

Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène

Samer Riachy, Thierry Floquet, Jean-Pierre Richard

▶ **To cite this version:**

Samer Riachy, Thierry Floquet, Jean-Pierre Richard. Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène. e-STA Sciences et Technologies de l'Automatique, 2007, 4 (3). inria-00182410

HAL Id: inria-00182410
https://inria.hal.science/inria-00182410

Submitted on 25 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène

Samer Riachy, Thierry Floquet, Jean-Pierre Richard

Projet ALIEN, INRIA FUTURS et Equipe SyNeR, LAGIS UMR CNRS 8146
Ecole Centrale de Lille, B.P. 48, Cité Scientifique, 59651 Villeneuve d'Ascq, France.

(samer.riachy, thierry.floquet, jean-pierre.richard)@ec-lille.fr

Résumé— **Une commande par modes glissants d'ordre 2 est réalisée pour le contrôle de systèmes mécaniques sous-actionnés opérant en milieu incertain. Afin de stabiliser un système sous-actionné autour de sa position d'équilibre instable, une commande robuste quasi-homogène est construite pour générer un régime glissant d'ordre 2 sur une surface de glissement convenablement choisie. La dynamique équivalente par rapport à cette sortie fictive est alors asymptotiquement stable. Les performances de la loi de commande proposée sont illustrées par une étude expérimentale sur un pendule inversé.**

Mots-clés— **systèmes mécaniques sous-actionnés, modes glissants d'ordre 2, contrôle quasi-homogène, stabilisation locale.**

I. Introduction

La stabilisation des systèmes mécaniques sous-actionnés, possédant plus de degrés de liberté que d'entrées de commande, est un défi [7], [22].

La loi de commande, qui sera développée dans la suite, est basée sur une transformation non linéaire dans l'espace d'état afin d'obtenir une forme canonique de commande similaire à [2], [27]. Pour stabiliser le système autour de sa position d'équilibre (instable ou non), une sortie est choisie de telle sorte que la dynamique équivalente correspondante (lorsque cette sortie est annulée) soit asymptotiquement stable. Une fois la sortie choisie, la stabilité du système asservi est assurée par la construction d'un contrôle à structure variable assurant la convergence, en temps fini et de façon robuste, du système vers la dynamique équivalente. La synthèse de ce genre de contrôleur est une contribution de cet article.

La commande à structure variable construite est en partie inspirée de [18]- [19], stabilisant un manipulateur à un degré de liberté en temps fini. Bien qu'elle présente ce qu'on appelle *l'effet Zénon*, caractérisé par une infinité de commutations de la commande sur un intervalle de temps fini (voir [15], [17] pour les modes Zénon), elle n'aboutit pas à la génération de modes glissants d'ordre 1, alors qu'elle assure des propriétés de robustesse et de précision similaires. Des Modes Glissants du Second Ordre (MGSO) apparaissent au point d'équilibre (voir [1], [9], [10], [13] pour plus de details sur les MGSO). Pour des applications à des systèmes mécaniques ayant un niveau de frottement important [18]- [21] et [23], il a été montré que ce type de lois commande assure de bonnes performances en présence de perturbations ainsi que de dynamiques non modélisées comme les forces de frottements.

La procédure est validée par des applications expérimentales de stabilisation locale d'un pendule inversé. Un problème classique est de balancer le pendule jusqu'à ce qu'il atteigne sa position d'équilibre instable et de le maintenir à cette position. La littérature est déjà riche sur ce sujet [6], [16], [25], [28], [29]. L'approche traditionnelle consiste en la construction de 2 contrôleurs. Le premier, basé sur le modèle non linéaire, est dédié à la phase de balancement. Le second, basé sur le modèle linéarisé, assure la stabilité locale autour de la position d'équilibre instable. Une stratégie de commutation (hybride) est alors mise en oeuvre pour commuter entre les 2 contrôleurs une fois le domaine d'attraction du contrôleur local est atteint. Basés généralement sur un retour d'état statique, ces contrôleurs locaux déjà publiés sont d'un intérêt pratique limité à cause de leurs domaines d'attraction relativement restreints. De plus, l'influence des efforts de frottements est négligée dans ces travaux, ce qui limite les performances de tels contrôleurs.

Le contrôleur par MGSO développé dans cette communication, concernant uniquement la phase de stabilisation locale autour du point d'équilibre instable pour le système pendule-chariot, ne souffre pas de ces inconvénients. Cette commande, qui ne tient donc pas compte de la phase de balancement, est basée sur le modèle non linéaire du pendule inversé et assure un large domaine d'attraction. En plus, la robustesse du contrôleur vis-à-vis des forces de frottement est mise en évidence.

Le reste de l'article est organisé comme suit. La section 2 présente les concepts de base de la commande quasi-homogène discontinue appliquée à la stabilisation d'un manipulateur à un degré de liberté. Dans la section 3, ces résultats sont étendus à la stabilisation des systèmes mécaniques sous-actionnés. Les performances de la stratégie proposée sont expérimentées sur un pendule inversé dans les sections 4 et 5.

