Estimation des paramètres des systèmes linéaires : approche algébrique

Yang Tian, Thierry Floquet, Wilfrid Perruquetti

Estimation des paramètres des systèmes linéaires : approche algébrique

Yang TIAN[1], Thierry FLOQUET[1], Wilfrid PERRUQUETTI[1]

[1]Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal
Ecole Centrale de Lille, BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

yang.tian@inria.fr,
thierry.floquet@ec-lille.fr, wilfrid.perruquetti@ec-lille.fr

Résumé— **Le développement de deux expressions formelles d'estimation des paramètres par une approche algébrique constitue la principale motivation de cet article, ces deux expressions étant obtenues en suivant les idées introduites par M. Fliess et H. Sira-Ramirez parues dans [1], [2]. Cette approche est dédiée à une classe générale de systèmes linéaires stationnaires. Les expressions formelles des paramètres inconnus sont obtenues en fonction d'intégrales portant sur la sortie et sur l'entrée. Pour ce faire, on applique les outils mathématiques suivants : la transformation de Laplace, la formule de Leibniz et les outils issus du calcul opérationnel. Un example en dimension trois d'un moteur à courant continu et des simulations sont donnés afin d'illustrer les performances de cette approche.**

Mots-clés— **Systèmes linéaires, estimation des paramétrique, approche algébrique.**

I. INTRODUCTION

Version provisoire.

De nombreux modèles font intervenir des paramètres qui doivent être estimés afin de faire des prévisions d'évolution du système ou afin d'élaborer une loi de commande. Les mesures obtenues sur le processus, augmentées de la connaissance des excitations appliquées à ce dernier, permettent de constituer les données utiles (lorsque cela est possible) à la determination de ces paramètres. Les deux principales méthodes utilisées sont[1] :

– la méthode des moindres carrés (LS, RLS, RELS) (pour plus de détails voir [3]),
– la mise en place d'un observateur (en général à convergence asymptotique[2]).

Les principales faiblesses relatives de ces techniques sont liées aux bruits de mesure, au caractère asymptotique de la convergence (observateur) et à la difficulté de les mettre en œuvre pour une identification en ligne et en boucle fermée.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'estimation paramétrique pour des systèmes linéaires stationnaires. Récemment, M. Fliess et H. Sira-Ramirez ont développé une nouvelle approche basée sur des méthodes algébriques [1], [2]. Cette approche possède les propriétés suivantes :

– les calculs peuvent être effectués par un ordinateur et d'une manière très rapide,
– l'identification en boucle fermée est possible grâce à une identification en temps réel (en temps très petit),
– une bonne robustesse par rapport au bruit de mesure (qu'il soit blanc ou d'une autre nature) peut être obtenue.

[1]Bien qu'il existe d'autres techniques, elles sont relativement moins répandues

[2]Depuis peu des observateurs en temps fini commencent à voir le jour (voir par exemple [4], [5], [6]), mais ils n'ont pas encore été exploités pour de l'identification car ils sont, en général, relativement sensible aux bruits de mesure.

Le travail présenté ici a pour but de donner l'expression formelle d'estimation des paramètres par cette approche algébrique.

II. PROBLÉMATIQUE

Considérons un système linéaire stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée et $y \in \mathbb{R}^d$ est la sortie. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{d\times n}$ sont des matrices constantes. Par la suite on considérera des systèmes monovariables, c'est-à-dire : $m = d = 1$, soit $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Dans cet article, une approche algébrique est considérée pour l'estimation des paramètres. Dans [1], [2], la notion d'identifiabilité est revisitée du point de vue de l'algèbre différentielle. Dans ce cas, on dit que les paramètres inconnus $\Theta = (\theta_1 \ldots \theta_\tau)$ sont linéairement identifiables si et seulement si

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots \\ \theta_\tau\end{pmatrix} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}$$

où

– les entrées des matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$, de dimensions respectives $\tau\times\tau$ et $\tau\times 1$, appartiennent à $\mathrm{span}_{k_0(s)[\frac{d}{dt}]}(u,y)$,
– $\det(\mathbf{P}) \neq 0$,
– $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^\tau$ avec les entrées appartenant à $\mathrm{span}_{k(s)[\frac{d}{dt}]}(\pi)$, π étant le vecteur des perturbations.

