Satisfaction de requêtes dans un réseau radio synchrone : NP-Complétude dans les arbres

Benoit Darties, Sylvain Durand, Jérôme Palaysi

Satisfaction de requêtes dans un réseau radio synchrone : NP-complétude dans les arbres

Benoît DARTIES, Sylvain DURAND, Jérôme PALAYSI

Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier,
161 rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 5 France - Fax: +33/0 467 41 85 00
e-mail: {darties,sylvain.durand,palaysi}@lirmm.fr

Nous étudions un problème algorithmique inspiré des contraintes de routage rencontrées dans des réseaux sans-fil multisauts. Nous cherchons à satisfaire un ensemble de requêtes de communication dans un environnement radio où les émissions de deux nœuds trop proches génèrent une zone de brouillage. Pour satisfaire une requête il est possible de lui assigner une route dans le réseau que devra suivre le message de la requête. Pour éviter les brouillages nous envisageons de temporiser l'émission de certains nœuds. Notre objectif est de minimiser le temps nécessaire pour satisfaire toutes les requêtes. Nous montrons ici que ce problème, dont l'étude a été entamée dans des travaux précédents, est NP-Complet lorsque la topologie du réseau est un arbre.

Keywords: Réseaux radio synchones multisauts, satisfaction de requêtes, complexité, arbre

1 Introduction

Nous nous intéressons à un problème algorithmique inspiré du fonctionnement de réseaux sans-fil dans un modèle **half-duplex** (un nœud du réseau ne peut à la fois émettre un message et en recevoir un autre, mais il peut ignorer une réception pour procéder à une émission), **Δ-port-émission** (émission omnidirectionnelle : chaque message émis par un nœud atteint tous les nœuds voisins), **1-port-réception** (chaque nœud ne peut recevoir qu'un seul message à la fois). Une description de ce modèle est détaillée dans [Che04] et apparaît déjà pour des problèmes de broadcast [CK85] ou de rassemblement (*gathering* en anglais) [BP05, BGK$^+$06]. Les réseaux que nous considérons sont synchrones : le temps est divisé en étapes de longueurs égales (ou *slots*) et chaque message doit être intégralement émis et reçu dans un seul slot. Enfin la topologie des réseaux est fixée et connue par un superviseur. C'est dans ce contexte qu'émerge notre problème algorithmique : satisfaire le plus rapidement possible une collection de **requêtes de communication** (une requête est un couple de nœuds du réseau) en indiquant aux nœuds du réseau les dates auxquelles ils doivent faire suivre les paquets qui transitent par eux.

Le réseau radio est initialement modélisé par un graphe orienté $G = (V,E)$ où V représente l'ensemble des nœuds d'un réseau et E l'ensemble des transmissions possibles. Un **parcours**[†] dans un graphe G est une liste ordonnée de sommets du graphe, telle que 2 sommets consécutifs dans la liste sont adjacents dans G. Nous considérerons seulement des **parcours simples** pour lesquels le nombre d'occurences d'un sommet dans la liste est au plus 1. Un parcours modélisera par la suite une route de communication dans le réseau. La **taille d'un parcours** est son nombre de sommets moins 1. Un graphe G et une collection de requêtes étant donnés, nous appelons **fonction de routage** une fonction P qui à toute requête $r = (s,t)$ associe un parcours $P(r)$ (ou P_r) de G commençant et terminant respectivement par s et t. Un graphe G, une collection de requêtes R et une fonction de routage étant donnés, une **assignation de dates** est une fonction qui, à tout couple $(r = (s,t),x)$ où $r \in R$ et $x \in P(r)$ avec $x \neq t$ [‡]associe un entier naturel positif : la date à laquelle le sommet x doit relayer le message de la requête r. Une assignation de dates d est **valide** si et seulement si

[†] Nous utiliserons la terminologie de [CR03].
[‡] le dernier nœud du parcours, destinataire du message, n'a pas à le relayer.

pour toute requête r avec $P_r = (x_0, x_1, ..., x_k)$ la propriété $d(r, x_0) < d(r, x_1) < ... < d(r, x_k)$ est vérifiée. Elle est de plus **sans conflit** si et seulement si lorsque $d(r, x_i) = d(r', y_j)$ les conditions suivantes sont satisfaites :

– $x_i \neq y_j$ (pas de multiplexage, un nœud n'émet qu'un seul message à la fois)
– $x_{i+1} \neq y_j$ et $y_{j+1} \neq x_i$ (half-duplex)
– $(x_i, y_{j+1}) \notin E(G)$ et $(y_j, x_{i+1}) \notin E(G)$ (Δ-port-émission et 1-port-réception)

Par la suite, comme nous ne considérerons que des graphes orientés symétriques, nous les assimilerons, pour plus de commodité, à des graphes non orientés.