II. Etude préliminaire : stabilisation robuste d'un manipulateur à un degré de liberté

La commande quasi-homogène, qui sera définie ultérieurement, est tout d'abord illustrée sur un manipulateur à 1 degré de liberté opérant dans des conditions incertaines. Les dynamiques du manipulateur sont données par

$$\ddot{y} = \omega(y, \dot{y}, t) + u \tag{1}$$

où y est sa position, $\dot{y}$ est sa vitesse, u est la commande et $\omega(y, \dot{y}, t)$ est une fonction nonlinéaire continue par morceaux qui contient toutes les forces agissant sur le système (frottement visqueux et de Coulomb, poids, etc.). Les solutions de l'équation différentielle à second membre discontinue sont définies au sens de Filippov [8], donc dans le cadre d'une inclusion différentielle dont le terme à droite de l'égalité peut prendre plusieurs valeurs. Le manipulateur opère dans des conditions incertaines ce qui implique que la non-linéarité $\omega(y, \dot{y}, t)$ est mal connue. Ce terme, potentiellement déstabilisant, peut être considéré comme étant la somme d'un terme nominal connu *a priori* $\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$ et d'un terme incertain $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ qui sera rejeté :

$$\omega(y, \dot{y}, t) = \omega^{nom}(y, \dot{y}, t) + \omega^{un}(y, \dot{y}, t). \tag{2}$$

On suppose que $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ est borné, i.e. que l'inégalité :

$$|\omega^{un}(y, \dot{y}, t)| \leq N \tag{3}$$

est vérifiée pour tout $t \geq 0$ et tout $(y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2$, où $N > 0$ est une constante connue *a priori*. De plus, on suppose que les fonctions $\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$ et $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ sont continues par morceau.

La loi de commande

$$u = -\omega^{nom}(y, \dot{y}, t) - a\mathrm{sign(y)} - b\mathrm{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}, \tag{4}$$

$$N < b < a - N, \quad h, p \geq 0 \tag{5}$$

où sign(.) est la fonction signe, stabilise le système incertain (1)-(3) en temps fini. La commande (4)-(5) est constituée de la compensation nonlinéaire $-\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$, d'un gain linéaire $-hy - p\dot{y}$, et d'une partie discontinue $\varphi(y, \dot{y}) = -a\mathrm{sign(y)} - b\mathrm{sign}(\dot{y})$ vérifiant $\varphi(cy, c\dot{y}) = \varphi(y, \dot{y})$ pour tout $c > 0$. Un tel contrôleur est dit quasi-homogène.

Definition 1: Un contrôleur est dit *quasi-homogène* ssi il peut être représenté comme une combinaison d'un terme homogène discontinu et d'un autre terme continu qui tend vers l'origine de l'espace d'état.

La stabilité en temps fini des systèmes homogènes asymptotiquement stables est bien connue pour les champs de vecteurs continus [3], [12]. Pour l'extension de ce résultat aux systèmes à structure variable, il a fallu procéder différemment [14], [19] étant donné que l'existence d'une fonction de Lyapunov lisse et homogène, dont l'existence a été prouvée dans [24] pour les champs de vecteurs continus asymptotiquement stable, n'est plus utilisable.

La nouveauté dans la démonstration est que la stabilité en temps fini est conservée en présence de perturbations non-homogènes [19]. En particulier, il a été montré que le système non-homogène (1)-(5) est globalement stable en temps fini, en présence de perturbations externes (2) vérifiant (3).

III. Stabilisation des systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans la présente section, la synthèse d'une commande quasi-homogène est développée pour la stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés dont le modèle dynamique est de la forme :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[B\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - F(\dot{q})]. \tag{6}$$

Dans cette équation, $q \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ est le vecteur de position des articulations, $\tau \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, $\mathrm{m} < \mathrm{n}$ est la force de commande, $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ sont respectivement les vecteurs de vitesse et d'accélération, $M(q) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ est la matrice d'inertie, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ représente les forces centrifuge et de Coriolis, $G(q)$ le poids, $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ les forces de frottements et B est la matrice d'entrée de rang m.

Le système (6) peut être représenté localement, par l'intermédiaire d'un changement non linéaire, sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \\ \ddot{\xi} &= f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + u. \end{aligned} \tag{7}$$

Si en plus, ce système est localement à minimum de phase et suffisamment dérivable, il peut être localement stabilisé par un contrôleur quasi-homogène similaire à (4). Les variables η et ξ sont supposées mesurables, car ce sont des fonctions de q et $\dot{q}$. Dans la suite, on suppose que :

1. Les fonctions $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ et $f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ sont continues par morceaux et $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est continue par rapport à $(\xi, \dot{\xi})$ localement autour de $(\xi, \dot{\xi}) = 0$ pour tout $(\eta, \dot{\eta})$.
2. Le système $\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est stable du point de vue entrée-état.
3. Le système

$$\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, 0, 0) \tag{8}$$

a une position d'équilibre en 0, localement asymptotiquement stable.

Les solutions de l'équation différentielle (7)-(8), ayant un second membre discontinu, sont définies au sens de Filippov [8]. L'hypothèse 1 étant vérifiée, l'existence d'une solution (probablement non-unique) d'une telle équation, ayant des conditions initiales arbitraires et un contrôle continu par morceaux, est garantie par le Théorème 8 de [8, p. 85].

Les autres hypothèses sont nécessaires pour des raisons techniques. L'hypothèse 2 est introduite pour éviter les effets de pic déstabilisant (voir [26] pour plus de détails). L'hypothèse 3 signifie que (7), ayant comme sortie ξ, est localement à minimum de phase.

