# Coefficient d'ajustement pour des processus de risque dans des contextes de dépendance

Hélène Cossette, Etienne Marceau, Véronique Maume-Deschamps

# Coefficient d'ajustement pour des processus de risque, dans des contextes de dépendance.

# Adjustment coefficient for risk processes in some dependent contexts.

Hélène Cossette[1] & Étienne Marceau[1] & Véronique Maume-Deschamps[2]

1 *École d'actuariat, Pavillon Alexandre-Vachon , local 4423, Université Laval, Québec, Québec, Canada, G1V 0A6*

2 *Université de Lyon, Université Lyon 1, ISFA, laboratoire SAF, 50 avenue Tony Garnier, 69366 LYON CEDEX 7, FRANCE.*

**Résumé**

Nous étudions le coefficient d'ajustement de la théorie de la ruine dans un contexte de dépendance temporelle. Le coefficient d'ajustement, pour des données indépendantes a été étudié par de nombreux auteurs. Nous utilisons ici la définition de Müller et Pflug [8] pour des variables dépendantes. Nous construisons un estimateur consistant de ce coefficient dans un cadre de dépendance faible général. Pour des cas particuliers ayant un sens en théorie de la ruine / actuariat, nous explicitons le coefficient d'ajustement et procédons à des simulations.

**Abstract**

We study the adjustment coefficient of ruin theory in a context of temporal dependency. For independent data, the adjustment coefficient has been widely studied. We use here the definition of Müller and Pflug [8] for dependent variables. We provide a consistent estimator of this coefficient in a general context of weak dependence. In some special cases relevant in ruin theory and actuariat, we compute explicitly the adjustment coefficient and perform some simulations.

## 1 Introduction

L'objectif est de proposer un cadre de dépendance temporelle dans lequel on a des résultats d'estimation du coefficient d'ajustement de la théorie de la ruine.

Considérons un processus de risque $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$(X_i = P_i - G_i$ : pertes - gains à l'année $i)$ et $R_M$, l'événement $\{Y_n > M$ pour un $n \geq 1\}$ i.e l'évènement de ruine. Un des objectifs de la théorie de la ruine est d'évaluer $\mathbb{P}(R_M)$.

## 1.1 Coefficient d'ajustement

Dans le cas où les $X_i$ sont indépendants et identiquement distribués, le coefficient d'ajustement $w > 0$ est l'unique solution positive de $\lambda(w) = 0$ avec

$$\lambda(t) = \log \mathbb{E}\left[\exp(tX_1)\right]$$

s'il existe (voir la condition de Mammischt [7] détaillée ci-dessous, en particulier, l'existence de moments exponentiels est nécessaire). Le coefficient d'ajustement donne le comportement asymptotique de la probabilité de ruine via les résultats suivants dûs à Gerber et Lundberg ([4]) :
Soit $T$ le temps de ruine, ($T = \inf\{k \in \mathbb{N} \ / \ Y_k > M\}$),

$$\mathbb{P}(R_M) = \mathbb{P}(T < \infty) = \frac{e^{-wM}}{\mathbb{E}[e^{-wY_T} | T < \infty]},$$

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\log \mathbb{P}(R_M)}{M} = -w.$$

Müller et Pflug [8] généralisent la définition de coefficient d'ajustement ainsi que le résultat asymptotique ci-dessus. S'il existe $u_0 > 0$ tel que

- pour tout $0 < u < u_0$, la limite
$$c(u) = \lim_{n \to \infty} c_n(u) \text{ avec } c_n(u) = \frac{\log \mathbb{E}\left[\exp(uY_n)\right]}{n} \text{ existe.} \qquad (1)$$
- il existe $0 < u < u_0$ tel $c(u) = 0$, on notera $w^d$ la solution (nécessaire unique par convexité) de cette équation.

alors,

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\log \mathbb{P}(R_M)}{M} = -w^d. \qquad (2)$$

Évidemment, dans le cas i.i.d., $w = w^d$.
Nous proposons une procédure d'estimation de $w$ et $w^d$ si l'hypothèse d'indépendance n'est pas satisfaite.