Le but est d'estimer les paramètres inconnus d'une manière rapide et sur la base de mesures bruitées. Pour cela, l'expression formelle des paramètres est déterminée en fonction d'intégrales portant sur la sortie et l'entrée. L'influence des bruits sur la mesure peut également être réduite avec l'opération intégrale qui a un effet de filtrage.

III. APPROCHE ALGÉBRIQUE POUR L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Considérons le système (1). On obtient la relation entrée/sortie :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i\, u^{(i)} \tag{2}$$

avec $a_n = 1$ et $m < n$.

Nous donnons maintenant l'expression formelle des paramètres du système obtenu selon deux méthodes basée sur une approche algébrique.

A. Première Méthode

Théorème 1: Pour les systèmes linéaires à paramètres invariants dans le temps avec la relation entrée/sortie (2), les estimations des coefficients constants inconnus $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_m$ sont données par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_0 \\ \vdots \\ \widehat{a}_{n-1} \\ \widehat{b}_0 \\ \vdots \\ \widehat{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{1a} & -\mathbb{F}_{1b} \\ \mathbb{F}_{2a} & -\mathbb{F}_{2b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -F_{n,1}[y(t)] \\ \vdots \\ -F_{n,n}[y(t)] \\ -F_{n,n+1}[y(t)] \\ \vdots \\ -F_{n,n+m+1}[y(t)] \end{pmatrix} \tag{3}$$

avec

$$\mathbb{F}_{1a} = \begin{pmatrix} F_{0,1}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,n}[y(t)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}_{1b} = \begin{pmatrix} F_{0,1}[u(t)] & \ldots & F_{m,1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n}[u(t)] & \ldots & F_{m,n}[u(t)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}_{2a} = \begin{pmatrix} F_{0,n+1}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,n+1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n+m+1}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,n+m+1}[y(t)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}_{2b} = \begin{pmatrix} F_{0,n+1}[u(t)] & \ldots & F_{m,n+1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n+m+1}[u(t)] & \ldots & F_{m,n+m+1}[u(t)] \end{pmatrix}$$

$$F_{i,p}[f(t)] = \sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j f(\tau) d\tau}{(2n-i-j+p-1)!} \tag{4}$$

$$c_{i,j} = \binom{n}{j} \frac{i!}{(i+j-n)!} \tag{5}$$

où l'indice $p \in [1, P]$ et P représentant le nombre de paramètres inconnus que l'on désire estimer et qui varie dans l'intervalle $[1, n+m+1]$.

Preuve

a) Application de la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (2) :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(s^i y_{(s)} - s^{i-1} y_{(0)} - \ldots - y_{(0)}^{(i-1)} \right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(s^i u_{(s)} - s^{i-1} u_{(0)} - \ldots - u_{(0)}^{(i-1)} \right) \tag{6}$$

b) Manipulation algébrique.

Pour éliminer les conditions initiales, on dérive l'expression précédente n fois par rapport à s en utilisant la formule de Leibniz :

$$\frac{d^h(x(s)y(s))}{ds^h} = \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}(x(s))}{ds^{h-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j},$$

et la relation :

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{si } 0 < k \le l \\ 0, & \text{si } 0 < l < k \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & \text{si } l < 0 < k \end{cases} \tag{7}$$

On obtient alors :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \binom{n}{j} \frac{i! s^{i+j-n}}{(i+j-n)!} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \binom{n}{j} \frac{i! s^{i+j-n}}{(i+j-n)!} \frac{d^j(u(s))}{ds^j} \right). \tag{8}$$

Multiplions les deux membres de (8) par $s^{-(n+p)}$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j}}{s^{2n+p-i-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} = \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j}}{s^{2n+p-i-j}} \frac{d^j(u(s))}{ds^j} \tag{9}$$

c) Retour dans le domaine temporel.