Comme dans le cas du manipulateur (1), le système (7) opère dans un milieu incertain. Le terme,

$$f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) = f^{nom}(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + f^{b}(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \tag{9}$$

probablement déstabilisant, est décomposé en une composante nominale f^{nom}, connue *a priori*, et un gain borné mal connu f^b dont les composantes f^b_j, $j = 1, \ldots, m$ sont globalement bornées

$$|f^b_j(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})| \leq N_j \tag{10}$$

par des constantes connues *a priori* $N_j > 0$. De plus, les deux fonctions f^{nom} et f^b sont supposées continues par morceaux. Le contrôleur quasi-homogène suivant (4), (5), est proposé

$$u(\eta,\dot\eta,\xi,\dot\xi) = -f^{nom}(\eta,\dot\eta,\xi,\dot\xi) - \alpha \text{sign } \xi - \beta \text{sign } \dot\xi - \mathrm{H}\xi - \mathrm{P}\dot\xi \tag{11}$$

$$\begin{aligned} H &= diag\{h_j\},\ P = diag\{p_j\}, \\ \alpha &= diag\{\alpha_j\},\ \beta = diag\{\beta_j\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} N_j &< \beta_j < \alpha_j - N_j \\ h_j, p_j &\geq 0,\ j = 1,\dots,m \end{aligned} \tag{12}$$

pour stabiliser localement le système incertain (7), (9), (10). La notation *diag* représente une matrice diagonale de dimension appropriée, *sign* ξ où $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)^T$ est ce vecteur colonne $(sign\ \xi_1,\dots,sign\ \xi_m)^T$.

Dans la suite, on montre que le contrôleur proposé (11), (12) assure la convergence du système incertain (7) vers la dynamique équivalente $\xi = \dot\xi = 0$ en temps fini avec les propriétés désirées du système bouclé.

Theorem 1: Supposons les hypothèses 1-3 satisfaites et soit le système (7), (9), (10) bouclé par le retour (11) sous la condition (12). Alors, le système bouclé (7), (11)-(12) est localement asymptotiquement stable, uniformément vis-à-vis des perturbations (9), (10).

Démonstration : Le système en boucle fermée (7), (11) est représenté comme suit

$$\ddot\eta = g(\eta,\dot\eta,\xi,\zeta) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \dot\xi_j &= \zeta_j, \\ \dot\zeta_j &= f_j^b(\eta,\dot\eta,\xi,\zeta) - \alpha_j sign\ \xi_j - \beta_j sign\ \zeta_j \\ &\quad -h_j\xi_j - p_j\zeta_j, j = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{14}$$

L'hypothèse 1 permet d'utiliser les résultats de la théorie de Filippov sur les systèmes à second membre discontinu. Pour des raisons de concision, on ne fera ici référence qu'au Théorème 8 de son ouvrage de référence [8, p. 85]. Ce Théorème étant applicable au système (13)-(14), le système admet une solution locale en présence de perturbations globalement bornées (10). Montrons que toute solution de (13), (14) est globalement continue à droite.

Tout d'abord, pour $j \in (1,\dots,m)$, aucun mouvement n'apparaît sur les axes $\xi_j = 0$ and $\zeta_j = 0$ sauf sur leur intersection $\xi_j = \zeta_j = 0$. En effet, si $\xi_j(t) = 0$ pour une trajectoire de (13)-(14), alors (13) donne $\zeta_j(t) = 0$ sur la trajectoire. D'autre part, si $\zeta_j(t) = 0$ pour une trajectoire de (13)-(14) et en tenant compte de (12), la seconde équation de (14) n'est plus satisfaite pour $\xi_j \neq 0$.

Ensuite, calculons la dérivée temporelle de la fonction $V_j(\xi_j,\zeta_j) = \alpha_j|\xi_j| + \frac{1}{2}(h_j\xi_j^2 + \zeta_j^2),\ j = 1,\dots,m$, le long des trajectoires de (14). En tenant compte de (10), on obtient

$$\begin{aligned} \dot V_j(\xi_j,\zeta_j) &= \alpha_j\zeta_j \text{sign } \xi_\mathrm{j} + \mathrm{h_j}\xi_\mathrm{j}\zeta_\mathrm{j} + \zeta_\mathrm{j}\{\mathrm{f_j^b}(\eta,\dot\eta,\xi,\zeta) \\ &\quad -\alpha_j \text{sign } \xi_\mathrm{j} - \beta_\mathrm{j} \text{sign } \zeta_\mathrm{j} - \mathrm{h_j}\xi_\mathrm{j} - \mathrm{p_j}\zeta_\mathrm{j}\} \\ &= -[\beta_j - f_j^b(\eta,\dot\eta,\xi,\zeta) \text{sign } \zeta_\mathrm{j}] \times |\zeta_\mathrm{j}| - \mathrm{p_j}\zeta_\mathrm{j}^2 \\ &\leq -(\beta_j - N_j)|\zeta_j| \end{aligned} \tag{15}$$

sauf le long de l'axe $\xi_j = 0$ où la fonction $V_j(\xi_j,\zeta_j)$ n'est pas dérivable. Puisque le régime de glissement n'apparaît pas sur $\xi_j = 0$ mais uniquement sur l'intersection de $\xi_j = \zeta_j = 0$ où $\dot V_j(\xi_j,\zeta_j) = 0$, l'inégalité (15) est toujours satisfaite $\forall\ t$.

Selon (12), la solution du sous-système (14) satisfaisant (10) est uniformément bornée par rapport à t. Tenant compte de l'hypothèse 2, on s'assure que toutes les solutions possibles du système incertain (10), (13), (14) restent bornées sur tout intervalle de temps fini, et d'après la propriété B du Théorème 9 de [8, p. 86], ces solutions sont globalement continues à droite.

