(z_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}(\xi_0, t_n)$ , et donc

$$\langle p_n | z_n - \xi^* \rangle \leq 0 \quad \forall n \geq 0$$

Alors par continuité, puis comme  $z \in \mathcal{A}(\xi_0, t)$  est quelconque :

$$\langle p | z - \xi^* \rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{A}(\xi_0, t)$$

On en déduit alors que  $\xi^* \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, t)$  (sinon, considérer  $\xi_1$  et  $\xi^* + (\xi^* - \xi_1)$  dans  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  et diamétralement opposés, tels que  $\xi^* - \xi_1$  est colinéaire à  $p$ ).  $\square$

On termine par une définition et un théorème fondamental qui permettent de décrire les trajectoires arrivant sur le bord de l'ensemble accessible.

**Définition 2.4 (Extémales).** *Un contrôle  $u$  est dit extrémal sur  $[0, t]$  (sous-entendu, en partant de  $\xi_0$ ) si la trajectoire associée  $\xi_{\xi_0, u}(\cdot)$  dans  $(\Sigma)$  vérifie*

$$\xi_{\xi_0, u}(t) \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, t)$$

*On dira aussi de la trajectoire qu'elle est extrémale.*

**Théorème 2.1 (Principe du maximum).** *Considérons le système linéaire dans  $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

*où les contrôles sont à valeurs dans un ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  compact. Soit  $T > 0$ . Le contrôle  $u$  est extrémal sur  $[0, T]$  si et seulement s'il existe une solution non triviale  $p(t)$  de l'équation*

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t) \tag{3}$$

*telle que*

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{\nu \in \mathcal{U}} p(t)B(t)\nu \tag{4}$$

*pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Le co-vecteur  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  est appelé vecteur adjoint.*

**Preuve.** On renvoie à [1] ou [6] pour les détails de ce résultat standard et fondamental. Notons seulement que la preuve de ce théorème nous fournit deux résultats intermédiaire importants que nous utiliserons dans la suite :

**Résultat 1.** Si  $u$  est extrémal sur  $[0, T]$ , alors  $u$  est extrémal sur  $[0, t]$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Résultat 2.** En suivant la preuve même du principe du maximum, on voit que l'on peut toujours imposer la valeur  $p(T)$  pour une extrémale donnée, à la seule condition que  $p(T)$  annule un quelconque hyperplan séparant  $\xi_{\xi_0, u}(T) \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, T)$  et  $\mathcal{A}(\xi_0, T)$  au sens large.

On donne aussi une variante du théorème précédent, dont on se servira plus tard, et qui rend compte du caractère local du principe du maximum.

**Théorème 2.2 (Principe du maximum local).** *Soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution du système précédent, et  $\mathcal{V}$  un **ouvert** contenant sa trace  $\gamma([0, T])$ . Si  $\gamma(T) \in \partial\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(\xi_0, T)$ , alors  $\gamma$  est une extrémale, au sens où elle vérifie le principe du maximum tel qu'énoncé dans le théorème 2.1.*

La section qui suit va nous permettre d'étudier le comportement de la viabilité au passage aux limites pour certains types de systèmes. Ce résultat va introduire le premier lien entre  $\text{Viab}(\mathcal{C})$  et les ensembles  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$ , mais aussi la première difficulté.

### 2.3 Viabilité et temps maximum

On commence par un petit lemme technique.

**Lemme 2.5.** *Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions dans  $L^1([0, T])$  p.p à valeurs dans un convexe fermé  $\mathcal{U}$ . Supposons que  $(u_n)$  converge faiblement vers  $u$ , alors  $u$  est elle aussi p.p à valeurs dans  $\mathcal{U}$ .*

**Preuve.** Posons

$$\mathcal{F} = \{\phi \in L^1([0, T]) : \phi \in \mathcal{U} \text{ p.p.}\} \quad (5)$$

alors  $\mathcal{F}$  est évidemment convexe. Montrons qu'il est aussi fermé. Soit donc  $(\phi_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  convergeant fortement (i.e dans  $L^1$ ) vers  $\phi$ . Il existe alors une sous-suite, toujours notée  $(\phi_n)$ , telle que  $\phi_n(x)$  converge presque partout vers  $\phi(x)$ , et  $\phi(x) \in \bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ .

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est un convexe fortement fermé de  $L^1$ , et il est donc faiblement fermé (voir théorème III.7 dans [3]). Finalement,  $u \in \mathcal{F}$ .  $\square$

Le lemme suivant est un résultat classique dont on a donné ici une version plus faible mais auto-contenue. On pourra se reporter à [2], par exemple, pour des énoncés plus généraux. On l'utilisera principalement sous la forme de l'un des corollaires immédiats

**Lemme 2.6 (Limite de solutions).** *Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'applications absolument continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^p$ , et  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  tels que  $(x_n)$  converge*

uniformément vers  $x$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$ . Supposons de plus que

$$x'_n(t) = f_0(x_n(t)) + \sum_{k=1}^r u_n^k(t) f_k(x_n(t)) \text{ p.p pour } t \in [0, T_n] \quad (6)$$

où les  $(f_i)$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$ , les  $(u_n)$  des fonctions mesurables à valeurs un compact convexe  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^r$ , et  $(T_n)$  une suite de réels positifs croissant vers  $+\infty$ .

Alors  $x$  est absolument continue, et il existe un  $u$  mesurable à valeur dans  $\mathcal{U}$  tel que

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{k=1}^r u^k(t) f_k(x(t)) \text{ p.p}$$

**Preuve.** Pour alléger la rédaction, on traite le cas  $(u_n)$  scalaires, et on se fixe d'abord un compact  $[0, T]$  de  $\mathbb{R}^+$ .

Comme  $(x_n)$  converge uniformément sur  $[0, T]$ , elle est bornée sur  $[0, T]$ , et il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall n \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad x_n(t) \in K \quad (7)$$

Les  $(u_n)$  étant equi-bornés par définition, ils forment une partie bornée de  $L^\infty([0, T])$ , dual du Banach  $L^1([0, T])$ , et par le théorème d'Alaoglu (III.15 [3]), on peut en extraire une sous-suite qui converge  $*$ -faiblement vers un  $u \in L^\infty([0, T])$ . On note encore  $(x_n)$ , et  $(u_n)$  les suites obtenues. Il est clair que  $(u_n)$  converge en fait  $*$ -faiblement dans  $L^\infty([0, t])$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Comme  $f = f_1$  est continue sur le compact  $K$ , elle transforme la suite uniformément convergente  $(x_n(\cdot))$  en une suite de fonctions continues uniformément convergentes  $(f(x_n(\cdot)))$ , et comme  $[0, T]$  est compact, ces suites convergent en fait fortement dans  $L^1([0, t])$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

La proposition III.12 dans [3] permet alors de conclure que

$$\forall t \in [0, T] \quad \int_0^t u_n(s) f(x_n(s)) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t u(s) f(x(s)) ds \quad (8)$$

Alors partant de

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t x'_n(s) ds \quad (9)$$



et en remarquant que pour  $n \geq N$  assez grand  $[0, T] \subset [0, T_n]$ , on aboutit bien à

$$\forall t \in [0, T] \quad x(t) = x(0) + \int_0^t f_0(x(s)) + \sum_{k=1}^r u^k(s) f_k(x(s)) ds \quad (10)$$

Il nous reste encore à voir que  $u$  est à valeurs dans  $\mathcal{U}$ . Pour cela, remarquons que les  $(u_n)$  sont aussi des éléments de  $L^1([0, T])$ . Il nous suffit donc de montrer que  $(u_n)$  converge faiblement dans  $L^1([0, T])$ , et le lemme précédent nous permettra de conclure.