2 Le problème DAWN-paths

Compte tenu d'une collection de requêtes de communication à satisfaire dans un réseau radio synchrone, le problème DAWN-paths (*Date Assignment in Wireless Network*) se propose de trouver une assignation de dates correcte et sans conflit le long de routes de communication. Ce problème se formalise comme suit :

DONNEE : *Un graphe non orienté G, une collection de requêtes $R = \{r_i = (s_i, t_i) | 1 \leq i \leq K\}$, une fonction de routage P sur R qui associe à chaque requête r_i un chemin $P(r_i)$ reliant les sommets de r_i, un entier $D \geq 0$ borné par $|V(G)| \times |R|$.*

QUESTION : *Existe-t-il une assignation de date valide et sans conflit telle que le nombre d'étapes requis est inférieur ou égal à D ?*

Nous appelons min-DAWN-paths la version optimisation du problème DAWN-paths, consistant à trouver une assignation avec un nombre minimal d'étapes. La figure 1 présente une instance de DAWN-paths avec une solution optimale.

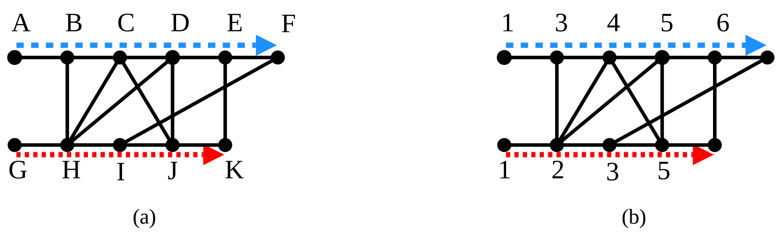

FIG. 1: (a) Une instance (G, R, P) de DAWN-paths contenant 2 requêtes $r_1 = (A, F)$, $r_2 = (G, K)$, $P(r_1) = (A, B, C, D, E, F)$ and $P(r_2) = (G, H, I, J, K)$. (b) Une assignation de dates valide, sans conflit, et optimale (b).

Il a été montré dans des travaux précédents [DP06] que min-DAWN-paths était un problème NP-difficile et non approximable en général. Le problème DAWN-paths est polynomial lorsque $D \leq 2$ et NP-Complet pour $D \geq 3$. par ailleurs il a également été proposé dans le même papier un algorithme polynomial lorsque le nombre de requêtes est une constante.

3 DAWN-paths dans les arbres

Nous montrons dans cette section que DAWN-paths est NP-Complet même lorsque la topologie du réseau est un arbre. Le lecteur pourra vérifier par lui-même les 2 lemmes suivants.

Lemme 1 *Considérons :*

– *une instance (G, R, P, D) de DAWN-paths,*
– *une requête $r \in R$ de parcours associé $P(r) = (s, \ldots, x, y, \ldots, t)$,*
– *une chaîne C dont les sommets sont les entiers $[1, D+1]$ (G doit être tel que $V(G) \cap V(C) = \emptyset$),*
– *une requête $r_p = (1, D+1)$,*
– *un entier $i \in [1, D]$.*

Notons H le graphe $(V(G) \cup V(C), E(G) \cup E(C) \cup \{\{y, i\}\})$. Nous affirmons que :

– *L'instance $(H, R \cup \{r_p\}, P, D)$ peut être construire depuis (G, R, P, D) en temps polynomial*§*,*

§ Rappelons que $D \leq |V(G)| \times |R|$

– *soit d une assignation de date valide et sans conflit pour $(H, R \cup \{r_p\}, P, D)$, alors $d(r,x) \neq i$.*

Soulignons que si G est un arbre, alors H l'est également. Cette construction sera utilisée dans la preuve du théorème 1, pour restreindre les dates d'émission possibles de certains nœuds (en empêchant les autres dates). Le prochain lemme a pour objet les instances (u,D)-tendues que nous définissons ci-dessous.