Les composantes $f_j^b(\eta,\dot\eta,\xi,\zeta),\ j = 1,\dots,m$, étant globalement bornées et en vertue de (12) tout sous-système (14) est similaire à celui considéré dans la Section II, et est donc globalement stable en temps fini, pour toutes perturbations satisfaisant (10). Donc, à partir d'un certain temps fini, le système bouclé (13), (14) évolue sur la dynamique équivalente $\xi = \zeta = 0$ où le comportement est décrit par la dynamique des zéros (8).

Enfin pour compléter la démonstration, il reste à noter, d'après l'hypothèse 3, que la dynamique équivalente (8) est localement asymptotiquement stable. Celle-ci, couplée à la stabilité en temps fini locale uniforme de (14), assure que le système asservi (13), (14) est localement asymptotiquement uniformément stable. La preuve du théorème est alors complète.

En résumé, la synthèse *Quasi-homogène* suivante est proposée pour les systèmes sous-actionnés. Premièrement, une sortie du système est choisie sachant que la dynamique équivalente correspondante est localement asymptotiquement stable. Ensuite, le système sous-actionné est, localement, transformé sous la forme canonique (7), dont la stabilisation est achevée par l'application d'un contrôleur quasi-homogène (11), (12).

Dans ce qui suit, cette synthèse quasi-homogène est mise en œuvre pour la stabilisation d'un pendule inversé à 2 degrés de liberté avec $n = 2$ et $m = 1$. Des études de simulations numériques ainsi que des expérimentations sont également réalisées.

IV. Application au pendule inversé

A. Modèle mathématique du pendule inversé

Par application de la seconde loi de Newton, on obtient les équations dynamiques du système :

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot x + ml\sin\theta\ \dot\theta^2 - ml\cos\theta\ \ddot\theta &= \tau - \psi(\dot x) + \omega_1(t), \\ \tfrac{4}{3}ml^2\ddot\theta - ml\cos\theta\ \ddot x - mgl\sin\theta &= -\varphi(\dot\theta) + \omega_2(t). \end{aligned}$$

Dans les équations précédentes, x et θ sont les coordonnées généralisées (voir fig. 1), M et m sont respectivement les masses du chariot et du pendule, l est la distance du centre de gravité du pendule à son axe de rotation, g est la constante de gravitation, τ est l'entrée de commande (la force exercée par le moteur) et $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ sont des termes incertains bornés prenant en compte les dynamiques mal modélisées ainsi que les perturbations externes. $\psi(\dot x)$ et $\varphi(\dot\theta)$ sont respectivement les efforts de frottement (de

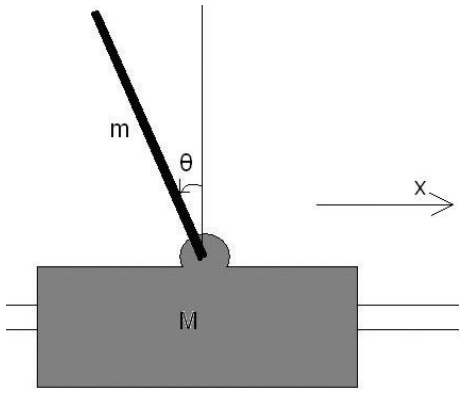


Fig. 1. Le pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ.

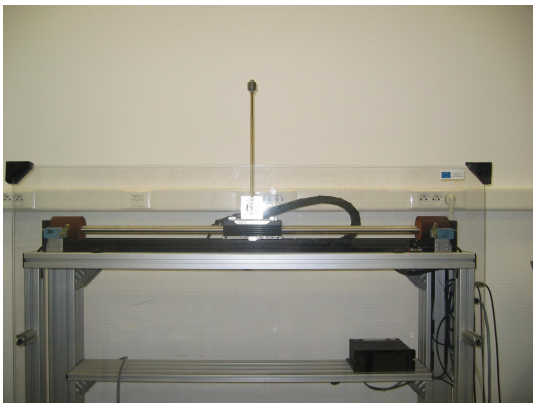


Fig. 2. Pendule inversé situé au LAGIS.

Coulomb et visqueux) du chariot et du pendule et sont modélisés comme suit :

$$\psi(\dot{x}) = \psi_{Dahl}(\dot{x}) + \psi_v \dot{x} \quad et \quad \varphi(\dot{\theta}) = \varphi_{Dahl}(\dot{\theta}) + \varphi_v \dot{\theta}$$

où ψ_v et φ_v sont les coefficients de frottement visqueux. Dans ce qui suit, le contrôleur requiert que les perturbations inconnues et les efforts de frottement sont différentiables. Ainsi, il est supposé que l'évolution du frottement de Coulomb est décrit par le modèle de Dahl suivant [5] :

$$\dot{\psi}_{Dahl}(\dot{x}) = \sigma_x \left[\dot{x} - \frac{\psi_{Dahl}(\dot{x})}{\psi_c} |\dot{x}| \right]$$

et

$$\dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}) = \sigma_\theta \left[\dot{\theta} - \frac{\varphi_{Dahl}(\dot{\theta})}{\varphi_c} |\dot{\theta}| \right]$$

σ_x et σ_θ sont les coefficients de rigidité, alors que ψ_c et φ_c représentent respectivement la force de frottement de Coulomb du chariot (moteur linéaire) et le couple de frottement de Coulomb du pendule. Les équations peuvent être mises sous la forme (6) avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M+m & -ml\cos\theta \\ -ml\cos\theta & \frac{4}{3}ml^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & ml\sin\theta\ \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \psi(\dot{x}) - \omega_1(t) \\ \varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t) \end{bmatrix}.$$