Soit donc  $\phi \in (L^1([0, T]))' = L^\infty([0, T])$ . Alors en particulier,  $\phi \in L^1([0, T])$ , et comme  $(u_n)$  converge \*-faiblement vers  $u$  dans  $L^\infty([0, T])$ , on obtient

$$\int_0^T \phi u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi u \quad (11)$$

et  $(u_n)$  est faiblement convergente dans  $L^1([0, T])$ .

Enfin, le résultat sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier s'obtient en répétant l'étude précédente sur les compacts  $[n, n+1]$ , par exemple. Ainsi, si  $(v_n)$  sont les fonctions obtenues sur les  $[n, n+1]$ , la fonction mesurable

$$u = \sum_n v_n \mathbf{1}_{[n, n+1]} \quad (12)$$

convient parfaitement.  $\square$

**Théorème 2.3.** *Soit un système affine de la forme*

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{k=1}^r u^k(t) f_k(x(t)) \quad (13)$$

où les  $(f_i)$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$ , et les contrôles  $u = (u^k)_{k=1..r}$  des fonctions mesurables à valeurs un compact convexe  $\mathbb{R}^r$ . Soit aussi  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$ , et  $x_0 \in \mathbb{R}^p$ .

Supposons que pour tout  $T \geq 0$ , il existe une solution de (13) partant de  $x_0$ , et restant dans  $\mathcal{K}$  jusqu'au temps  $T$ .

Alors  $x_0$  est viable dans  $\mathcal{K}$ .

**Preuve.** Pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe une trajectoire  $x_n(\cdot)$  solution du système (13) partant de  $x_0$ , et telle que

$$\forall t \in [0, n] \quad x_n(t) \in \mathcal{K} \quad (14)$$

On peut, sans perte de généralité, supposer que les  $(x_n)$  vérifient de plus  $x_n(t) = x_n(n)$  pour  $t \geq n$ . Les  $(x_n)$  sont ainsi des fonctions absolument continues sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathcal{K}$ , et solutions de (13) seulement sur les intervalles  $[0, n]$ .

Les  $(x_n)$  étant à valeurs dans le compact  $\mathcal{K}$ , elles sont equi-bornées. De plus, comme les  $(u_n)$  sont bornés et les  $(f_k)$  continues, les  $(x'_n)$  sont aussi à valeurs dans un compact, et les trajectoires sont equi-Lipschitziennes.

Le théorème d'Ascoli nous permet alors d'affirmer l'existence d'une sous-suite, toujours notée  $(x_n)$ , qui converge uniformément sur tout compact vers une trajectoire  $x$  qui reste dans le fermé  $\mathcal{K}$  (on utilise le théorème d'Ascoli sur les  $[0, n]$  en extrayant une sous-suite de la sous-suite précédente à chaque fois, et on prend finalement la suite « diagonale »).

Finalement, l'application du théorème précédent garantit que  $x$  est bien une solution du système (13), ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Théorème 2.4.** *Soit un système affine de la forme*

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{k=1}^r u^k(t) f_k(x(t))$$

où les  $(f_i)$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$ , et les contrôles  $u = (u^k)_{k=1..r}$  des fonctions mesurables à valeurs dans un compact convexe de  $\mathbb{R}^r$ . Soit aussi  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathbb{R}^p$ , et  $x_0 \in \mathbb{R}^p$ .

Supposons qu'il existe une suite  $(y_n)$  tendant vers  $x_0$ , et une suite  $(T_n)$  de réels positifs croissant vers  $+\infty$ , telles que

$$\forall n \geq 0 \quad y_n \in \text{Viab}_{T_n}(\mathcal{K})$$

Alors  $x_0$  est viable dans  $\mathcal{K}$ .

**Preuve.** On prend des trajectoires  $u_n$  partant des  $y_n$ , viables jusqu'aux  $T_n$  et on les « bloque » à  $T_n$  comme dans la preuve précédente. Comme les

trajectoires et leurs dérivées sont à valeurs dans des compacts, on peut invoquer Ascoli et extraire une sous suite qui converge uniformément sur tout compact. La limite est bien une solution (par le théorème 2.6) partant de  $x_0$  par construction, et est viable par limite simple dans le fermé  $\mathcal{K}$  (pour  $t$  fixé, les trajectoires sont toutes dans  $\mathcal{K}$  pour  $n$  suffisamment grand).  $\square$

Ces corollaires sont en fait un résultat capital. En effet, 2.3 permet d'affirmer que tout point  $\xi_0$  non viable admet un **temps maximal** pour atteindre le bord de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire qu'il existe un temps  $T$  tel que toutes les trajectoires partant de  $\xi_0$  au temps 0, soient sorties de la cible (et donc qu'elles aient atteint son bord) au moins une fois au temps  $T$ . L'intérêt vient alors du fait que le principe du maximum 2.1 nous permet de décrire explicitement les trajectoires arrivant sur le bord de la cible au temps maximal  $T$  (*et pas avant*), lorsqu'elles existent (dites trajectoires « temps maximal »), car elles sont clairement avant tout des *extrémales* [6].

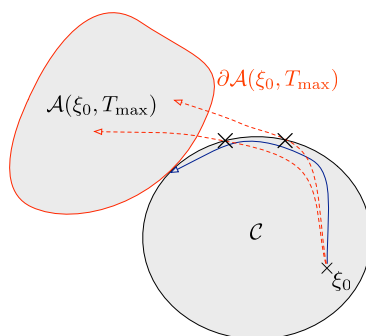


FIG. 4 – Les courbes temps maximum sont extrémales

D'un autre côté, 2.4 montre quant à lui que  $\text{Viab}(\mathcal{C})$  est fermé (dans le cas qui nous intéresse), et il n'est pas clair que les points de la frontière  $\partial\text{Viab}(\mathcal{C})$  admettent eux aussi des temps maximaux. Avec une hypothèse supplémentaire, une version affaiblie de ce résultat sera démontrée plus loin. Avant cela, on propose ici une méthode basée sur ce que l'on pourrait appeler une propriété de « **viabilité affaiblie** », et on verra que les deux notions coïncident dans le

cas du disque.