## 1.2 Quelques résultats d'estimation antérieurs

- Estimation de $w$ (avec TCL) dans le cas i.i.d. par Embrechts, Grübel, Pitts [9].
- Cas ARMA(p,q) :
$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \cdots + \alpha_k X_{n-k} + \varepsilon_n + \beta_1 \varepsilon_{n-1} + \beta_q \varepsilon_{n-q}.$$
Soient $\alpha = 1 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)$ et $\beta = 1 + \beta_1 + \cdots + \beta_q$, Gerber [5] montre la relation suivante entre $w^d$ et le coefficient d'ajustement $w_\varepsilon$ de l'innovation du processus $(\varepsilon_t)$ :$w^d = \frac{\alpha}{\beta} w$, Christ et Steinbach [1] proposent alors une procédure d'estimation de $w^d$ basée sur l'estimation des paramètres $\alpha_i$ et $\beta_j$ ainsi que du processus d'innovation $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

# 2 Dépendance

À la différence des définitions probabilistes de mélange ($\alpha$, $\beta$, $\Phi$ mélange), Doukhan *et al.* [3] définissent des coefficients de mélange basés sur une classe de fonctions régulières et bornées (et non plus sur toutes les fonctions bornées).

$$\varepsilon(k) = \sup \frac{|\mathrm{Cov}(f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_u}), g(X_{j_1}, \ldots, X_{j_v}))|}{\Psi(f, g)} \tag{3}$$

le sup est pris sur $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_u)$, $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_v)$ tels que :

$$i_1 < \cdots < i_u \leq i_u + k \leq j_1 < \cdots < j_v$$

et les fonctions $f \ : \ \mathbb{R}^u \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$, $g \ : \ \mathbb{R}^v \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ bornées et Lipschitz

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|, \ x = (x_1, \ldots, x_p), \ y = (y_1, \ldots, y_p).$$

**Definition 1** *La notion de dépendance faible dépend de* $\Psi(f, g)$, $f \ : \ \mathbb{R}^u \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ *et* $g \ : \ \mathbb{R}^v \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$

1. $\Psi(f, g) = u lip(f) \|g\|_\infty$, *on parle de* $\theta$*-dépendance faible si* $(\varepsilon(k))_{k \in \mathbb{N}}$ *est sommable.*
2. $\Psi(f, g) = u lip(f) \|g\|_\infty + v \|f\|_\infty lip(g)$, *on parle de* $\eta$*-dépendance faible si* $(\varepsilon(k))_{k \in \mathbb{N}}$ *est sommable.*

D'autres types de dépendance font intervenir d'autres fonctions $\Psi$, d'autres encore la norme $L^1$.
De nombreux modèles rentrent dans le cadre ci-dessus, une présentation détaillée de ces modèles se trouve dans [3], notons simplement que les ARMA causaux et stationnaires vérifient la condition de $\theta$ dépendance avec des coefficients de dépendance qui décroissent vers 0 exponentiellement vite, de même que des processus auto-régressifs non linéaires.

# 3 Condition d'existence pour $w$

Mammisch [7] montre que la condition ci-dessous (condition (E)) est nécessaire et suffisante pour l'existence de $w$.

1. $\mathbb{E}(X_1) < 0$,
2. $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$ et
3. soit $a < \infty$ et $\lim_{t \to a-} \mathbb{E}(e^{aX_1}) \geq 1$ ou bien $a = \infty$ avec

$$a = \sup\{t \geq 0, \ \mathbb{E}(e^{tX_1}) < \infty\}.$$

En adaptant ses arguments, nous montrons le résultat suivant.

