Résolution de contraintes géométriques : des systèmes experts aux méthodes numériques

Pascal Schreck

Résolution de contraintes géométriques : des systèmes experts aux méthodes numériques

Pascal Schreck
LSIIT - Université Louis Pasteur
UMR CNRS-ULP 7005
Pôle API, Bd Sébastien Brant,
BP 10413
67412 Illkirch CEDEX
schreck@dpt-info.u-strasbg.fr

Résumé

La résolution de contraintes géométriques s'inscrit dans le contexte plus général de la satisfaction de contraintes (CSP), dans un domaine connu depuis l'antiquité et dont la spécificité a conduit à la mise en oeuvre de méthodes particulières. Le but de l'exposé dont je donne ici le résumé consiste à mettre en évidence les particularités des approches classiques et, dans un deuxième temps, à montrer qu'on peut marier des approches reposant sur des systèmes à base de connaissances avec des méthodes numériques traditionnelles.

1 Problématiques

Grossièrement, la résolution de contraintes géométriques consiste à produire une figure géométrique à partir d'une spécification appropriée. Ce problème apparaît dans différents domaines de l'informatique comme, par exemple, la vision par ordinateur, la robotique ou la modélisation de molécules chimiques. Mais, à notre sens, les deux problématiques les plus exemplaires quant aux méthodes utilisées, sont celles sous-tendues d'une part, par la résolution de problèmes de constructions à la règle et au compas et d'autre part, par la spécification d'objets à l'aide d'esquisses cotées comme celles rencontrées en dessin technique.

Ainsi, dans le cas des constructions géométriques, la solution à un problème, posé sous forme d'énoncé littéral, prend la forme d'un *programme de construction* dans un langage où les primitives sont imposées, alors que dans le cadre de la conception assistée par ordinateur (CAO), la production d'un dessin à l'échelle à partir d'une esquisse cotée peut être satisfaite par une figure géométrique numérique qui ressemble à l'esquisse et qui vérifie de manière approchée les dimensions imposées par le système de cotation. De manière assez naturelle, la problématique sous-tendue par les constructions géométriques, à la règle et au compas (ou avec d'autres instruments) se rattache au domaine de la logique et de la preuve constructive de formules $\forall\exists$ tandis que la résolution d'esquisses cotées tire plutôt parti d'outils issus de la recherche opérationnelle.

Cette dichotomie n'est évidemment pas rédhibitoire —la programmation par contraintes est un bon exemple de mariage réussi entre ces deux domaines— et il existe plusieurs méthodes pour faire coopérer des méthodes des deux mondes. Après une présentation des approches proposées dans les deux cas, nous verrons comment des méthodes de décomposition peuvent être mises en jeu pour réaliser cette coopération.

2 Approches

Historiquement, les méthodes où des connaissances géométriques sont utilisées pour construire, mesurer et dessiner sont les plus anciennes puisqu'elles remontent à plus de deux mille ans. En fait, jusqu'à l'avènement de l'ordinateur, elles ont constitué l'essentiel des moyens de « calculer » des solutions géométriques. Les possibilités de calcul offertes par l'ordinateur ont rendu facilement praticables des méthodes numériques, comme celle de Newton-Raphson ou la méthode par continuation, dans le cadre de la CAO. Les méthodes géométriques, qui ont essentiellement été implantées par des systèmes experts, ont été jugées moins efficaces et surtout moins générales que ces dernières.

Quelque soit l'approche utilisée, il est apparu très vite que la possibilité de décomposer des systèmes de contraintes en sous-systèmes était très intéressante, voire cruciale, pour augmenter la vitesse de résolution —pour les méthodes numériques— et surtout pour accroître la puissance de résolution des méthodes géométriques. Nous ne considérons ici que des méthodes de décomposition dites combinatoires où les contraintes sont regroupées en sous-systèmes du système initial et non des méthodes de décompositions algébriques comme la méthode de Ritt-Wu par exemple. Ces méthodes combinatoires ont toutes comme support des graphes (ou des hyper-graphes) de contraintes.

Ainsi, l'une des premières méthodes employées pour décomposer des systèmes d'équations, la décomposition de Dulmage-Mendelson, est basée sur le théorème de König-Hall et utilise un graphe biparti où les sommets correspondent d'une part aux inconnues et d'autre part aux équations du système, et où les arêtes traduisent la relation d'incidence inconnue/équation. Mais cette méthode s'adapte mal à une particularité caractéristique des systèmes de contraintes géométriques issus de la CAO, à savoir l'invariance par déplacements. C'est pourquoi les chercheurs ont étudié des méthodes plus appropriées, plus ou moins issues de la théorie de la rigidité, et exploitant soit des propriétés de connectivité des graphes de contraintes, soit une extension de la propriété de König-Hall (localement, ce qui correspond à de la consistance d'arc, ou globalement en examinant des flux). Il convient de noter que certaines de ces méthodes sont « géométrisables » et, en tout cas, compatibles avec des approches numériques ou formelles.

3 Quasi-décomposition

Les méthodes combinatoires évoquées plus haut font abstraction de la géométrie en ne retenant des inconnues que leur degré de liberté, *i.e.* le nombre de coordonnées, et des contraintes que leur degré de restriction, *i.e.* le nombre d'équations sous-jacentes. Ce faisant, on obtient des méthodes de décomposition qui géométriquement ne sont pas exactes, mais qui font preuve d'une certaine généralité : ces méthodes sont beaucoup utilisées pour décomposer des systèmes de contraintes dans le cadre du plan euclidien. En revanche, il apparaît qu'en dimension 3, les choses se compliquent singulièrement. Tout d'abord, du point de vue de la correction, ces méthodes sont toutes associées à une caractérisation combinatoire de la rigidité structurelle, or si une telle caractérisation résulte du théorème de Laman en dimension 2, on ignore s'il en existe une en dimension 3. Par ailleurs, beaucoup de systèmes de contraintes géométriques simples sont indécomposables avec ces méthodes.

Indépendamment, plusieurs chercheurs ont récemment proposé l'idée de modifier un système de contraintes indécomposable pour le rendre soluble par une méthode formelle, le résultat, sous forme de plan de construction, étant ensuite exploité par une méthode numérique pour retrouver les solutions du problème initial. Une méthode basée sur les caractéristiques combinatoires a été étudiée par Gao *et al.* pour des petits systèmes ne dépassant pas six primitives. Nous avons, quant à nous, travaillé sur une méthode autorisant une modification plus profonde sur de plus gros systèmes de contraintes. Cette méthode utilise conjointement un système à base de connaissances pour produire un programme de construction et la méthode de Newton-Raphson exploitant le programme de construction produit, pour obtenir les solutions du système de contraintes.

4 Conclusion

La résolution de contraintes géométriques a été étudiée principalement suivant deux paradigmes : l'un se rattache à la logique et à la démonstration automatique, l'autre provient de la recherche opérationnelle et privilégie les méthodes numériques. Ces deux points de vue ne sont pas irréconciliables et des approches récentes, qui méritent d'être approfondies, ont fait le lien entre eux en proposant des méthodes mélangeant intimement des ingrédients des deux bords.