Rappelons la transformation inverse de Laplace et la formule qui transforme une intégrale double en une intégrale simple :

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^l} \frac{d^k Y(s)}{ds^k} \right) = \int \ldots \int (-\tau_1)^k y(\tau_1) d\tau_1 \ldots d\tau_l, \quad l \ge 1$$

$$\int \ldots \int y(\tau_1) d\tau_1 \ldots d\tau_l = \int_0^t \frac{(t-\tau_1)^{l-1} y(\tau_1)}{(l-1)!} d\tau_1 \tag{10}$$

Avec ces deux formules, on obtient :

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^l} \frac{d^k Y(s)}{ds^k} \right) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{l-1}(-\tau)^k y(\tau)}{(l-1)!} d\tau, \quad l \ge 1$$

Donc,

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{2n+1-i-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2n-i-j}(-\tau)^j y(\tau)}{(2n-i-j)!} d\tau$$

et la transformation inverse de Laplace de (9) est :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j y(\tau) d\tau}{(2n-i-j+p-1)!} \right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j u(\tau) d\tau}{(2n-i-j+p-1)!} \right).$$

On obtient donc P relations liant les paramètres et on peut écrire l'expression formelle de l'estimation de l'ensemble des paramètres sous la forme (3) en prenant $P = n+m+1$.

B. Deuxième Méthode

Théorème 2: Pour les systèmes linéaires à paramètres invariants dans le temps avec la relation entrée/sortie (2), les estimations des coefficients constants inconnus $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_m$ sont données par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \widehat{a}_0 \\ \vdots \\ \widehat{a}_{n-1} \\ \widehat{b}_0 \\ \vdots \\ \widehat{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_{1a} & -\tilde{\mathbb{F}}_{1b} \\ \tilde{\mathbb{F}}_{2a} & -\tilde{\mathbb{F}}_{2b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\tilde{F}_{n,1}[y(t)] \\ \vdots \\ -\tilde{F}_{n,n}[y(t)] \\ -\tilde{F}_{n,n+1}[y(t)] \\ \vdots \\ -\tilde{F}_{n,n+m+1}[y(t)] \end{pmatrix} \tag{11}$$

avec

$$\tilde{\mathbb{F}}_{1a} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{0,1}[y(t)] & \dots & \tilde{F}_{n-1,1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{F}_{0,n}[y(t)] & \dots & \tilde{F}_{n-1,n}[y(t)] \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbb{F}}_{1b} = \begin{pmatrix} -\tilde{F}_{0,1}[u(t)] & \dots & \tilde{F}_{m,1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{F}_{0,n}[u(t)] & \dots & \tilde{F}_{m,n}[u(t)] \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbb{F}}_{2a} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{0,n+1}[y(t)] & \dots & \tilde{F}_{n-1,n+1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{F}_{0,n+m+1}[y(t)] & \dots & \tilde{F}_{n-1,n+m+1}[y(t)] \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbb{F}}_{2b} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{0,n+1}[u(t)] & \dots & \tilde{F}_{m,n+1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{F}_{0,n+m+1}[u(t)] & \dots & \tilde{F}_{m,n+m+1}[u(t)] \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_{i,p}[f(t)] = \sum_{j=n+p-1-i}^{n+p-1} \frac{\tilde{c}_{i,j,p} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j f(\tau)d\tau}{(2n-i-j+p-1)!} \tag{12}$$

$$\tilde{c}_{i,j,p} = \binom{n+p-1}{j} \frac{i!}{(i+j-n-p+1)!} \tag{13}$$

où l'indice $p \in [1,P]$ et P représente le nombre de paramètres inconnus que l'on désire estimer et qui varie dans l'intervalle $[1, n+m+1]$.

