Bi-connexité, k-connexité et multipoints relais

Laurent Viennot, Philippe Jacquet

Bi-connexité, k-connexité et multipoints relais

Laurent Viennot[1] et Philippe Jacquet[1]

[1] *INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay. Travail supporté par Sagem.*

Les multipoints relais ont été introduits pour optimiser l'inondation dans un réseau ad hoc. Ils servent aussi, dans le protocole OLSR, à déterminer une sous-topologie qui conserve les plus courts chemin. Nous montrons, comment une généralisation des multipoints relais permet d'obtenir une sous-topologie conservant des propriétés de bi-connexité et plus généralement de k-connexité. Nous montrons de plus, que cette structure de multipoints relais est intrinsèque à toute sous-topologie montrant les mêmes propriétés.

Keywords: ad hoc, bi-connexité, k-connexité, multipoints relais, OLSR

1 Introduction

Pour que tout nœud d'un réseau puisse communiquer avec tout autre, il est nécessaire que le graphe des liens du réseau soit connexe. Si le réseau est k-connexe, il conserve cette propriété quand $k-1$ nœuds tombent en panne. Conserver cette propriété dans un protocole à état de lien qui n'utilise qu'une partie des liens du réseau devient donc intéressant pour résister aux pannes d'autant plus qu'il s'agit d'un environnement dynamique comme un réseau ad hoc.

Nous allons montrer que le protocole OLSR [CeA+03], lorsqu'il est paramétré avec couverture de multipoints relais de k, conserve cette propriété de connexité en cas de défaillance de $k-1$ nœuds. L'utilisation des multipoints relais comme sous-topologie dans le protocole OLSR permet de garantir l'utilisation de plus courts chemins. Nous montrons comment ils permettent de plus de garantir l'existence de k chemins disjoints quand le réseau le permet.

Des résultats proches étudient comment contrôler la puissance des nœuds pour obtenir la k-connexité [LLM+05, KP03, JO02]. Nous étudions ici quels liens conserver d'une topologie donnée pour conserver la k-connexité.

2 Graphe de connexion et k-connexité

L'ensemble des connexions possibles d'un réseau peut-être modélisé par un graphe $G=(V,E)$ où les sommets $u \in V$ sont les nœuds du réseau et où une arête $uv \in E$ est présente dans le graphe si u et v peuvent communiquer. Dans le cas d'OLSR, E sera constitué des liens uv établis comme symétriques : u entend les HELLOs de v et réciproquement. Quand une arête uv est présente, on dit que u et v sont *voisins*. Par analogie avec les connexions radio, on dira de manière équivalente que *u couvre v* (ou que v couvre u). On notera $N(u)$ l'ensemble des voisins de u (en excluant u : $u \notin N(u)$). Par extension, pour un ensemble A de sommets, on notera $N(A)$ l'ensemble des voisins d'un sommet de A qui ne sont pas dans A ($N(A)=\{v | v \notin A$ et il existe $u \in A$ tel que $uv \in E\}$). $N(N(u))$ désigne ainsi l'ensemble des *voisins à deux sauts* de u.

On appellera *chemin* une suite $u_0,\ldots,u_n$ de sommets telle que $u_{i-1}u_i \in E$ pour tout $1 \le i \le n$. On dit alors que le chemin *relie* u_0 à u_n et qu'il *passe* par les sommets $u_0,\ldots,u_n$. Le nombre n d'arêtes du chemin est appelé sa *longueur*. Un chemin est dit *simple* s'il passe au plus une fois par chacun de ses sommets. Un graphe est dit *connexe* quand toute paire de sommets peut-être reliée par un chemin. Deux chemin $u_0,\ldots,u_n$ et $v_0,\ldots,v_m$ sont *nœuds internes disjoints* quand les ensembles $\{u_1,\ldots,u_{n-1}\}$ et $\{v_1,\ldots,v_{m-1}\}$ sont disjoints. Ils sont dits *arêtes disjoints* si les ensembles d'arêtes $\{u_0u_1,\ldots,u_{n-1}u_n\}$ et $\{v_0v_1,\ldots,v_{m-1}v_m\}$ sont disjoints.