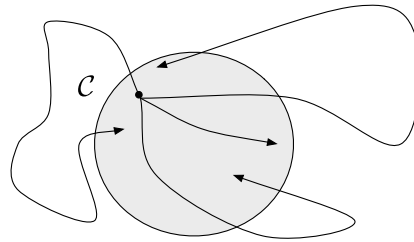
Cette notion de viabilité affaiblie ne nous fournira pas de courbes temps maximum, mais une version du principe du maximum plus élaborée et plus géométrique que celle énoncée en 2.1, dans l'esprit de ce l'on peut trouver dans [1], par exemple. La section qui suit introduit les notions et développe les outils nécessaires à cela.

### 3 Premiers résultats

#### 3.1 Viabilité affaiblie

On rappelle que l'on s'est donné une cible lisse  $\mathcal{C}$ , sur laquelle on ne fait aucune hypothèse de convexité. On définit maintenant l'ensemble  $\Omega$  des conditions initiales **faiblement viables** :

$$\Omega = \{\xi_0 \in \mathcal{C} : \forall t \geq 0 \mathcal{A}(\xi_0, t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\} \quad (15)$$



On va alors montrer que la propriété supplémentaire

$$P(\xi_0) : \exists T > 0 \text{ t.q. } \text{Int}(\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \mathcal{C}) = \emptyset$$

caractérise (en un sens à préciser) les points de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . On commence par une définition :

**Définition 3.1.** *Un système contrôlé  $(\Sigma)$  est dit  $\mathcal{K}$ -contrôlable s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

- (i) *Les ensembles  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  sont d'intérieur non vide pour les temps  $t > 0$ .*

(ii) Pour toute condition initiale  $\xi_0$  et tout compact  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $\xi_0$  et un temps  $t^* \geq 0$  tel que :

$$\forall \xi \in \mathcal{O} \quad \forall t \geq t^* \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{A}(\xi, t) \quad (16)$$

On s'assure ensuite que les éléments de  $\partial\Omega$  sont bien dans  $\Omega$ .

**Lemme 3.1.**  $\Omega$ , défini par (15), est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

**Preuve.** Soit donc une suite  $(\xi_n)$  d'éléments de  $\Omega$  qui converge vers  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , et supposons qu'il existe un  $T \geq 0$  tel que  $\mathcal{A}(\xi, T) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ . Comme  $\mathcal{A}(\xi, T)$  est compact et  $\mathcal{C}$  fermé,  $\inf_{\zeta \in \mathcal{A}(\xi, T)} d(\zeta, \mathcal{C}) = \epsilon > 0$ . La contradiction vient alors de la continuité de  $\xi \mapsto \mathcal{A}(\xi, T)$  donnée par le lemme 2.2.  $\square$

On peut alors énoncer le premier résultat important :

**Proposition 3.1.** Soit un système  $(\Sigma)$   $\mathcal{K}$ -contrôlable,  $\mathcal{C}$  une cible, et  $\xi_0 \in \partial\Omega$  (def. 15). Alors une et une seule des situations suivantes se produit :

- (a)  $\xi_0 \in \partial\mathcal{C}$
- (b)  $\xi_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$  et il existe  $T > 0$  tel que  $\text{Int}(\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \mathcal{C}) = \emptyset$ .

**Preuve.** La disjonction est évidente puisque  $\mathcal{C}$  est fermé. Il nous reste donc à montrer la deuxième partie de (b) pour  $\xi_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$ .

Soit donc  $\xi_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$ , et supposons que  $\forall T > 0 \text{ Int}(\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \mathcal{C}) \neq \emptyset$ . Alors en particulier  $\xi_0 \in \Omega$ , et nous allons montrer que  $\xi_0$  est en fait nécessairement dans l'intérieur  $\text{Int}(\Omega)$  de  $\Omega$ .

Posons alors la définition suivante :

$$\Omega_t = \{ \xi_0 \in \mathcal{C} : \mathcal{A}(\xi_0, t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \}$$

ainsi par définition :

$$\Omega = \bigcap_{t \geq 0} \Omega_t$$

Par hypothèse de  $\mathcal{K}$ -contrôlabilité, en prenant  $\xi_0$  comme condition initiale, et pour  $\mathcal{K}$  un compact quelconque de  $\mathcal{C}$ , on peut trouver un voisinage  $\mathcal{O} \cap \mathcal{C}$  de  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}$  et un  $t^* \geq 0$  tels que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}(\xi, t)$  pour tout  $\xi \in \mathcal{O} \cap \mathcal{C}$  et tout  $t \geq t^*$ , et donc

$$\forall \xi \in \mathcal{O} \cap \mathcal{C} \quad \forall t \geq t^* \quad \mathcal{A}_\xi(t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$$

Soit finalement :

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{C} \subset \bigcap_{t \geq t^*} \Omega_t$$

Comme  $\xi_0 \in \text{Int}(C)$ , il existe un voisinage  $\mathcal{B}$  de  $\xi_0$  inclus dans  $\mathcal{C}$ , et le lemme de continuité 2.2 appliqué en  $(\xi_1, t) = (\xi_0, 0) \in \mathcal{A}(\xi_0, 0)$  nous fournit un voisinage  $\mathcal{O}' \cap \mathcal{C}$  de  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}$ , et un  $t_* > 0$  tel que :

$$\forall \xi \in \mathcal{O}' \cap \mathcal{C} \quad \forall t \in [0, t_*] \quad \mathcal{A}_\xi(t) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$$

Soit par définition :

$$\mathcal{O}' \cap \mathcal{C} \subset \bigcap_{t \in [0, t_*]} \Omega_t$$

D'où finalement :

$$\xi_0 \in \mathcal{O}' \cap \Omega \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \left( \bigcap_{t \in [t_*, t^*]} \Omega_t \right) \cap \mathcal{O} \subset \Omega$$

et il suffit de montrer que  $\xi_0$  est dans l'intérieur  $\text{Int}(\Omega^*)$  de  $\Omega^*$ , où l'on a posé  $\Omega^* = \bigcap_{t \in [t_*, t^*]} \Omega_t$ .

Fixons maintenant  $t \in [t_*, t^*]$  et prenons  $\xi_1 \in \text{Int}(\mathcal{A}(\xi_0, t) \cap \mathcal{C})$  (non vide par hypothèse). Pour  $\mathcal{V}$  un voisinage dans  $\mathbb{R}^n$  de  $\xi_1$  inclus dans  $\mathcal{A}(\xi_0, t) \cap \mathcal{C}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{W}_t \cap \mathcal{C}$  de  $\xi_0$  dans  $\mathcal{C}$  et un voisinage  $\mathcal{I}_t$  de  $t$  dans  $[t_*, t^*]$ , tels que :

$$\forall \xi \in \mathcal{W}_t \cap \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathcal{I}_t \quad \mathcal{A}_\xi(s) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$$

C'est à dire :

$$\mathcal{W}_t \cap \mathcal{C} \subset \bigcap_{s \in \mathcal{I}_t} \Omega_s$$

c'est encore une fois l'application du lemme de continuité 2.2.