Preuve
a) Application de la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (2) :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(s^i y_{(s)} - s^{i-1}y_{(0)} - \dots - y_{(0)}^{(i-1)}\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(s^i u_{(s)} - s^{i-1}u_{(0)} - \dots - u_{(0)}^{(i-1)}\right) \tag{14}$$

b) Manipulation algébrique.

Pour éliminer les conditions initiales, on dérive l'expression précédente $n+p-1$ fois par rapport à s en utilisant la formule de Leibniz et la relation (7), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=n+p-i-1}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{j} \frac{i! s^{i+j-n-p+1}}{(i+j-n-p+1)!} \frac{d^j(y(s))}{ds^j}\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=n+p-i-1}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{j} \frac{i! s^{i+j-n-p+1}}{(i+j-n-p+1)!} \frac{d^j(u(s))}{ds^j}\right).$$

Posons $\tilde{c}_{i,j,p} = \binom{n+p-1}{j} \frac{i!}{(i+j-n-p+1)!}$ et multiplions les deux membres de l'expression précédente par $s^{-(n+1)}$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=n+p-1-i}^{n+p-1} \frac{\tilde{c}_{i,j,p}}{s^{2n+p-i-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} = \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=n+p-1-i}^{n+p-1} \frac{\tilde{c}_{i,j,p}}{s^{2n+p-i-j}} \frac{d^j(u(s))}{ds^j} \tag{15}$$

c) Retour dans le domaine temporel.

La transformation inverse de Laplace de (15) est :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=n+p-1-i}^{n+p-1} \frac{\tilde{c}_{i,j,p} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j y(\tau)d\tau}{(2n-i-j+p-1)!}\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=n+p-1-i}^{n+p-1} \frac{\tilde{c}_{i,j,p} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j u(\tau)d\tau}{(2n-i-j+p-1)!}\right).$$

Donc, on peut réécrire l'expression formelle de l'estimation des paramètres sous la forme (11).

IV. EXEMPLE : MOTEUR A COURANT CONTINU

Un moteur à courant continu est décrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 \\ J\dot{x}_2 & = K_1 x_3 \\ L\dot{x}_3 & = -Rx_3 - K_2 x_2 + u \end{cases}$$

où $y = x_1$ est la sortie measurable ; x_1 est la position angulaire du rotor, x_2 est la vitesse angulaire du rotor, x_3 est le courant du rotor et u est la tension d'entrée. K_1, K_2, J, L et R sont des paramètres constants et strictement positifs.

A. *Approche algébrique*

Partons de la relation entrée/sortie :

$$y^{(3)}(t) + \frac{R}{L}y^{(2)}(t) + \frac{K_2K_1}{LJ}\dot{y}(t) = \frac{K_1}{LJ}u(t) \tag{16}$$

Les états $x(t)$ sont exprimés en fonction de la sortie y :

$$\begin{cases} x_1 & = y(t) \\ x_2 & = \dot{y}(t) \\ x_3 & = \frac{J}{K_1}y^{(2)}(t) \end{cases}$$

Dans cet exemple, puisqu'on normalise $a_3 = 1$ et qu'on a $a_0 = 0$, on a seulement 3 paramètres inconnus $a_1 = \frac{K_2K_1}{LJ}$, $a_2 = \frac{R}{L}$ et $b_0 = \frac{K_1}{LJ}$ à estimer.