Après quelques manipulations mathématiques, la représentation suivante sous forme d'équations d'état est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(3mgl\cos\theta - 4ml^2\dot{\theta}^2)\sin\theta}{D} \\ \dot{\theta} \\ \frac{3((M+m)g - ml\cos\theta\ \dot{\theta}^2)\sin\theta}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4l}{D} \\ 0 \\ \frac{3\cos\theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t)) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\cos\theta}{D} \\ 0 \\ \frac{3(M+m)}{mlD} \end{bmatrix} (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t)) \quad (16)$$

avec $D = l(4M + m + 3m\sin^2\theta) > 0$. En examinant (16), on s'aperçoit que $\varphi(\dot{\theta})$ et $\omega_2(t)$ sont des frottements et des perturbations "non-matching" ($F(\dot{q}) \notin span(B)$).

B. La loi de commande

Dans cette section, une loi de commande par MGSO quasi-homogène est construite pour la stabilisation locale du système pendule-chariot autour de sa position d'équilibre instable. L'idée est de trouver un difféomorphisme transformant le système en une forme régulière (7). Pour cela, on propose le changement de base suivant :

$$\eta = x - \frac{4}{3} l \varrho(\theta) \quad (17)$$

avec

$$\varrho(\theta) = \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right), \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

Alors, le système (16) est transformé en 2 chaines d'intégrateurs où l'entrée de commande n'agit que sur la 2^{eme} :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ -\left(g + \frac{4}{3}l\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}\right)\tan\theta \\ \dot{\theta} \\ \frac{3\sin\theta((M+m)g - ml\cos\theta\ \dot{\theta}^2)}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\cos\theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi + \omega_1) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml\cos\theta} \\ 0 \\ \frac{3(M+m)}{mlD} \end{bmatrix} (\varphi - \omega_2) \quad (19)$$

On voit que les termes non-matching φ et ω_2 influence le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ de la forme régulière (19). Ces termes ne sont pas traités dans la partie théorique III, mais on verra que le contrôleur permet d'atténuer leurs effets.

Une sortie fictive ξ est choisie afin que le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ avec $\varphi = \omega_2 = 0$ soit à minimum de phase par rapport à cette sortie. Nous allons montrer qu'on peut choisir ξ telle que :

$$\xi = \tan\theta - \lambda_1 \eta - \lambda_2 \dot{\eta}, \quad (20)$$

avec λ_1 et $\lambda_2 > 0$.

En tenant compte de (17), (18) et (20), les variables d'état θ et x convergent vers l'origine lorsque η, $\dot{\eta}$ et ξ tendent vers zéro. Donc, si on génère un régime de glissement sur $\xi = 0$, l'hypothèse que le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ est à minimum de phase entraîne la stabilisation asymptotique

de x et θ. Le problème revient alors à la construction d'une commande à structure variable garantissant la convergence en temps fini de ξ vers zéro. En dérivant deux fois ξ, on obtient :

$$\ddot{\xi} = \mu + z + u, \tag{21}$$

avec

$$\begin{aligned}\mu\left(\theta,\dot{\theta}\right) &= 2\frac{\tan\theta}{\cos^2\theta}\dot{\theta}^2 + \left[\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{8l\lambda_2\dot{\theta}\tan\theta}{3\cos\theta} - \frac{\lambda_2\varphi_v}{ml\cos\theta}\right] \\ &\left[\frac{3[(M+m)g - ml\cos\theta\ \dot{\theta}^2]\sin\theta - 3\cos\theta\psi(\dot{x}) - 3\frac{M+m}{ml}\varphi(\dot{\theta})}{D}\right] \\ &+\lambda_1\left(g + \frac{4}{3}l\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}\right)\tan\theta + \lambda_2\left(g + \frac{4}{3}l\frac{\dot{\theta}^2(1+\sin^2\theta)}{\cos\theta}\right)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} \\ &-\left(\frac{\lambda_1}{ml\cos\theta} + \frac{\lambda_2\dot{\theta}\tan\theta}{ml\cos\theta}\right)\varphi(\dot{\theta}) - \frac{\lambda_2}{ml\cos\theta}\dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}),\end{aligned}$$

$$u = \left[\frac{3ml + 8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\sin\theta - 3\lambda_2\cos\theta\varphi_v}{mlD\cos\theta}\right]\tau, \tag{22}$$

et le terme incertain

$$\begin{aligned}(ml\cos\theta)\,z &= \left[\frac{ml}{\cos\theta} + \frac{8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\tan\theta}{3} - \lambda_2\varphi_v\right]\left[\frac{3\cos\theta}{D}\omega_1 + \frac{3(M+m)}{mlD}\omega_2\right] \\ &+\left(\lambda_1 + \lambda_2\dot{\theta}\tan\theta\right)\omega_2 + \lambda_2\dot{\omega}_2.\end{aligned}$$