Un graphe connexe qui reste connexe après suppression de n'importe quel sous-ensemble de $k-1$ sommets est dit *k-connexe* (ou *bi-connexe* quand $k=2$). Le théorème de Menger indique que pour être résistant à la défaillance de $k-1$ nœuds, un réseau doit posséder k routes nœuds internes disjointes entre toute paire de sommets :

Théorème 1 (Menger) *Un graphe est k-connexe si et seulement si pour toute paire de sommets u,v, il existe k chemins nœuds interne disjoints reliant u à v.*

Un graphe est dit *arête k-connexe* s'il est connexe et reste connexe après suppression de n'importe quel sous-ensemble de $k-1$ arêtes. Pour être résistant à la défaillance de k liens, un réseau doit posséder k routes arêtes disjointes entre toute paire de sommets :

Théorème 2 (Menger bis) *Un graphe est arête k-connexe si et seulement si pour toute paire de sommets u,v, il existe k chemins arêtes disjoints.*

3 Sous-topologie des multipoints relais

Lorsque la densité d'un réseau radio augmente le nombre de connexions possibles peut devenir quadratique. Pour garder un trafic de contrôle sous-quadratique, OLSR n'utilise qu'un sous-ensemble des liens : les liens MPR (pour multi-point relais) complétés du voisinage. Seule l'existence des liens MPR est diffusée dans tout le réseau.

Définition 1 (MPR) *Chaque nœud u élit un ensemble de voisins appelés* multi-points relais *ou* MPRs *tels que tout voisin à deux sauts de u est couvert par au moins un MPR.*

Cette propriété de couverture à deux sauts est fondamentale aux MPRs. Elle est raffinée par plusieurs propriétés additionnelles dans le protocole OLSR [CeA+03] comme la couverture MPR décrite ci-dessous. Une heuristique gloutonne simple [LQV01] permet de calculer un ensemble de multi-points relais de petite taille. Obtenir un ensemble de taille minimale est un problème NP-difficile dont l'heuristique gloutonne s'approche à un facteur $1+\log d$ près de l'optimal, où d désigne le degré maximal d'un nœud [LQV01].

Si u a choisi m comme MPR, le lien orienté mu est appelé *lien MPR*. u est aussi appelé *MPR sélecteur* de m. Dans le protocole à état de liens OLSR, l'annonce des liens se fait par la diffusion de messages de contrôle de topologie (TC) qui contiennent pour chaque nœud la liste de ses MPR sélecteurs. Chaque nœud calcule ses tables de routage en calculant les plus courts chemins vers tous les sommets du graphe orienté constitué des liens MPR et des liens vers ses voisins. (Les voisins sont découverts par les messages HELLO.) Plus précisément, OLSR utilise des routes de la forme $u_0,\ldots,u_n$ telle que u_1 est voisin de u_0 (lien de voisinage) et $u_1u_2,\ldots,u_{n-1}u_n$ sont des liens MPR. Un tel chemin sera appelé une *route OLSR*. Le protocole OLSR utilise ainsi une sous-topologie optimisée qui est différente pour chaque nœud même si une grande partie des liens est partagée par tous les nœuds.

Pour autoriser plus de redondance dans la sous-topologie d'OLSR, une définition généralisée [CeA+03] inclut un paramètre de *couverture MPR* (ou « MPR coverage » en anglais) :

Définition 2 (Couverture MPR) *Un ensemble de MPRs a* couverture *de k si tout voisin à deux sauts couvert par d voisins est couvert par au moins* $\min(d,k)$ *MPRs.*

En d'autres termes, un ensemble de MPRs de couverture k doit couvrir k fois chaque voisin à deux sauts si cela est possible ou bien doit inclure tous les voisins d'un nœud à deux sauts accessible par moins de k voisins. L'heuristique proposée dans [LQV01] peut facilement être adaptée pour calculer des MPRs avec couverture de k. Cette notion a été introduite pour rendre l'inondation par multipoints relais plus fiable. Nous allons montrer qu'elle assure de plus une propriété de k-connexité des routes.

4 k-connexité et couverture MPR de k

OLSR utilisant une sous-topologie, l'existence de k chemins disjoints dans le graphe des connexions n'implique pas nécessairement l'existence de k routes disjointes dans OLSR. Cependant, le théorème suivant fait le lien entre k-connexité et couverture MPR de k.