Notons  $\tilde{\Omega}_t = \bigcap_{s \in \mathcal{I}_t} \Omega_s$ , on vient alors de montrer que  $\xi_0 \in \text{Int}(\tilde{\Omega}_t)$ . Partant alors de

$$\bigcap_{t \in [t_*, t^*]} \Omega_t = \bigcap_{t \in [t_*, t^*]} \tilde{\Omega}_t$$

la compacité de  $[t_*, t^*]$  nous permet d'écrire

$$\Omega^* = \tilde{\Omega}_{t_1} \cap \dots \cap \tilde{\Omega}_{t_n}$$

D'où finalement la conclusion :

$$\xi_0 \in \text{Int}(\Omega^*) = \text{Int}(\tilde{\Omega}_{t_1}) \cap \dots \cap \text{Int}(\tilde{\Omega}_{t_n}) \quad \square$$

On peut maintenant décrire la situation géométrique à cet instant  $T$  encore plus précisément. On introduit d'abord quelques lemmes, puis on en fera la synthèse dans un grand théorème. Le lecteur non intéressé par le détail des preuves pourra directement aller à l'énoncé du théorème.

**Lemme 3.2.** *Soit  $C$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$ , alors :*

- (i) *Si  $x_0$  un point intérieur à  $C$ , et  $x$  adhérent à  $C$ , alors tout point  $y$  du segment  $[x_0, x[$  est intérieur à  $C$ .*
- (ii) *Si  $C$  est d'intérieur non vide, alors son intérieur est convexe; de plus  $\text{Int}(\overline{C}) = \text{Int}(C)$  et  $\overline{\text{Int}(C)} = \overline{C}$ .*

**Preuve.** Voir par exemple [4] chapitre 1.  $\square$

**Lemme 3.3.** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes de  $\mathbb{R}^n$ , d'intérieur non vide, tels que  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , mais  $\text{Int}(C_1 \cap C_2) = \emptyset$ . Alors  $C_1 \cap C_2 = \partial C_1 \cap \partial C_2$ .*

**Preuve.** Soit donc  $x \in C_1 \cap C_2$ , alors  $x \notin \text{Int}(C_1)$  par exemple (on rappelle que  $\text{Int}(C_1 \cap C_2) = \text{Int}(C_1) \cap \text{Int}(C_2)$ ), et par définition  $x \in \partial C_1$ . Supposons donc que  $x \notin \partial C_2$ , soit encore que  $x \in \text{Int}(C_2)$ . On peut alors trouver une boule ouverte  $B(x, \epsilon) \subset C_2$ .

Mais  $x$  est supposé être adhérent à  $C_1$ , et donc aussi à  $\text{Int}(C_1)$  d'après le point (ii) du lemme précédent ( $C_1$  est supposé d'intérieur non vide). On peut alors trouver  $y \in \text{Int}(C_1) \cap B(x, \epsilon)$ , et le (i) du lemme précédent nous permet d'affirmer que tout  $z \in [y, x[$  est intérieur à  $C_1$ .

Mais par construction, un tel  $z$  est intérieur à  $C_2$ , d'où la contradiction.  $\square$

**Lemme 3.4 (Intersection).** *Soit  $\mathcal{C}$  une cible dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{A}$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  d'intérieur non vide, tels que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$  est non-vide mais est d'intérieur vide, alors  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{C}$ .*

**Preuve.** Soit  $\xi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ . Là encore, comme  $\text{Int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) = \text{Int}(\mathcal{A}) \cap \text{Int}(\mathcal{C})$ ,  $\xi$  ne peut pas appartenir aux deux intérieurs, et appartient nécessairement à l'une des frontières. Traitons les deux cas, et montrons que l'on obtient toujours le résultat annoncé.

- $\xi \in \partial \mathcal{A}$  : Supposons alors que  $\xi \in \text{Int}(\mathcal{C})$ . On peut alors trouver une boule  $B = B(\xi, \epsilon) \subset \text{Int}(\mathcal{C})$ , mais cette boule est alors convexe, d'intérieur non

vide, et vérifie  $B \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$  et  $\text{Int}(B \cap \mathcal{A}) = \emptyset$ . Il vient alors du lemme 3.3 que  $B \cap \mathcal{A} = \partial B \cap \partial \mathcal{A}$ , ce qui est absurde puisque  $\xi \notin \partial B$ .

- $\xi \in \partial \mathcal{C}$  : Supposons cette fois ci que  $\xi \in \text{Int}(\mathcal{A})$  et prenons une boule  $B = B(\xi, \epsilon) \subset \text{Int}(\mathcal{A})$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une cible et que  $\xi \in \partial \mathcal{C}$ ,  $\xi$  est en fait adhérent à  $\text{Int}(\mathcal{C})$ , et il existe  $\xi_1 \in B \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \subset \text{Int}(\mathcal{A}) \cap \text{Int}(\mathcal{C})$ , ce qui absurde la encore.  $\square$

**Lemme 3.5 (Tangence).** *Soit  $\mathcal{C}$  une cible dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{A}$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose de plus que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \partial \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{C}$ . Alors si  $\xi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ , le plan tangent  $T_\xi \mathcal{C}$  (vu comme sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$ ) n'intersecte  $\mathcal{A}$  que sur son bord. En particulier, si  $\mathcal{A}$  est strictement convexe, ce plan sépare tout  $\xi \in \partial \mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$  au sens large.*

**Preuve.** Supposons le contraire. Il existe alors  $v \in T_\xi \mathcal{C}$  tel que  $\xi + v \in \text{Int}(\mathcal{A})$ . Soit alors une boule  $B(\xi + v, \rho) \subset \text{Int}(\mathcal{A})$ . Le lemme 3.2 nous permet d'affirmer alors que le cône pointé de sommet  $\xi$  et de base  $B(\xi + v, \rho)$  est intérieur à  $\mathcal{A}$ .

Soit alors maintenant  $\gamma : ]-\alpha, \alpha[ \rightarrow \mathcal{C}$  une courbe de  $\mathcal{C}$  correspondant à  $v$ , c'est à dire que l'on a :

$$\begin{cases} \gamma(0) &= \xi \\ \dot{\gamma}(0) &= v \end{cases}$$

En partant de  $\gamma(t) = \xi + tv + o(t)$  soit encore  $\|\gamma(t) - (\xi + tv)\| = o(t)$ , on obtient finalement que :

$$\|\gamma(t) - (\xi + tv)\| < \rho t \quad \text{pour } t \text{ positif } \ll 1$$

Et la courbe est dans le cône pointé, et donc dans l'intérieur de  $\mathcal{A}$ , pour  $t$  suffisamment petit non nul. Mais cela contredit alors que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \partial \mathcal{C} \cap \partial \mathcal{A}$ .  $\square$

**Lemme 3.6 (Tangence des vitesses).** *Considérons un système linéaire autonome*

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t)$$

*où les contrôles sont à valeurs dans une boule compacte  $B$  de  $\mathbb{R}^m$ . Soit alors  $\mathcal{C}$  une cible dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $\xi_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$  tel que*

$$\forall t \geq 0 \quad \mathcal{A}(\xi_0, t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \tag{17}$$



Supposons qu'il existe  $T > 0$  tel que

$$\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \mathcal{C} = \partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \partial\mathcal{C} \quad (18)$$

Alors il existe une trajectoire  $\xi^*(t)$  partant de  $\xi_0$ , telle que  $\xi^*(T) \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \partial\mathcal{C}$ , et qui vérifie

$$\dot{\xi}^*(T) \perp T_{\xi(T)}\mathcal{C} \quad (19)$$

**Preuve.** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\mathcal{C}$  est globalement définie par  $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \leq 0\}$ , où  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière telle que  $d\phi$  ne s'annule pas sur le bord de  $\mathcal{C}$ . En effet, pour la preuve, on pourra toujours se restreindre pour chaque  $\xi \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, T)$ , à un voisinage où cette propriété est vérifiée.