Méthode 1
a) Application de la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (16) :

$$\left(s^3y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - y^{(2)}(0)\right) + \frac{R}{L}\left(s^2y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(sy(s) - y(0)\right) = \frac{K_1}{LJ}u(s) \tag{17}$$

b) Manipulation algébrique.
Dériver trois fois (17) par rapport à s pour éliminer les conditions initiales :

$$\left(6y(s) + 18s\frac{dy(s)}{ds} + 9s^2\frac{d^2y(s)}{ds^2} + s^3\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{R}{L}\left(6\frac{dy(s)}{ds} + 6s\frac{d^2y(s)}{ds^2} + s^2\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(3\frac{d^2y(s)}{ds^2} + s\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{d^3u(s)}{ds^3} \tag{18}$$

Multiplier les deux membres de (18) par s^{-4} :

$$\left(\frac{6}{s^4}y(s)+\frac{18}{s^3}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{9}{s^2}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{6}{s^4}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{6}{s^3}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^2}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(\frac{3}{s^4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^3}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{1}{s^4}\frac{d^3u(s)}{ds^3} \quad (19)$$

Multiplier les deux membres de (18) par s^{-5} :

$$\left(\frac{6}{s^5}y(s)+\frac{18}{s^4}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{9}{s^3}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^2}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{6}{s^5}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{6}{s^4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^3}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(\frac{3}{s^5}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^4}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{1}{s^5}\frac{d^3u(s)}{ds^3} \quad (20)$$

Multiplier les deux membres de (18) par s^{-6} :

$$\left(\frac{6}{s^6}y(s)+\frac{18}{s^5}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{9}{s^4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^3}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{6}{s^6}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{6}{s^5}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^4}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(\frac{3}{s^6}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^5}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{1}{s^6}\frac{d^3u(s)}{ds^3} \quad (21)$$

c) Revenir dans le domaine temporel.

En appliquant la transformation inverse de Laplace aux relations (19), (20) et (21), et en utilisant la formule (10) qui transforme une intégrale double en une intégrale simple, on obtient l'expression suivante qui fournit les relations entre ces trois paramètres inconnus en fonction d'intégrales portant sur la sortie $y(t)$ et l'entrée $u(t)$.

$$\begin{pmatrix}\widehat{a}_1(t)\\ \widehat{a}_2(t)\\ \widehat{b}_0(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{1,1}[y(t)] & F_{2,1}[y(t)] & -F_{0,1}[u(t)]\\ F_{1,2}[y(t)] & F_{2,2}[y(t)] & -F_{0,2}[u(t)]\\ F_{1,3}[y(t)] & F_{2,3}[y(t)] & -F_{0,3}[u(t)]\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}-F_{3,1}[y(t)]\\ -F_{3,2}[y(t)]\\ -F_{3,3}[y(t)]\end{pmatrix} \quad (22)$$

avec

$$F_{1,1}[y(t)] = \int_0^t [3\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^2 y(\phi) - \frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^3 y(\phi)]d\phi$$
$$F_{2,1}[y(t)] = \int_0^t [-6\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi y(\phi) + 6\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^2 y(\phi) - (t-\phi)\phi^3 y(\phi)]d\phi$$
$$F_{0,1}[u(t)] = -\int_0^t \frac{(t-\phi)^3}{3}\phi^3 u(\phi)d\phi$$
$$F_{3,1}[y(t)] = \int_0^t [6\frac{(t-\phi)^3}{3!}y(\phi) - 18\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi y(\phi) + 9(t-\phi)\phi^2 y(\phi) - \phi^3 y(\phi)]d\phi$$

$$F_{1,2}[y(t)] = \int F_{1,1}[y(t)] \qquad F_{1,3}[y(t)] = \int F_{1,2}[y(t)]$$
$$F_{2,2}[y(t)] = \int F_{2,1}[y(t)] \qquad F_{2,3}[y(t)] = \int F_{2,2}[y(t)]$$
$$F_{0,2}[u(t)] = \int F_{0,1}[u(t)] \qquad F_{0,3}[u(t)] = \int F_{0,2}[u(t)]$$
$$F_{3,2}[y(t)] = \int F_{3,1}[y(t)] \qquad F_{3,3}[y(t)] = \int F_{3,2}[y(t)]$$

Méthode 2

a) Application de la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (16) :

$$\left(s^3y(s)-s^2y(0)-s\dot{y}(0)-y^{(2)}(0)\right) + \frac{R}{L}\left(s^2y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(sy(s)-y(0)\right) = \frac{K_1}{LJ}u(s) \quad (23)$$

b) Manipulation algébrique.