**Proposition 3.1** *On suppose que la limite $c(u)$ est bien définie $[0,a[$, en particulier, pour tout $t < a$ et $n$ assez grand, $\mathbb{E}(e^{tY_n}) < \infty$. De plus, on suppose*

1. *pour $n$ assez grand, $\mathbb{P}(Y_n > 0) > 0$*
2. *si $a < \infty$ alors pour $n$ assez grand, $\lim_{t \to a-} \mathbb{E}(e^{tY_n}) \geq 1$,*
3. *$c'(0+) < 0$ où de manière équivalente, $\exists t > 0$ tel que $c(t) < 0$*

*Alors il existe une unique solution $> 0$, notée $w^d$, à l'équation $c(u) = 0$. De plus $w^d$ est la limite de la suite $(w_r)_{r \in \mathbb{N}}$ avec $w_r$ solution $> 0$ (unique) de $c_r(u) = 0$.*

# 4 Estimation

## 4.1 Estimateur de $w$

On estime $\mathbb{E}(e^{tX_1})$ par sa version empirique : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{m}_k(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{tX_i},$$

Alors $\widehat{w}$ est la solution positive de $\log \widehat{m}_k(t) = 0$.

## 4.2 Estimateur de $w^d$

$\mathbb{E}(e^{tY_r})$ est estimé par sa version empirique :

$$\widehat{M^r_k}(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{tZ^r_i},$$

avec $Z^r_i = \sum_{j=1}^{r} X_{j+ir}$

$\widehat{w}_r$ est la solution positive de $\frac{1}{r} \log \widehat{M^r_k}(t) = 0$.

Nous allons montrer que pour un bon choix de $r = r(k)$, $\widehat{w}_r$ est un estimateur consistant de $w^d$, avec une estimation de la probabilité de mes-estimation.

## 4.3 Existence presque sûre

**Proposition 4.1** *Si le processus est $\theta$ ou $\eta$ dépendant et que les conditions d'existence de $w$ et $w^d$ sont vérifiées alors $\widehat{w}$ et $\widehat{w}_r$ existent presque sûrement.*

La preuve de cette proposition repose sur le fait que la $\eta$ (ou $\theta$) dépendance implique l'ergodicité.

## 4.4 Convergence

Pour une suite $r = o(\ln k)$, on montre la convergence en probabilité de $\widehat{w_r}$ vers $w^d$. Cette convergence est obtenue grâce à une estimation de la vitesse de convergence de $\widehat{w}_r$ vers $w_r$ (quand $k \to \infty$, à $r$ fixé), ce qui provient d'inégalités de moments.

**Proposition 4.2** *[3] Soit $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables centrées,*

$$C_{j,2} = \sup_{\substack{t_1,\ t_2 \\ t_2-t_1=j}} \mathrm{Cov}(W_{t_1}, W_{t_2}),$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$*, alors* $\mathbb{E}(S_n^2) \leq 2n \sum_{j=0}^{n-1} C_{j,2}$.
*Pour $W_i$ $\eta$-dépendante et stationnaire, de coefficients de mélange $\varepsilon(k) \leq C\theta^k$, avec $M_m = \mathbb{E}(|W_i|^m)$ on a :*

$$\mathbb{E}(S_n^2) \leq 16nM_m^{\frac{2}{m}} C^{\frac{m-2}{m}} \frac{1}{1-\theta^{\frac{m-2}{m}}} \tag{4}$$

On applique (4) à $e^{tZ_ir}$,

**Proposition 4.3** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un processus $\eta$ faiblement dépendant, de coefficients de mélange $\varepsilon(k) \leq C\theta^k$, $C > 0$, $0 < \theta < 1$. Alors pour $t \in [0, a[$, avec $3t \leq a$, et $v > 0$ :*

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{M_k^r}(t) - \mathbb{E}(e^{tY_r})| > v\right) \leq \frac{4(Cr+3)\mathbb{E}(e^{3tY_r})^{2/3}}{v^2 k(1-\theta^{\frac{1}{6}})}.$$

C'est une application de l'inégalité de Bienaimé-Tchebitchev en prenant $m = 3$ dans la Proposition ci-dessus.
On en déduit de tout ceci la convergence en probabilité de l'estimateur de $w^d$.