Théorème 3 *Dans un réseau OLSR où les MPRs sont sélectionnés avec couverture MPR de k, toute destination $v \notin N(u)$ reliée par k chemins nœuds internes disjoints à un nœud u est accessible depuis u par k routes OLSR nœuds internes disjointes.*

Preuve : Considérons un graphe de connexions et deux sommets u et v de ce graphe tels qu'il existe k chemins nœuds internes disjoints reliant u à v. Supposons de plus que chaque nœud ait élu un ensemble de MPRs avec couverture MPR de k. Nous allons montrer qu'il existe k chemins nœuds internes disjoints reliant $N(u)$ à v et constitués de liens MPR (et donc k routes disjointes connues de u).

Soit $C_1,\ldots,C_k$ k chemins nœuds internes disjoints reliant u à v tels que la somme de leurs longueurs soit minimale. Soit $u_0 = u,\ldots,u_n = v$ la suite des sommets de C_1. Montrons par récurrence sur i qu'il existe un chemin $m_i,\ldots,m_n = v$ tel que m_i couvre u_{i-1}, les lien $m_im_{i+1},\ldots,m_{n-1}m_n$ sont des liens MPR et les chemins $C_2,\ldots,C_k$ ne passent par aucun des sommets $m_i,\ldots,m_{n-1}$.

C'est vrai pour $i = n$. Supposons la propriété vraie pour $i > 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $i-1$. Soit $m_i,\ldots,m_n = v$ un chemin tel que décrit par la propriété à l'ordre i. m_i couvrant u_{i-1}, il a u_{i-2} pour voisin à deux sauts. (Il ne peut-être voisin direct sans quoi la minimalité de la somme des longueurs de $C_1,\ldots,C_k$ serait violée.) Soit d le nombre de voisins de m_i reliés à u_{i-2}. Si $d < k$ alors m_i a du sélectionner ces d voisins (dont u_{i-1}) comme MPRs d'après la règle de sélection avec couverture MPR de k. Le chemin $m_{i-1} = u_{i-1},\ldots,m_n$ vérifie alors la propriété à l'ordre $i-1$.

Traitons maintenant le cas $d \geq k$. m_i possède donc k MPRs qui couvrent u_{i-2}. Supposons par l'absurde que ces k MPRs soient sur les chemins $C_2,\ldots,C_k$. Il existe donc un chemin C_j (avec $2 \leq j \leq k$) contenant au moins deux de ces MPRs. Notons $v_0 = u,\ldots,v_p = v$ la suite des sommets de C_j et soient v_a et v_b ($a < b$) deux MPRs de m_i couvrant u_{i-2}. Considérons alors les chemins $C_1' = v_0,\ldots,v_a,m_i,\ldots,m_n$ et $C_j' = u_0,\ldots,u_{i-2},v_b,\ldots,v_p$. Ils forment avec $C_2,\ldots,C_{j-1},C_{j+1},\ldots,C_k$ k chemins nœuds internes disjoints reliant u à v. Or la somme de leurs longueurs est strictement inférieure à celles de $C_1,\ldots,C_k$ puisque $|C_1'|+|C_j'| = (a+1+n-i)+(i-2+1+p-b) = n+p-(b-a) < n+p = |C_1|+|C_j|$. Aboutissant à cette contradiction l'un des MPRs de m_i doit donc être hors de $C_2,\ldots,C_k$. Soit m_{i-1} ce nœud. $m_{i-1},\ldots,m_n$ vérifie alors la propriété à l'ordre $i-1$.

Finalement, la propriété est vraie par récurrence à l'ordre 1, d'où l'existence d'un chemin $M_1 = u,m_1,\ldots,m_n$ de même longueur que C_1 et nœuds internes disjoint de $C_2,\ldots,C_k$ tel que tous les liens $m_{i-1}m_i$, $1 < i \leq n$ sont des liens MPR. Ce chemin est donc inclus dans la sous-topologie locale de u et constitue une route OLSR possible.

De la même manière, $M_1,C_2,\ldots,C_k$ sont k chemins disjoints de u à v et il existe donc M_2 un chemin constitué de liens MPR disjoint de $M_1,C_3,\ldots,C_k$. On aboutit ainsi de suite à l'existence de k chemins $M_1,\ldots,M_k$ nœuds internes disjoints dans la sous-topologie OLSR de u.

Remarques :

- La preuve nous donne de plus l'existence dans la sous-topologie OLSR de k routes de somme des longueurs minimale.
- En particulier, cela démontre l'existence de routes optimales dans la sous-topologie OLSR classique (dans le cas $k = 1$).
- La notion de MPRs de couverture k peut facilement être modifiée pour permettre d'étendre le théorème à $v \in N(u)$.
- Le théorème tient toujours si la sélection des MPRs se fait avec couverture $k' \geq k$.