Dériver trois fois (23) par rapport à s pour éliminer les conditions initiales :

$$\left(6y(s)+18s\frac{dy(s)}{ds}+9s^2\frac{d^2y(s)}{ds^2}+s^3\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{R}{L}\left(6\frac{dy(s)}{ds}+6s\frac{d^2y(s)}{ds^2}+s^2\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(3\frac{d^2y(s)}{ds^2}+s\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{d^3u(s)}{ds^3} \quad (24)$$

Multiplier les deux membres de (24) par s^{-4} :

$$\left(\frac{6}{s^4}y(s)+\frac{18}{s^3}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{9}{s^2}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{6}{s^4}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{6}{s^3}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^2}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(\frac{3}{s^4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{1}{s^3}\frac{d^3y(s)}{ds^3}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{1}{s^4}\frac{d^3u(s)}{ds^3} \quad (25)$$

Dériver (23) par rapport à s quatre fois :

$$\left(24\frac{dy(s)}{ds}+36s\frac{d^2y(s)}{ds^2}+12s^2\frac{d^3y(s)}{ds^3}+s^3\frac{d^4y(s)}{ds^4}\right) + \frac{R}{L}\left(12\frac{d^2y(s)}{ds^2}+8s\frac{d^3y(s)}{ds^3}+s^2\frac{d^4y(s)}{ds^4}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(4\frac{d^3y(s)}{ds^3}+s\frac{d^4y(s)}{ds^4}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{d^4u(s)}{ds^4} \quad (26)$$

Multiplier les deux membres de (26) par s^{-4} :

$$\left(\frac{24}{s^4}\frac{dy(s)}{ds}+\frac{36}{s^3}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{12}{s^2}\frac{d^3y(s)}{ds^3}+\frac{1}{s}\frac{d^4y(s)}{ds^4}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{12}{s^4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{8}{s^3}\frac{d^3y(s)}{ds^3}+\frac{1}{s^2}\frac{d^4y(s)}{ds^4}\right) + \frac{K_2K_1}{LJ}\left(\frac{4}{s^4}\frac{d^3y(s)}{ds^3}+\frac{1}{s^3}\frac{d^4y(s)}{ds^4}\right) = \frac{K_1}{LJ}\frac{1}{s^4}\frac{d^4u(s)}{ds^4} \quad (27)$$

Dériver (23) par rapport à s cinq fois :

$$\begin{aligned}&\left(60\frac{d^2y(s)}{ds^2}+60s\frac{d^3y(s)}{ds^3}+15s^2\frac{d^4y(s)}{ds^4}+s^3\frac{d^5y(s)}{ds^5}\right)\\&\quad+\frac{R}{L}\left(20\frac{d^3y(s)}{ds^3}+10s\frac{d^4y(s)}{ds^4}+s^2\frac{d^5y(s)}{ds^5}\right)\\&\quad+\frac{K_2K_1}{LJ}\left(5\frac{d^4y(s)}{ds^4}+s\frac{d^5y(s)}{ds^5}\right)=\frac{K_1}{LJ}\frac{d^5u(s)}{ds^5}\end{aligned}\tag{28}$$

Multiplier les deux membres de (28) par s^{-4} :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{60}{s^4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{60}{s^3}\frac{d^3y(s)}{ds^3}+\frac{15}{s^2}\frac{d^4y(s)}{ds^4}+\frac{1}{s}\frac{d^5y(s)}{ds^5}\right)\\&\quad+\frac{R}{L}\left(\frac{20}{s^4}\frac{d^3y(s)}{ds^3}+\frac{10}{s^3}\frac{d^4y(s)}{ds^4}+\frac{1}{s^2}\frac{d^5y(s)}{ds^5}\right)\\&\quad+\frac{K_2K_1}{LJ}\left(\frac{5}{s^4}\frac{d^4y(s)}{ds^4}+\frac{1}{s^3}\frac{d^5y(s)}{ds^5}\right)=\frac{K_1}{LJ}\frac{1}{s^4}\frac{d^5u(s)}{ds^5}\end{aligned}\tag{29}$$