Définition 1 (une instance (u,D)-tendue) *Soient u et D deux entier naturels, avec $D \geq 7$. Une **instance (u,D)-tendue** est une instance de DAWN-paths (C,R,P,D) où C est une chaîne (avec $V(C) = \{1,2,\ldots,D+7u\}$ et $E(C) = \big\{\{i,i+1\}|\forall i \in [1,D+7u-1]\big\}$) et R est un ensemble de $2u$ requêtes $\{r_1,\overline{r_1},r_2,\overline{r_2},\ldots,r_u,\overline{r_u}\}$ avec $r_i = \{(7i-5,7i+D-9)\}$ et $\overline{r_i} = \{(7i-6,7i+D-8)\}|\forall i \in [1,u]$.*

Dans la figure 2, l'ensemble des requêtes $\{r_{x_1}, r_{\bar{x_1}}, r_{x_2}, r_{\bar{x_2}}, r_{x_3}, r_{\bar{x_3}}\}$ sur la chaîne $C_{[1,47]}$ représente une instance $(3,26)$-tendue. Pour satisfaire ces requêtes en 26 étapes seulement 2 possibilités se présentent pour chaque couple de requêtes r_i et $r_{\bar{i}}$: la requête r_i part à l'étape 1 et $r_{\bar{i}}$ à l'étape 3, ou bien r_i part à l'étape 5 et $r_{\bar{i}}$ à l'étape 1. Ensuite, aucune temporisation n'est possible pour n'importe quelle requête. Le lemme 2 formalise cette propriété des instances tendues :

Lemme 2 *Considérons une instance (u,D)-tendue, u et D étant deux entiers définis. Soit d une assignation valide et sans conflit pour cette instance. Nous proposons les affirmations suivantes $\forall i \in [1,u]$:*
- $d(r_i, 7i-5) \in \{1,5\}$,
- $d(\overline{r_i}, 7i-6) \in \{1,3\}$,
- $d(r_i, j+1) = d(r_i, j) + 1, \quad \forall j \in P(r_i) - \{7i+D-9\}$,
- $d(\overline{r_i}, j+1) = d(\overline{r_i}, j) + 1, \quad \forall j \in P(\overline{r_i}) - \{7i+D-8\}$.

Pour tour entier $i \in [1,u]$ et $j \in P(r_i)$:
- *si $d(r_i, 7i-5) = 1$ alors $d(r_i, j) = j - 7i + 6$ et $d(\overline{r_i}, j) = j - 7i + 9$*
- *si $d(r_i, 7i-5) = 5$ alors $d(r_i, j) = j - 7i + 10$ et $d(\overline{r_i}, j) = j - 7i + 7$*

Nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 1 *Le problème DAWN-paths est NP-Complet même lorsque le graphe du réseau est un arbre.*

Preuve: La preuve est basée sur une réduction polynomiale de n'importe quelle instance du problème NP-Complet bien connu 3-SAT, vers une instance (G,R,P,D) de DAWN-paths dans laquelle G est un arbre.

Soit $I_{SAT} = (U,W)$ une instance de 3-SAT, composée d'un ensemble de variables $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et d'un ensemble de clauses $W = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ de 3 littéraux chacune. Notons $n = |U|$, $m = |W|$, et posons $D = m + 7n + 3$.

Considérons une instance (n,D)-tendue (G_1, R_1, P, D). L'idée générale de la preuve consiste à faire correspondre 2 requêtes r_i et $\overline{r_i}$ à chaque variable $x_i \in U$. Par soucis de clarté nous noterons r_{x_i} la requête r_i et $r_{\bar{x_i}}$ la requête $\overline{r_i}$.

Soit G_2 un arbre tel que $V(G_2) = V(G_1) \cup \big\{(c_i,1),(c_i,2)|i \in [1,m]\big\}$ et $E(G_2) = E(G_1) \cup \big\{\{(c_i,1),(c_i,2)\}, \{7n+i,(c_i,1)\}|i \in [1,m]\big\}$. Par la suite nous notons c_i^s le couple $(c_i,1)$ et c_i^t le couple $(c_i,2)$ pour tout entier i. Soit R_2 l'ensemble de requêtes $\{r_{c_i} = (c_i^s, c_i^t)|i \in [1,m]\}$. Considérons maintenant l'instance $(G_2, R_1 \cup R_2, P, D)$ (voir la figure 2 pour un exemple).

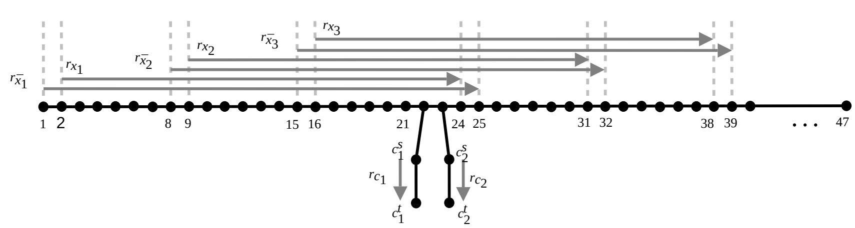

FIG. 2: Un graphe G_2 et un ensemble de requêtes $R_1 \cup R_2$, construits depuis une instance $I_{SAT} = (U,W)$ où $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $W = \{c_1, c_2\}$. Ici $D = m + 7n + 3 = 26$.