Procédons alors par l'absurde et supposons que toutes les trajectoires arrivant dans  $\partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \partial\mathcal{C}$  ont des vitesses transverses. On va alors montrer que les points de  $\partial\mathcal{A}(\xi_0, T)$  se décollent tous de  $\mathcal{C}$  pour un certain  $T'$ . Les  $\mathcal{A}(\xi_0, t)$  étant convexes, ceci contredira (17) et achèvera la preuve.

Définissons le champ de vecteur suivant (sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ) :

$$f(\xi, v) = A\xi + Bv \quad (20)$$

Prenons  $\xi \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \partial\mathcal{C}$ . Par définition,  $\xi = \xi(T)$  pour une certaine extrémale  $\xi(\cdot)$  associée au contrôle  $u(\cdot)$ . Comme  $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), u(t))$ , et que  $T_\xi\mathcal{C} = \ker d\phi(\xi)$ , l'hypothèse de transversalité s'écrit :

$$\langle d\phi(\xi(T)), f(\xi(T), u(T)) \rangle > 0 \quad (21)$$

Soit maintenant  $p(\cdot)$  un vecteur co-tangent associé à  $\xi$ , tel que

$$p(T) = -d\phi(\xi(T)) \quad (22)$$

C'est en effet possible puisque,  $\mathcal{A}(\xi_0, T)$  étant strictement convexe ( $B$  est strictement convexe) et vérifiant (18), le lemme précédant nous assure que  $T_{\xi(T)}\mathcal{C}$  sépare  $\xi(T)$  et  $\mathcal{A}(\xi_0, T)$  au sens large. La remarque suivant le théorème 2.1 permet alors de conclure.

L'application du Principe du Maximum donne alors ici

$$\min_{v \in \mathcal{B}} \langle d\phi(\xi(T)), f(\xi(T), v) \rangle = \langle d\phi(\xi(T)), f(\xi(T), u(T)) \rangle > 0 \quad (23)$$

Posant alors  $\mathcal{F}(\xi', v) = \langle d\phi(\xi'), f(\xi', v) \rangle$ ,  $\mathcal{F}$  est continue, et sur un voisinage  $\mathcal{V}$  compact de  $\xi$  ( $\mathcal{V} \times B$  étant alors aussi compact), et il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \xi' \in \mathcal{V} \quad \forall v \in B \quad \mathcal{F}(\xi', v) = \langle d\phi(\xi'), f(\xi', v) \rangle > \alpha \quad (24)$$

Il existe donc un temps  $T' = T + \epsilon$  pour lequel toutes les trajectoires arrivant dans ce voisinage au temps  $T$ , soient hors de  $\mathcal{C}$  au temps  $T'$ .

Prenons maintenant  $\xi \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \setminus \mathcal{C}$ . Ici encore,  $\xi = \xi(T)$  pour une certaine extrémale associée à un contrôle  $u$ . Comme  $\mathcal{C}$  est fermé,  $d(\xi, \mathcal{C}) > 0$ , soit encore  $\phi(\xi) > 0$ , et il existe un  $\beta > 0$  et un voisinage compact  $\mathcal{W}$  de  $\xi$  tel que

$$\phi(\xi') > \beta \quad \forall \xi' \in \mathcal{W}$$

Ainsi, il existe un temps  $T'' = T + \epsilon$  pour lesquels les trajectoires arrivant dans ce voisinage ne rentre pas dans  $\mathcal{C}$ .

On peut finalement recouvrir le compact  $\partial\mathcal{A}(\xi_0, T)$  par un nombre fini de voisinages  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$  et  $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_s$  tels que :

- Les éléments de  $\mathcal{V}_i$  se décollent de  $\mathcal{C}$  au moins jusqu'au temps  $T + \epsilon_i$ .
- Les éléments de  $\mathcal{W}_i$  restent hors de  $\mathcal{C}$  au moins jusqu'au temps  $T + \epsilon_i$ .

Il suffit alors de poser  $\epsilon = \min\{\epsilon_i, \varepsilon_i\}$ , et de remarquer que  $\partial\mathcal{A}(\xi_0, T + \epsilon)$  est obtenu en partant de  $\partial\mathcal{A}(\xi_0, T)$  et en suivant des bouts d'extrémales. Comme on a montré que  $\partial\mathcal{A}(\xi_0, T + \epsilon) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ , et comme  $\mathcal{A}(\xi_0, T + \epsilon)$  est un convexe d'intérieur non vide, on obtient finalement la contradiction :

$$\mathcal{A}(\xi_0, T + \epsilon) \cap \mathcal{C} = \emptyset \quad (25)$$

### 3.2 Théorème fondamental

**Théorème 3.1 (Fondamental).** *Soit  $(\Sigma)$  un système  $\mathcal{K}$ -contrôlable et  $\xi_0 \in \partial\Omega \cap \text{Int}(\mathcal{C})$ , où  $\mathcal{C}$  est une cible de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe  $T > 0$ ,  $u \in \mathcal{U}_\epsilon(\mathbb{R}^m)$ ,  $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continues, tels que*

(i)  $\xi$ ,  $u$  et  $p$  sont solution des équations suivantes :

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t) \quad (26)$$

$$\xi(0) = \xi_0 \quad (27)$$

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t) \quad (28)$$

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{\|v\| \leq \epsilon} p(t)B(t)v \quad \text{pour presque tout } t \quad (29)$$

(ii) La trajectoire  $\xi$  arrive sur le bord de  $\mathcal{C}$  au temps  $T$  :

$$\xi(T) \in \partial\mathcal{C} \quad (30)$$

(iii) Le vecteur adjoint  $p(T)$  (c.f. principe du maximum 2.1) annule le plan tangent  $T_{\xi(T)}\mathcal{C}$  :

$$\langle p(T) \mid v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_{\xi(T)}\mathcal{C} \quad (31)$$