Après avoir appliqué la transformation inverse de Laplace aux relations (25), (27) et (29), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix}\widehat{a}_1(t)\\ \widehat{a}_2(t)\\ \widehat{b}_0(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{F}_{1,1}[y(t)] & \tilde{F}_{2,1}[y(t)] & -\tilde{F}_{0,1}[u(t)]\\ \tilde{F}_{1,2}[y(t)] & \tilde{F}_{2,2}[y(t)] & -\tilde{F}_{0,2}[u(t)]\\ \tilde{F}_{1,3}[y(t)] & \tilde{F}_{2,3}[y(t)] & -\tilde{F}_{0,3}[u(t)]\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\tilde{F}_{3,1}[y(t)]\\ -\tilde{F}_{3,2}[y(t)]\\ -\tilde{F}_{3,3}[y(t)]\end{pmatrix}\tag{30}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1,1}[y(t)]&=\int_0^t[3\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^2y(\phi)-\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^3y(\phi)]d\phi\\ \tilde{F}_{2,1}[y(t)]&=\int_0^t[-6\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi y(\phi)+6\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^2y(\phi)\\&\quad-(t-\phi)\phi^3y(\phi)]d\phi\\ \tilde{F}_{0,1}[u(t)]&=-\int_0^t\frac{(t-\phi)^3}{3}\phi^3u(\phi)d\phi\\ \tilde{F}_{3,1}[y(t)]&=\int_0^t[6\frac{(t-\phi)^3}{3!}y(\phi)-18\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi y(\phi)\\&\quad+9(t-\phi)\phi^2y(\phi)-\phi^3y(\phi)]d\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1,2}[y(t)]&=\int_0^t[-4\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^3y(\phi)+\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^4y(\phi)]d\phi\\ \tilde{F}_{2,2}[y(t)]&=\int_0^t[12\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^2y(\phi)-8\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^3y(\phi)\\&\quad+(t-\phi)\phi^4y(\phi)]d\phi\\ \tilde{F}_{0,2}[u(t)]&=\int_0^t\frac{(t-\phi)^3}{3}\phi^4u(\phi)d\phi\\ \tilde{F}_{3,2}[y(t)]&=\int_0^t[-24\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi y(\phi)+36\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^2y(\phi)\\&\quad-12(t-\phi)\phi^3y(\phi)+\phi^4y(\phi)]d\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1,3}[y(t)]&=\int_0^t[5\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^4y(\phi)-\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^5y(\phi)]d\phi\\ \tilde{F}_{2,3}[y(t)]&=\int_0^t[-20\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^3y(\phi)+10\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^4y(\phi)\\&\quad-(t-\phi)\phi^5y(\phi)]d\phi\\ \tilde{F}_{0,3}[u(t)]&=-\int_0^t\frac{(t-\phi)^3}{3}\phi^5u(\phi)d\phi\\ \tilde{F}_{3,3}[y(t)]&=\int_0^t[60\frac{(t-\phi)^3}{3!}\phi^2y(\phi)-60\frac{(t-\phi)^2}{2!}\phi^3y(\phi)\\&\quad+15(t-\phi)\phi^4y(\phi)-\phi^5y(\phi)]d\phi\end{aligned}$$

B. Simulation

L'estimation des paramètres et la robustesse par rapport au bruit de mesure sont illustrées en simulation. Conditions initiales : $x_3(0)=3(A)$, $x_2(0)=0(rad/s)$ et $x_1(0)=1(rad)$ avec la tension d'entrée $u(t)=24\sin(t)$. Les paramètres suivants sont utilisés pour la simulation : $K1=1(N/(m\cdot A))$, $K2=2(N/(m\cdot A))$, $L=0.1(H)$, $R=1(\Omega)$ et $J=5(N\cdot s^2/m\cdot rad)$. Donc $a_1=\frac{K_2K_1}{LJ}=4$, $a_2=\frac{R}{L}=10$ et $b_0=\frac{K_1}{LJ}=2$.