Etant données les contraintes physiques, le gain λ_2 est choisi suffisamment petit pour assurer que $3ml + 8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\sin\theta - 3\lambda_2\cos\theta\varphi_v \neq 0$ dans (22). Le système décrit par :

$$\ddot{\eta} = -\left(g + \frac{4}{3}l\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}\right)(\xi + \lambda_1\eta + \lambda_2\dot{\eta}) + \frac{1}{ml\cos\theta}(\varphi - \omega_2). \tag{23}$$

et (21) est une forme régulière similaire à (7)[1], lorsque $\varphi = \omega_2 = 0$. Puisque (21) est similaire à (1), on propose la loi de commande u suivante :

$$u = -\mu\left(\theta,\dot{\theta}\right) - \alpha_1 sign(\xi) - \beta_1 sign(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi},$$

ce qui donne :

$$\tau = \frac{mlD\cos\theta\left(-\mu\left(\theta,\dot{\theta}\right) - \alpha_1 sign(\xi) - \beta_1 sign(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi}\right)}{\left[3ml + 8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\sin\theta - 3\lambda_2\cos\theta\varphi_v\right]}. \tag{24}$$

Supposons que ω_1, ω_2, $\dot{\omega_2}$ et $\dot{\theta}$ sont bornés. Alors z est une perturbation "matching", uniformément bornée par Δ, i.e. $|z| < \Delta$ pour presque tout t, θ et $\dot{\theta}$. Comme on vient de le montrer dans la Section II, en posant

$$\Delta < \beta_1 < \alpha_1 - \Delta \quad h, p \geq 0, \tag{25}$$

le contrôleur quasi-homogène (24), (25) assure la stabilité uniforme en temps fini du système $(\xi, \dot{\xi})$. La dynamique équivalente sur la surface $\xi = 0$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix}\dot{\eta}\\ \ddot{\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\lambda_1\rho & -\lambda_2\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{ml\cos\theta}\end{bmatrix}(\varphi - \omega_2). \tag{26}$$

avec $\rho = \left(g + \frac{4}{3}l\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}\right) > 0$, $\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Enfin, il reste à étudier la stabilité asymptotique de (26), lorsque $\varphi = \omega_2 = 0$. Notons qu'il existe un changement de base :

$$\Omega = \begin{bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{bmatrix},$$

avec

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \kappa & 1\end{bmatrix}, \kappa > 0,$$

qui transforme le système (26) sous la forme

$$\dot{\Omega} = \begin{bmatrix}-\kappa & 1\\ \kappa\sigma & \delta\end{bmatrix}\Omega, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{-\kappa^2 + \lambda_2\rho\kappa - \lambda_1\rho}{\kappa}\\ \delta &= \kappa - \lambda_2\rho.\end{aligned}$$

Soit $V(\Omega) = |\Omega| = \begin{bmatrix}|\Omega_1|\\ |\Omega_2|\end{bmatrix}$ une fonction de Lyapunov vectorielle [4], [11]. La dérivée de Dini à droite de $V(\Omega)$ donne $D^+V(\Omega) \leq \Gamma V(\Omega)$, avec $\Gamma = \begin{bmatrix}-\kappa & |1|\\ |\kappa\sigma| & \delta\end{bmatrix}$. Si

$$\lambda_2^2 > \frac{4\lambda_1}{\rho}, \tag{28}$$

il existe alors $\kappa > 0$ tels que $\kappa^2 - \lambda_2\rho\kappa + \lambda_1\rho < 0$ et

$$\Gamma = \begin{bmatrix}-\kappa & 1\\ \kappa\sigma & \delta\end{bmatrix}. \tag{29}$$

Notons que les termes non-constants dans (29) apparaissent dans la dernière ligne seulement et que Γ est une matrice de Metzler ($-M$ matrice). Cela permet d'appliquer la théorie de stabilité linéaire (voir [4], [11]). Par conséquence, sous la condition (28), $\Omega = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable du système non linéaire (27). Enfin, en prenant en compte le frottement du pendule $\varphi(\dot{\theta})$ ainsi que les perturbations non-matching $\omega_2(t)$, il est évident qu'on perd la stabilité asymptotique, mais il est prouvé dans la théorie de stabilité linéaire que le système linéaire perturbé (26) converge dans une boule autour de l'origine. On obtient ainsi une stabilité pratique. Le rayon de cette boule peut être diminué en ajustant les paramètres λ_1 and λ_2. Ceci sera soutenu par des résultats expérimentaux.

V. Simulations numériques et expérimentations

Pour illustrer l'efficacité de la commande proposée, des simulations numériques et des expérimentations ont été

[1]Pour pouvoir écrire les équations du pendule inversé sous la forme régulière (7), il faut écrire les équations d'état en fonction η et ξ. La forme régulière complète n'est pas donnée ici à cause du calcul relativement complexe qui doit être effectué pour la trouver. De plus, cette forme n'est pas essentielle pour la construction de la commande. En fait, (21) et (23) constituent la forme régulière parce que les variables d'état θ et $\dot{\theta}$ sont des fonctions implicites de η, $\dot{\eta}$, ξ et $\dot{\xi}$.

faites sur un pendule inversé situé au LAGIS à l'Ecole Centrale de Lille (voir Fig. 2). Les valeurs numériques suivantes sont utilisées :

$$M = 3.4kg \quad m = 0.147kg; \quad l = (0.351/2)m;$$

$$\lambda_1 = 0.2m^{-1}; \quad \lambda_2 = 0.25\,\mathrm{sec}\,/m.rad$$

$$K_1 = 40rad/sec^2; \quad K_2 = 20rad/sec; \quad h = 30rad/sec^2;$$

$$p = 0rad/sec; \quad \psi_v = 8.5Nsec/m$$

$$\varphi_v = 0.0015Nmsec/rad; \quad \sigma_x = 10000N/m$$

$$\sigma_\theta = 50Nm/rad; \quad \psi_c = 6.5N; \quad \varphi_c = 0.00115Nm$$

Les simulations ont été faites sans frottements et sans perturbations non-matching, avec les conditions initiales suivantes : $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T(0) = (0.2m, 1m/sec, 0.8rd, 2rd/sec)$. La condition initiale de θ est $\theta(0) = 0.8rd = 45.8°$ pour illustrer le grand domaine d'attraction ($\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$) du contrôleur. Les résultats sont présentés dans les figures 3 et 4. Comme on le prévoit théoriquement, le chariot ainsi que le pendule sont asymptotiquement stablisés.