(iv) La trajectoire  $\xi$  arrive dans  $\partial\mathcal{C}$  avec une vitesse tangente à  $\partial\mathcal{C}$  :

$$\langle p(T) \mid A(T)\xi(T) + B(T)u(T) \rangle = 0 \quad (32)$$

**Preuve.** Comme  $\xi_0 \in \partial\Omega \cap \text{Int}(\mathcal{C})$ , il existe  $T > 0$  tel que  $\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \mathcal{C}$  est non vide mais d'intérieur vide. Par hypothèse de  $\mathcal{K}$ -contrôlabilité,  $\mathcal{A}(\xi_0, T)$  est un convexe d'intérieur non vide, et le lemme 3.4 implique que

$$\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \mathcal{C} = \partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \partial\mathcal{C} \quad (33)$$

On utilise alors le lemme 3.5 et la stricte convexité de  $\mathcal{A}(\xi_0, T)$  (lemme 2.1) pour obtenir que pour tout  $\xi \in \partial\mathcal{A}(\xi_0, T) \cap \partial\Omega$ , l'espace tangent  $T_{\xi}\mathcal{C}$  sépare  $\xi$  et  $\mathcal{A}(\xi_0, T)$  au sens large. Le principe du maximum démontre alors l'existence de couples  $(\xi(\cdot), p(\cdot))$  avec les propriétés annoncées (i), (ii) et (iii). Il reste à voir que parmi ces trajectoires, il en existe au moins une qui vérifie (iv), comme le montre le lemme 3.6.  $\square$

## 4 Le double intégrateur dans le disque de $\mathbb{R}^2$

Dans cette section, l'utilisation du théorème fondamental va nous permettre de résoudre très facilement notre problème de calcul de noyau de viabilité dans le cas d'une particule ponctuelle se déplaçant dans un disque de  $\mathbb{R}^2$  et contrôlée en accélération. Ce résultat constitue une première étape dans la résolution et la compréhension de notre problème complexe.

### 4.1 Le principe du maximum

On revient donc dans cette section à notre système de départ  $\ddot{x} = u$  dans  $\mathbb{R}^2$ , ou plus précisément :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad \|u\| \leq \epsilon \quad (34)$$

et on prend

$$\mathcal{C} = \overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2 \quad (35)$$

où  $\overline{\mathbb{D}}_\rho$  est le disque  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \rho\}$ . Il est évident que  $\mathcal{C}$  est une cible lisse. En fait, on peut se restreindre à la cible compacte  $\overline{\mathbb{D}}_\rho \times P$ , où  $P$  est un pavé compact de  $\mathbb{R}^2$  suffisamment grand. En effet un point tel que  $v^2 > 2\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon$ , par exemple, ne peut jamais être viable pour  $\overline{\mathbb{D}}_\rho$ , et il est donc inutile de considérer des vitesses arbitrairement grandes.

Le système (34) vérifie les conditions de contrôlabilité de Kalman, et on peut montrer que l'hypothèse de  $\mathcal{K}$ -contrôlabilité est bien vérifiée.

Gardant alors les mêmes notations que dans la section précédentes, et prenant  $\xi_0 \in \partial\Omega \cap \text{Int}(\mathcal{C})$ , on sait d'après le théorème fondamental qu'il existe  $T > 0$ ,  $u \in \mathcal{U}_\epsilon(\mathbb{R}^m)$ ,  $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continues, tels que dans l'énoncé du théorème.

L'équation différentielle sur  $p$  est ici

$$\dot{p}(t) = -p(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

et fournit comme solutions  $p(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & q_2(t) & p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix}$  :

$$p(t) = \begin{pmatrix} q_1(0) & q_2(0) & p_1(0) - tq_1(0) & p_2(0) - tq_2(0) \end{pmatrix} \quad (37)$$

Comme  $p(T)$  annule  $T_{\xi(t)}\overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2$ , on obtient immédiatement que  $p_1(T) = p_2(T) = 0$ , soit encore :

$$p(t) = \begin{pmatrix} q_1(0) & q_2(0) & (T-t)q_1(0) & (T-t)q_2(0) \end{pmatrix} \quad (38)$$

Le principe du maximum s'écrit ici

$$\begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \max_{\|v\| \leq \epsilon} \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix} v \quad (39)$$

et cela revient à dire que  $u$  est colinéaire à  $\begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix}$  et de norme  $\epsilon$ , soit

$$u = \frac{\epsilon}{\sqrt{q_1(0)^2 + q_2(0)^2}} \begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix} \quad (40)$$

et ces extrémales sont donc des **paraboles**.

Enfin, la propriété (iv) du théorème fondamental nous permet alors d'affirmer que l'une de ces trajectoires arrive sur le bord de  $\mathcal{C}$  de manière tangente. En résumé, on a le résultat suivant :

**Théorème 4.1 (Paraboles).** *Considérons le système (34) et la cible*

$$\mathcal{C} = \overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2$$

où  $\overline{\mathbb{D}}_\rho$  est le disque  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \rho\}$ , et posons encore

$$\Omega = \{\xi_0 \in \overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2 : \forall t \geq 0 \mathcal{A}(\xi_0, t) \cap (\overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2) \neq \emptyset\}$$

Alors si  $\xi_0 = (x_0, v_0) \in \partial\Omega \cap \text{Int}(\overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2)$ , il existe une parabole de  $\mathbb{R}^2$  partant de  $x_0$ , arrivant de manière tangente dans  $\partial\overline{\mathbb{D}}_\rho$ , et dont l'accélération constante est de module  $\epsilon$ .

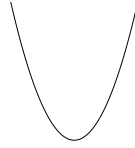


FIG. 5 – Parabole tangente

Maintenant, il est clair que de tels  $\xi_0$  sont viables dans le disque. En effet, une fois la parabole suivie jusqu'au sommet, la vitesse est suffisamment faible pour entamer la suite de la parabole tout en respectant la contrainte sur l'accélération. Rester sur le bord du disque, par exemple, est alors aussi une suite admissible pour la trajectoire, et  $\xi_0$  est bien viable.

Finalement, comme  $\mathcal{C}$  est convexe et que les contrôles sont à valeur dans un convexe, il est clair que  $\text{Viab}(\mathcal{C})$  est **convexe**. Comme de plus  $\text{Viab}(\mathcal{C}) \subset \Omega$  et  $\partial\Omega \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \subset \text{Viab}(\mathcal{C})$ , on aboutit au corollaire suivant :

**Corollaire 4.1.** *Soient  $\mathcal{C} = \overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2$  et  $\Omega$  comme dans le théorème précédent, où les contrôles sont à valeurs dans un convexe, alors*

$$\Omega \cap \text{Int}(\mathcal{C}) = \text{Viab}(\mathcal{C}) \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \quad (41)$$

$$\text{et } \partial\Omega \cap \text{Int}(\mathcal{C}) = \partial\text{Viab}(\mathcal{C}) \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \quad (42)$$

Pour étudier la viabilité d'un point **dans ce cas particulier** (i.e. pour les  $\overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2$ ), on est donc amené à étudier un problème géométrique faisant intervenir des paraboles et des cercles dans  $\mathbb{R}^2$ . L'objet de la section qui suit est donc d'étudier ce problème.