**Theorem 4.4** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un processus $\eta$ faiblement dépendant, de coefficient de mélange $\varepsilon(k) = O(\theta^k)$, $0 < \theta < 1$. Pour $r = r(k) = o(\ln k)$, $\widehat{w}_r$ converge vers $w_d$ en probabilité.*

La preuve basée sur :

$$|\widehat{w}_r - w_r| = |\mathbb{E}(e^{w_r Z_1^r}) - \widehat{M_k^r}(w_r)| \left[\frac{\partial \widehat{M_k^r}(w_r)}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{I}_r} \frac{\partial^2 \widehat{M_k^r}(w)}{\partial t^2} dw\right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widehat{w}_r - w_r| > v) \quad &\leq \quad \frac{16(Cr+3)}{\alpha_r(w_r)^2 k(1-\theta^{\frac{1}{6}})}\Bigg(\mathbb{E}(e^{3w_rY_r})^{\frac{2}{3}}\frac{1}{v^2} \\ &\qquad + \mathbb{E}(Y_r^3 e^{3w_rY_r})^{\frac{2}{3}}\Bigg)\end{aligned}$$

avec $\alpha_r(w_r) = \mathbb{E}(Y_r e^{w_rY_r})$. On obtient ainsi la convergence en probabilité pour $r = o(\ln k)$.

# 5 Simulations

Nous fournissons quelques exemples de simulations dans des cas où $w^d$ est calculable. Si $\xi_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ alors $0 \leq t < \theta$,

$$\mathbb{E}(e^{t\xi_i}) = \frac{\theta}{\theta - t}.$$

Pour $\varepsilon_i = \xi_i - c$, $c\theta > 1$, alors $w^i$ est la solution $> 0$ de :

$$e^{-tc}\frac{\theta}{\theta - t} = 1.$$

Nous considérons les cas suivants :
- $\varepsilon_i = \xi_i - c$, i.i.d.
- modèle $AR(1)$ : $X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n$,
- modèle $MA(1)$ : $X_n = \varepsilon_n + a\varepsilon_{n-1}$,
- $AR$ et $MA$ non linéaire, plus réalistes du point de vue actuariel (time dependent Poisson processes [6]) et pour lesquels $w^d$ est calculable.

# Références


[1] R. Christ, J. Steinebach, *Estimating the adjustment coefficient in an $ARMA(p,q)$ risk model.* Insurance : Mathematics and Economics, (1995), 17, 149-161.

[2] W. Bric, Dembo, *Large deviations and strong mixing*, Ann. IHP, B, (1996), 32, 549-569.

[3] J. Dedecker, P. Doukhan, G. Lang, JR. León R., S. Louhichi, C. Prieur, *Weak Dependence : With Examples and Applications* Lect. Notes Stat. **190**. (2007).

[4] H.U. Gerber, *An introduction to Mathematical Risk Theory* Huebner Foundation monograph n°8, Irwin Homewood IL (1979).

[5] H.U. Gerber, *Ruin theory in the linear model*, Insurance : Mathematics and Economics, (1982), 1, 177-184.

[6] McKenzie, E. *Some ARMA Models for Dependent Sequences of Poisson Counts.* (1998) Advances in Applied Probability, Vol. 20 (4), 822-835.

[7] V. Mammitzsch *A note on the adjustment coefficient in ruin theory*, Insurance : Mathematics and Economics, 5, (1986), 147-149.

[8] A. Müller, G. Pflug *Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments.*, Insurance : Mathematics and Economics, 28, (2001), 381-392.

[9] S.M. Pitts, R. Grübel, P. Embrechts, *Confidence bounds for the adjustment coefficient*, Ad. in Applied probability, 28 n°3, (1996), 802-827.