En appliquant la construction proposée dans le lemme 1 plusieurs fois, nous créons une instance $I = (G,R,P,D)$: pour chaque requête $r_{c_J} = (c^s_J, c^t_J)$ avec $J \in [1,m]$ nous empêchons c^s_J d'émettre vers c^t_J le message de la requête r_{c_J} à toutes les dates $t \leq D$, excepté pour 3 étapes définies à partir des littéraux contenus dans la clause c_J : si c_J contient le littéral positif (resp. négatif) associé à la variable $x_i | i \leq n$, alors c^s_J est autorisé à transmettre à l'étape $j-7i+6$ *(resp.* $j-7i+8$*)* où $j = 7n+J$. De cette façon, si x_i est dans c_J et si $d(r_i, s(r_i)) = 1$ alors la requête r_J pourra être satisfaite à la date $j-7i+6$, ce qui ne sera pas le cas si $d(r_i, s(r_i)) = 5$ (on peut faire une remarque similaire pour un littéral négatif appartenant à c_J). Puisque G_2 est un arbre, G est également un arbre (et la fonction de routage est évidente). La taille de I est polynomiale dans la taille de I_{SAT}, et I peut être construite en temps polynomial. Nous verifions que s'il existe une solution en D étapes pour I, alors il existe une solution à I_{SAT} et réciproquement.

Considérons une assignation de dates valide et sans conflit sur I. Choisissons une requête $r_{c_i} | i \in [1,m]$. D'après le lemme 2 et pour chaque entier $i \in [1,n]$, une requête parmi $\{r_{x_i}, r_{\overline{x_i}}\}$ doit démarrer à l'étape 1, et l'autre dès que possible. Une date a été affectée au couple (r_{c_i}, c^s_i). Notre construction implique qu'il existe au moins un littéral l (positif ou négatif) dans la clause c_i tel que la requête r_l a débuté avant $r_{\overline{l}}$. En affectant la valeur « Vrai » à toutes les variables x_i si r_{x_i} débute à l'étape 1 (cad. avant $r_{\overline{x_i}}$) et « Faux » sinon, nous obtenons une solution à l'instance I_{SAT}.

Réciproquement, s'il existe une solution à I_{SAT}, alors nous pouvons déduire une solution pour l'instance I : pour chaque variable x_i nous débutons la requête r_{x_i} avant $r_{\overline{x_i}}$ si et seulement si x_i a la valeur "Vrai". Pour chaque clause c_i, r_{c_i} démarre à la première étape autorisée et disponible (cette étape existe puisque la clause c_i est satisfaite par au moins un littéral.

Comme DAWN-paths appartient clairement à NP nous pouvons conclure. $\square$

4 Conclusion

Nous savions déjà qu'il n'existait pas (sous réserve que P est bien différent de NP) d'algorithme ρ-approchant (avec ρ une constante positive) pour le problème min-DAWN [DP06]. Dans ce papier, nous venons de démontrer que le problème reste NP-complet dans les arbres, mais la preuve utilisée ne nous permet pas de conclure au sujet de l'approximabilité du problème dans ce cas de restriction. Nous pouvons donc rechercher un algorithme ρ-approchant pour le problème min-DAWN dans les arbres.

Mentionnons aussi que la preuve de ce papier, pour la NP-complétude dans les arbres, ne concerne pas des restrictions particulières comme le gathering ou le broadcast. Par contre nous avons pu vérifier, en adaptant la preuve, que la NP-complétude demeure même pour les arbres de degré borné (en particulier de degré au plus 3). Il reste donc à découvrir la complexité du problème dans les chaînes.

Références

[BGK+06] J.-C. Bermond, J. Galtier, R. Klasing, N. Morales, and S. Pérennes. Hardness and approximation of gathering in static radio networks. In *FAWN06, Pisa, Italy*, March 2006.

[BP05] J.-C. Bermond and J. Peters. Efficient gathering in radio grids with interference. In *AlgoTel'05*, Presqu'île de Giens, May 2005.

[Che04] G. Chelius. *Architectures et Communications dans les réseaux spontanés sans fil*. PhD thesis, INSA de Lyon, INRIA Rhône Alpes, France, April 2004.

[CK85] I. Chlamtac and S. Kutten. On broadcasting in radio networks - Problem analysis and protocol design. *IEEE Transactions on Communications*, 33 :1240–1246, December 1985.

[CR03] Olivier Cogis and Claudine Robert. *Théorie des graphes*. Vuibert, 2003.

[DP06] B. Darties and J. Palaysi. Satisfaction de requêtes par affectation de dates d'émissions dans les réseaux radios. In *Rencontres francophones du Parallélisme (RenPar'17)*, 2006.