## 4.2 Étude des paraboles

Considérons la famille de paraboles  $\mathcal{P}(x_0, \lambda, \phi, \theta)$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{P}(x_0, \lambda, \phi, \theta) : \begin{cases} x(t) = x_0 + \lambda \cos(\phi)t + \frac{1}{2}\epsilon \cos(\theta)t^2 \\ y(t) = \lambda \sin(\phi)t + \frac{1}{2}\epsilon \sin(\theta)t^2 \end{cases} \quad (43)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre fixé au départ. Cette famille ne contient pas toutes les paraboles accélérées à  $\epsilon$ , mais on peut toujours se ramener à une parabole de la forme  $\mathcal{P}(x_0, \lambda, \phi, \theta)$  en effectuant une rotation convenable. On considère aussi la famille  $\mathcal{C}(r)$  des cercles de rayon  $r$  et de centre l'origine  $(0, 0)$ .

On se pose alors les questions suivantes : à quelles conditions sur les paramètres, la parabole  $\mathcal{P}(x_0, \lambda, \phi, \theta)$  coupe-t-elle le cercle  $\mathcal{C}(r)$  en lui étant tangente en ce point d'intersection ? À parabole fixée, quels sont les  $r$  qui conviennent ? Qu'en est-il de  $\theta$  si on fixe  $r, x_0, \lambda$  et  $\phi$  cette fois ?

En effectuant la rotation d'angle  $-\theta$  et de centre  $(0, 0)$ , la parabole  $\mathcal{P}(x_0, \lambda, \phi, \theta)$  s'écrit dans ce repère :

$$\mathcal{P}'(x_0, \lambda, \phi, \theta) : \begin{cases} X(t) = \cos(\theta)x_0 + \lambda \cos(\theta - \phi)t + \frac{1}{2}\epsilon t^2 \\ Y(t) = -\sin(\theta)x_0 - \lambda \sin(\theta - \phi)t \end{cases} \quad (44)$$

En réécrivant

$$t = \frac{Y(t) + \sin(\theta)x_0}{\lambda \sin(\phi - \theta)} \quad (45)$$

on obtient que :

$$X(t) = \frac{\epsilon}{2\lambda^2 \sin(\theta - \phi)^2} \left( Y(t) + \left( x_0 \sin(\theta) - \frac{\lambda^2}{2\epsilon} \sin(2(\theta - \phi)) \right) \right)^2 + \cos(\theta)x_0 - \frac{\lambda^2 \cos(\theta - \phi)^2}{2\epsilon} \quad (46)$$

Ainsi, l'axe de la parabole a pour direction le vecteur  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , et cet axe passe par l'origine  $(0, 0)$  si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$(E) : x_0 \sin(\theta) - \frac{\lambda^2}{2\epsilon} \sin(2(\theta - \phi)) = 0 \quad (47)$$

Dans ce cas, la distance entre le sommet de la parabole et l'origine, soit encore le rayon du cercle auquel la parabole est tangente, étant alors :

$$r(x_0, \lambda, \phi, \theta) = \left| \cos(\theta)x_0 - \frac{\lambda^2 \cos(\theta - \phi)^2}{2\epsilon} \right| \quad (48)$$

Notons enfin  $T(x_0, \lambda, \phi, \theta)$  l'instant  $t$  pour lequel le point  $(x(t), y(t))$  est au sommet de la parabole. à cet instant, la vitesse et l'axe de la parabole sont orthogonaux :

$$\cos(\theta)(\lambda \cos(\phi) + \epsilon \cos(\theta)t) + \sin(\theta)(\lambda \sin(\phi) + \epsilon \sin(\theta)t) = 0$$

D'où finalement

$$T(x_0, \lambda, \phi, \theta) = -\frac{\lambda}{\epsilon} \cos(\theta - \phi) \quad (49)$$

### 4.3 Critère de viabilité

L'utilisation combinée du théorème fondamental 3.1 et de l'étude précédente sur les paraboles, nous permet maintenant d'énoncer notre premier résultat de viabilité :

**Théorème 4.2.** *Considérons le double intégrateur (34). Notons  $\mathcal{C} = \overline{\mathbb{D}}_\rho \times \mathbb{R}^2$ , et fixons  $\xi_0 = ((x_0, 0), (\lambda \cos(\phi), \lambda \sin(\phi))) \in \mathcal{C}$  (où  $\lambda > 0$ ).*

*Posons alors les définitions suivantes :*

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : x_0 \sin(\theta) - \frac{\lambda^2}{2\epsilon} \sin(2(\theta - \phi)) = 0 \right\} \quad (50)$$

$$r(\theta) = \cos(\theta)x_0 - \frac{\lambda^2 \cos(\theta - \phi)^2}{2\epsilon} \quad (51)$$

$$T(\theta) = -\frac{\lambda}{\epsilon} \cos(\theta - \phi) \quad (52)$$

*On a alors les résultats suivants :*

- (i) *Si  $x_0 = \rho$  et  $\phi < \frac{\pi}{2}$ , alors  $\xi_0$  n'est pas viable dans  $\mathcal{C}$ .*
- (ii) *Si  $x_0 = \rho$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , alors  $\xi_0$  est viable ssi  $\lambda^2 \leq \rho\epsilon$*
- (iii) *Si  $x_0 < \rho$  ou  $\phi > \frac{\pi}{2}$ , alors  $\xi_0$  est viable ssi pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $T(\theta) \geq 0$  implique  $r(\theta) \leq \rho$ .*



**Preuve.**

(i) Trivial.

(ii) Pour  $x_0 = \rho$ , la condition initiale est sur le bord du cercle de rayon  $\rho$ , et si  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , le module de la vitesse maximal correspond alors au cas où la trajectoire reste indéfiniment sur le bord, et nécessairement :

$$\frac{\lambda_{\max}^2}{\rho} = u_{\max} = \epsilon$$

(iii) Supposons tout d'abord qu'il existe  $\theta \in \Theta$  tel que  $T(\theta) \geq 0$  et  $r(\theta) > 1$ . Soit alors  $u$  un contrôle admissible quelconque et  $\xi(t) = (x(t), v(t))$  la trajectoire associée. Notons alors  $u_\theta(t)$  (resp.  $x_\theta(t)$ ) la projection du vecteur  $u(t)$  (resp.  $x(t)$ ) sur l'axe  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Remarquons que comme  $T(\theta) \geq 0$ , la parabole  $\mathcal{P}(x_0, \lambda, \phi, \theta)$  est parcourue en « freinant ».

La condition  $u_\theta(t) \geq -\epsilon$ , soit encore  $\ddot{x}_\theta \geq -\epsilon$ , se traduit après intégration en

$$x_\theta(t) \geq x_\theta(0) + tx_\theta(0) - \epsilon \frac{t^2}{2} \quad (53)$$

Ainsi,  $x_\theta(T(\theta)) \geq r(\theta) > \rho$ , et la trajectoire sort du cercle en temps fini. Le contrôle  $u$  étant quelconque,  $\xi_0$  n'est pas viable.