Il faut noter qu'au temps $t=0$, les matrices et les vecteurs servant à obtenir les coefficients dans les relations (22) et (30) sont nuls, et les paramètres sont alors indéterminés. Nous devons donc commencer à évaluer la formule non pas au temps $t=0$ mais après un court instant ε (quand $t\in[0,\varepsilon]$, on fige les paramètres à 0).

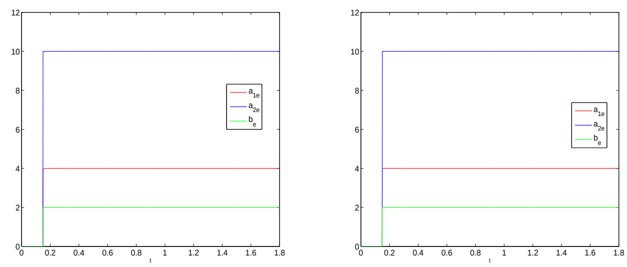

Fig. 1. Paramètres réels et ses valeurs estimés (sans bruit).

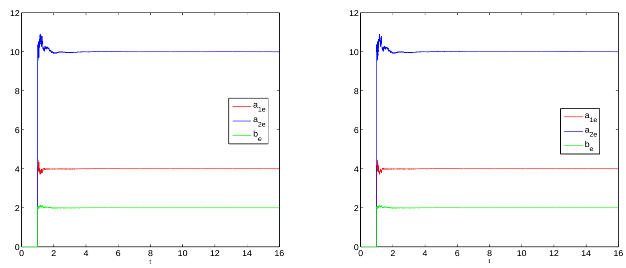

Fig. 2. Paramètres réels et ses valeurs estimés (avec le bruit blanc).

La figure 1 (où la figure de gauche est le résultat de la première méthode alors que la figure de droite est le résultat de la deuxième méthode) montre que l'estimateur fonctionne bien puisque les paramètres estimés atteignent exactement les paramètres réels après un temps petit ε (ici on choisit $\varepsilon=0.15s$).

Dans la figure 2, le signal mesuré $y(t)$ est perturbé par un bruit blanc (généré par ordinateur), répartie uniformément dans l'intervalle $[-0.004, 0.004]$, avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz et $\varepsilon = 0.8s$. On peut voir que l'estimateur est peu sensible par rapport au bruit blanc.

V. Conclusion

Dans cet article, deux expressions formelles pour l'estimation des paramètres par une approche algébrique ont été développées. Cette approche est dédiée à une classe générale de systèmes linéaires stationnaires. Remarquons que cette approche possède de bonnes propriétés de robustesse par rapport au bruit blanc.

Références

[1] M. Fliess et H. Sira-Ramirez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim.*, 9 :151–168, 2003.

[2] M. Fliess et H. Sira-Ramirez. Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. *Continuous-Time Model Identification from Sampled Data*. Springer, Berlin, 2008.

[3] Landau I. D. *Identification et commande des systèmes. 2e édition revue et augmentée*. Hermès, 1993.

[4] T. Floquet et J.P. Barbot. A sliding mode approach of unknown input observers for linear systems. *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2004.

[5] T. Floquet, J. A. Twiddle, et S. K. Spurgeon. Parameter estimation via second order sliding modes with application to thermal modelling in a high speed rotating machine. *IEEE International Conference on Industrial Technology, ICIT'06*, 2006.

[6] W. Perruquetti, T. Floquet, et E. Moulay. Finite time observers : application to secure communication. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53 :356–360, 2008.