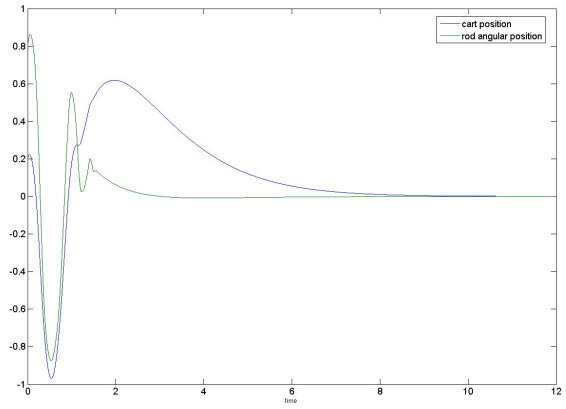


Fig. 3. Simulation numérique $x(m)$ et $\theta(rd)$

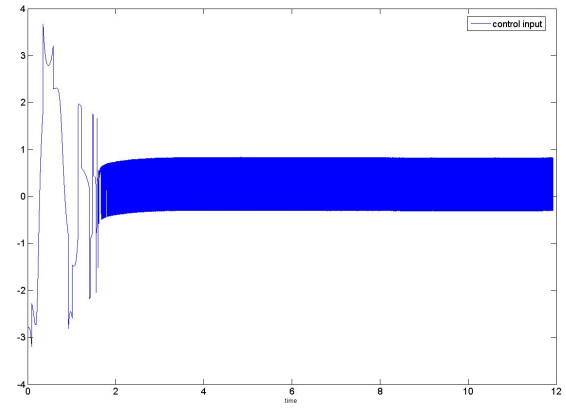


Fig. 4. Entrée de commande (volts).

Ensuite, des essais expérimentaux ont été faits sur le pendule inversé réel, ayant des frottements (non-matching) sur le pendule et des frottements (matching) sur le chariot. Pour mettre en évidence la robustesse du contrôleur, une perturbation a été manuellement appliquée au pendule pendant l'intervalle de temps allant de 6 à 10 secondes. En réglant les paramètres $\lambda_1 = 0.2$ et $\lambda_2 = 0.25$, de bonnes performances d'un point de vue stabilité et robustesse ont été obtenues (voir Fig. 5 et 6). On remarque que, dans l'interval $6 - 10$ secondes la commande est moins importante, ceci est dû à la force manuelle appliquée. Ce qu'on voit donc sur la figure est la résultante de la commande et de la perturbation manuelle. Enfin, à titre comparatif, un résultat expérimental pour un essai de stabilisation par retour d'état statique est présenté (Fig. 7). On voit bien l'apparition de cycles limites de grande amplitude.

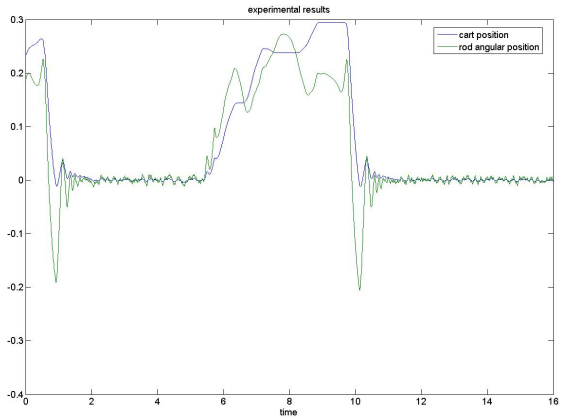


Fig. 5. Résultat expérimental (MGSO) $x(m)$ et $\theta(rd)$.

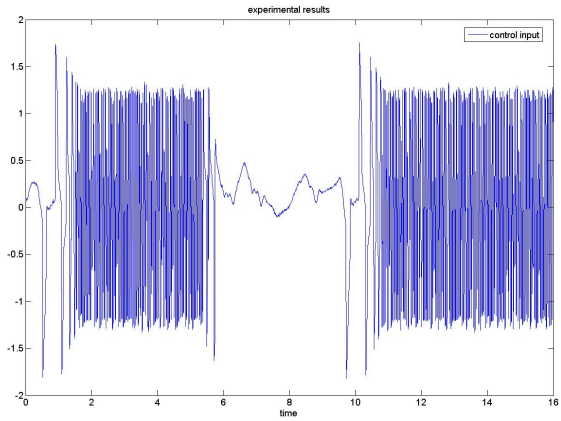


Fig. 6. Résultat expérimental (MGSO), entrée de commande (volts).

VI. Conclusions

La synthèse d'une commande quasi-homogène a été développée pour la stabilisation asymptotique de systèmes mécaniques sous-actionnés, opérant dans un milieu incertain.