Supposons maintenant que  $\xi_0$  ne soit pas viable. Posons tout d'abord

$$r_* = \inf \{r \geq 0 : \xi_0 \text{ viable dans } \overline{\mathbb{D}}_r \times \mathbb{R}^2\} \quad (54)$$

alors  $r_*$  est bien défini comme inf d'une partie minorée et non vide de  $\mathbb{R}$  (on peut toujours freiner jusqu'à atteindre une vitesse nulle en temps fini,  $\xi_0$  est alors viable dans tout disque contenant ce point d'arrivée).

Montrons que  $\xi_0 = (x_0, v_0)$  est viable dans  $\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2$ . Soit donc  $\epsilon > 0$ , et  $u$  un contrôle admissible viable dans  $\overline{\mathbb{D}}_{r_*+\epsilon} \times \mathbb{R}^2$  en partant de  $\xi_0$ . Pour  $\lambda \in [0, 1]$ , la trajectoire partant de  $(x_0, \lambda v_0)$  et contrôlée par  $\lambda u$  (admissible aussi) vérifie par définition du système :

$$y(t) - x_0 = \lambda \left( v_0 t + \int_0^t (t-s)u(s)ds \right) = \lambda (x(t) - x(0)) \quad (55)$$

Ainsi, pour  $\lambda(\epsilon) = \frac{d(x_0, \overline{\mathbb{D}}_{r_*})}{d(x_0, \overline{\mathbb{D}}_{r_*+\epsilon})}$ , le point  $(x_0, \lambda(\epsilon)v_0)$  est viable dans  $\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2$ , et comme  $(x_0, \lambda(\epsilon)v_0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (x_0, v_0)$ , le corollaire 2.4 permet de conclure.

On obtient aussi du même coup que

$$r_* > \rho \quad (56)$$

Remarquons ensuite que  $\xi_0$  est alors sur le bord de  $Viab(\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2)$ . En effet, un argument similaire au précédent et la définition de l'inf montrent qu'il ne peut pas y avoir de point  $(x_0, \lambda v_0)$  avec  $\lambda > 1$  viable, et donc pas de voisinage viable.

Finalement, comme  $\xi_0 \in \partial Viab(\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2) \cap \text{Int}(\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2)$ , on a, suite au corollaire 4.1, que

$$\xi_0 \in \partial \Omega_{r_*} \cap \text{Int}(\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2) \quad (57)$$

où l'on a bien sur posé

$$\Omega_{r_*} = \{ \xi \in \overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2 : \forall t \geq 0 \mathcal{A}(\xi, t) \cap (\overline{\mathbb{D}}_{r_*} \times \mathbb{R}^2) \neq \emptyset \} \quad (58)$$

Le théorème fondamental 3.1 permet de montrer l'existence de la parabole recherchée.  $\square$

**Remarque :** Notons en fait que, pour une condition initiale donnée, il n'existe qu'un **nombre fini de paraboles** partant tangentes en ce point et arrivant tangente à un cercle centré en 0 (bien sûr, l'accélération est fixée une fois pour toutes). En effet, l'équation sur  $\theta$  devient, après réécriture, polynomiale de degré 4 en  $\tan \frac{\theta}{2}$ .

Les tracés qui suivent illustrent ce phénomène et montrent les paraboles obtenues pour un point viable qui ne le reste plus lorsque l'on augmente trop le module de sa vitesse.

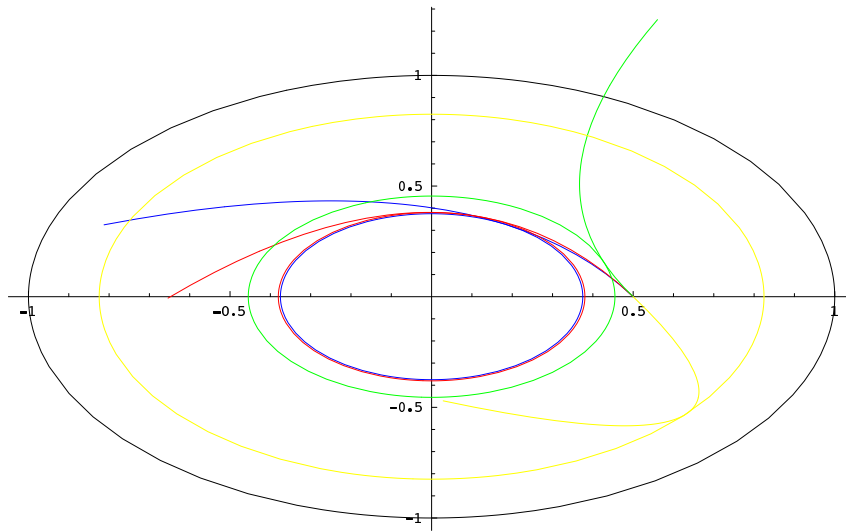


FIG. 6 – Viable :  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\phi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\epsilon = 1$  et  $\rho = 1$

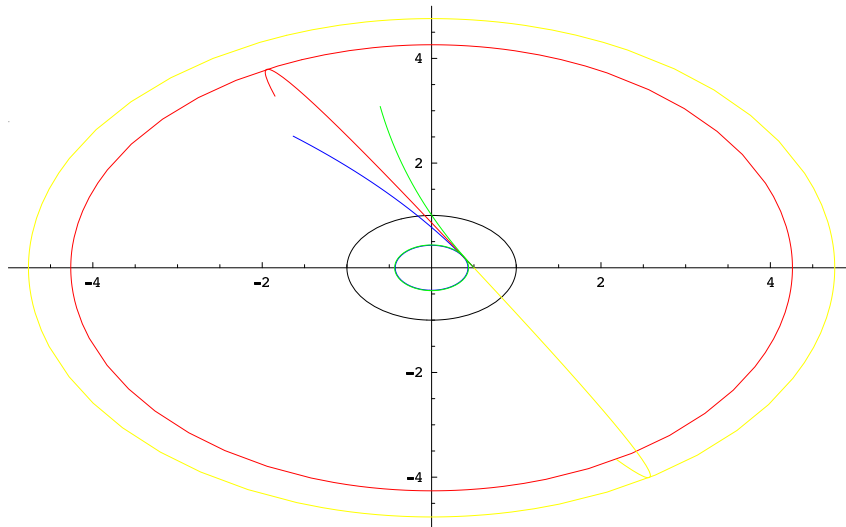


FIG. 7 – Non viable :  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\phi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\epsilon = 1$  et  $\rho = 1$

## Références

- [1] A. A. Agrachev and Yu. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag, 2004.
- [2] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser, 1991.
- [3] Haïm Brézis. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson, 1992.
- [4] Sylvie Delabrière and Yves Raynaud. *Analyse Convexe, cours polycopié*. Université Paris VI, 2000.
- [5] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory : Deterministic finite dimensional systems*. Springer, 1998.
- [6] Emmanuel Trélat. *Contrôle Optimal : Théorie et Applications*. Vuibert, 2005.
- [7] Jerzy Zabcyk. *Mathematical Control Theory : An Introduction*. Birkhäuser, 1992.



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399