5 Arête k-connexité et couverture MPR de k

Supposons que nous voulions de manière similaire construire des ensembles MPR garantissant l'existence de k routes OLSR arêtes disjointes de somme de longueurs minimale lorsque cela existe dans le graphe des connexions. Considérons deux sommets u et v à deux sauts l'un de l'autre. S'il y a au moins k voisins qui les couvrent tous les deux, on voudrait trouver dans OLSR k routes de deux sauts les reliant. Autrement dit, v aurait k MPRs couvrant u. Ainsi, la recherche de l'arête k-connexité avec une propriété de minimalité des longueurs des chemins nous oblige à nouveau à sélectionner les MPRs avec couverture k.

À l'inverse, il n'est pas évident a priori que l'existence de k routes OLSR arêtes disjointes soit garantie par une couverture MPR de k. Cependant, la construction de la preuve précédente permet aussi de mettre en évidence de telles routes. On peut ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème 4 *Dans un réseau OLSR où les MPRs sont sélectionnés avec couverture MPR de k, toute destination v reliée par k chemins arêtes disjoints à un nœud u est accessible depuis u par k routes OLSR arêtes disjointes.*

Le théorème tient toujours pour une couverture MPR $k' \geq k$. La minimalité de la somme des longueur des k routes est à nouveau garantie.

6 Sous-topologie préservant la k-connexité

Tout protocole de routage à état de lien consiste à diffuser dans le réseau l'existence de liens. Un protocole de routage ad hoc à état de lien doit se contenter de diffuser un sous-ensemble de liens (pour que cet ensemble de liens reste sous-quadratique même quand le réseau est dense).

Définition 3 *Une sous-topologie $H = (V, E_H)$ est un sous-graphe du graphe de connexions G ($E_H \subseteq E$). Tout nœud connaissant son voisinage $N(u)$ connaît donc le graphe $H_u = (V, E_H \cup \{uv | v \in N(u)\})$. H est dit* k-sous-connexe *pour tous nœuds u, v, s'il existe k chemins nœuds internes disjoints reliant u à v dans H_u. H est de plus* optimale *s'il existe k chemins de somme des longueurs minimale.*

Cette définition exprime simplement le fait qu'un nœud u, connaissant H et son voisinage, soit capable de calculer k routes disjointes vers toute destination v. L'optimalité indique que les routes sont de plus courtes. En considérant les chemins d'un sommet à deux sauts de u vers u, on obtient le théorème évident suivant :

Théorème 5 *Si H est une sous-topologie k-sous-connexe optimale alors le voisinage de tout nœud u dans H est un ensemble de MPRs de couverture k.*

Dans le cas $k = 1$, ce théorème indique que les multipoint-relais sont une structure intrinsèque pour obtenir des routes qui soient des plus courts chemins. Comme évoqué au paragraphe 5, un théorème similaire peut être énoncé pour l'arête k-connexité.

7 Conclusion

Les multipoints relais s'avèrent une structure nécessaire et suffisante pour assurer une k-connexité avec minimalité de la somme des longueurs des chemins fournis. Pour cette raison ils apparaissent comme une structure intrinsèque dans l'optimisation de la sous-topologie diffusée dans un protocole de routage ad hoc à états de liens.

Références

[CeA+03] T. Clausen, P. Jacquet (editors), C. Adjih, A. Laouiti, P. Minet, P. Muhlethaler, A. Qayyum, and L.Viennot. Optimized link state routing protocol (OLSR). RFC 3626, October 2003. Network Working Group.

[JO02] E. Jennings and C. Okino. Topology control for efficient information dissemination in ad-hoc networks. In *International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems SPECTS 2002.*, 2002.

[KP03] I. Kang and R. Poovendran. Maximizing static network lifetime of wireless broadcast ad hoc networks. In *ICC'03*, 2003.

[LLM+05] Errol L. Lloyd, Rui Liu, Madhav V. Marathe, Ram Ramanathan, and S.S. Ravi. Algorithmic aspects of topology control problems for ad hoc networks. *Mobile Networks and Applications*, 2005.

[LQV01] A. Laouiti, A. Qayyum, and L. Viennot. Multipoint relaying : An efficient technique for flooding in mobile wireless networks. In *35th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'2001)*. IEEE Computer Society, 2001.