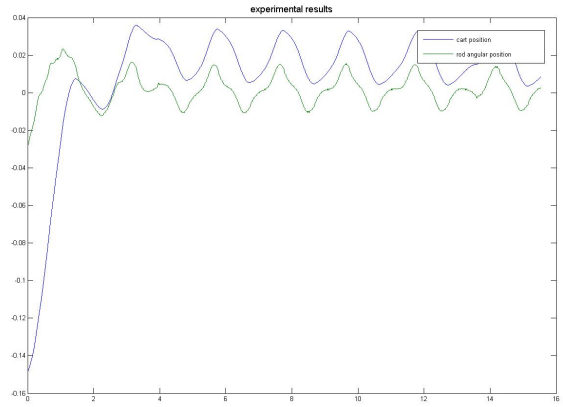


Fig. 7. Résultat expérimental avec un retour d'état statique, $x(m)$ et $\theta(rd)$

La synthèse proposée présente une alternative intéressante des modes glissants standard. Bien que le contrôleur quasi-homogène génère des modes Zénon, i.e. une infinité de commutations sur un intervalle de temps fini, ils n'aboutissent cependant pas à la génération des modes glissants standard sur les surfaces de commutation. Des MGSO apparaissent en fait sur les intersections des surfaces de commutations.

Pour stabiliser de tels systèmes autour d'une position d'équilibre instable, une sortie du système doit être choisie de telle sorte que la dynamique équivalente correspondante est localement asymptotiquement stable. Ensuite, les performances désirées du système bouclé sont assurées par l'application d'une commande quasi-homogène annulant la sortie fictive.

Les performances de la commande proposée ont été illustrées par des simulations numériques ainsi que des essais expérimentaux sur un pendule inversé à 2 degrés de liberté.

Références

[1] Bartolini G., Ferrara A. and Usai E. (2000). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **43**, 241-246.

[2] Bartolini G., Pisano A. and Usai E. (2002). Second order sliding mode control of container cranes. *Automatica*, **38**, 1783-1790.

[3] Bhat S. P. and Bernstein D. S. (1997). Finite-Time Stability of Homogeneous Systems. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2513-2514, Albuquerque, NM, USA.

[4] Borne P., Dambrine M., Perruquetti W., Richard J.P. Vector Lyapunov functions nonlinear, time-varying, ordinary and functional differential equations. In *Advances in Stability Theory at the End of the* 20*th Century*. edited by A. A. Martynyuk, Taylor & Francis, 2003.

[5] Canudas de Wit C. , Olsson H., Åström K. J., and Lischinsky P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, 419–425.

[6] Chatterjeea D., Patraa A., Joglekarb H.K.(2002). Swing-up and stabilization of a cart–pendulum system under restricted cart track length. *Systems & Control Letters,* **47**, 355–364.

[7] Fantoni I., Lozano R. and Spong M. (2000). Energy Based Control of the Pendubot. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **45**, 4, 725-729.

[8] Filippov A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

[9] Floquet T., Barbot J.-P., Perruquetti W. (2003). Higher order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed system, in *Automatica*, **39**, 1077-1083.

[10] Fridman L. and Levant A. (2002). Higher order sliding modes, in *Sliding mode control in engineering*, W. Perruquetti and J.-P. Barbot (eds.), New York : Marcel Dekker, 53-102.

[11] Grujić Lj., Gentina J.C., Borne P. (1976). General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms. *International Journal of Control*, 1976, **24**, 529–550.

[12] Hong Y., Huang J. and Xu Y. (2001). On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Trans. Auto. Ctrl.*, **46**, 305-309.

[13] Levant A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *Int. J. Contr.*, **58**, 1247-1263.

[14] Levant A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, **41**, 8237–830.

[15] Liberzon D. (2003). *Switching in Systems and Control* Birkhauser : Boston.

[16] Lozano R., Fantoni I., Block D.J. Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems & Control Letters* 40 (2000) 197-204.

[17] Lygeros J., Johansson K.H., Simic S.N., Zhang J., and Sastry S.S. (2003). Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **48**, 2–17.

[18] Orlov Y. (2003). Extended invariance principle for nonautonomous switched systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **48**, 1448–1452.

[19] Orlov Y. (2005). Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Optimization and Control*, **43**, 1253–1271.

[20] Orlov Y., Aguilar L., and Cadiou J. (2003). Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servomotors. *Int. J. Contr.*, **76**, 959-967.

[21] Orlov Y., Alvarez J., Acho L., and L. Aguilar (2003). Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control. *Intern. J. Contr.*, **76**, 1446–1452.

[22] Ortega R., Gomez-Estern F., and Blankenstein G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans. Automat.Contr.*, **47**, 1218–1233.

[23] Perruquetti W., Floquet T., Orlov Y. (2003), Finite time stabilization of interconnected second order nonlinear systems, *Conference on Decision and Control*, Hawaï, USA, December 2003.

[24] Rosier L. (1992). Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Syst. Contr. Lett.*, **19**, 467-473.

[25] Spong M.W. (1995). The Swing Up Contol Problem for the Acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 49-55.

[26] Sussman H.J. and Kokotovic P.V. (1991). The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat.Contr.*, **36**, 424-440.

[27] Utkin V.I., Guldner J. and Shi J. (1999). *Sliding modes in Electromechanical Systems*. London : Taylor and Francis.

[28] Wei Q., Dayawansa W.P., and Levine W.S. (1995). Nonlinear control for an inverted pendulum having restricted travel. *Automatica*, **31**, 841–850.

[29] Zhao J., Spong M.W. Hybrid control for global stabilization of the cart pendulum system. *Automatica*, **37**, (2001), 1941-1951.