Mesures aléatoires banachique. Application aux séries stationnaires

Tawfik Benchikh, Alain Boudou, Yves Romain

Statistique /Statistics

Mesures aléatoires opératorielle et banachique. Application aux séries stationnaires

Tawfik BENCHIKH[1a,1b], Alain BOUDOU[2], Yves ROMAIN[3]

[1a,2,3] Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C55830, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex. France.
[1b]LDM, Université Djilali Liabes BP 89, SBA, 22000, Algérie.
e-mail : tbenchikh@univ-sba.dz, boudou@cict.fr, romain@cict.fr

Résumé. Nous étudions des mesures aléatoires à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{K}(H,E)$ des opérateurs compacts de l'espace de Hilbert H dans l'espace de Banach E : elles sont nommées *mesures aléatoires opératorielles*. Ensuite, nous étudions l'intégrale stochastique qui leurs est associée et nous établissons le lien entre cette intégrale et les séries stationnaires d'opérateurs compacts. Ces résultats sont utilisés pour définir des *mesures aléatoires banachiques* et l'intégrale stochastique par rapport à ces mesures. Enfin, nous proposons l'approximation d'une série strictement stationnaire banachique au moyen d'une transformée de Fourier d'une mesure aléatoire banachique.

Operatorial and Banach space-valued random measures. Application to stationary series

Abstract. We study random measures with values in the Banach space $\mathcal{K}(H,E)$ of compact operators, where H is a Hilbert space and E is a Banach space : they are called *operatorial random measures*. Then we study the stochastic integral which is associated and we establish the relation between this integral and the stationary series of compact operators. These results are used to define *Banach space-valued random measures* and the stochastic integral with regard to these measures. Endly, we propose the approximation of a strictly stationary series by the Fourier transform of a Banach space-valued random measure.

1. Introduction et notations

Soit E (resp. H) un espace de Banach (resp. de Hilbert) complexe séparable et $\mathcal{L}(H,E)$ (resp. $\mathcal{K}(H,E)$) l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés (resp. compacts) de H dans E. L'application bijective $h \in H \rightarrow < ., h > \in H'$ est notée $\mathcal{I}$, où H' est le dual topologique de H.

Étant donné un opérateur K de $\mathcal{L}(H,E)$, on appelle *opérateur quasi-transposé* de K, que l'on note ${}^qK$, l'opérateur antilinéaire $\mathcal{I}^{-1} \circ {}^tK$, c'est-à-dire tel que, pour tout (e',h) de $E' \times H$, on a : $< h, {}^qKe' > = (e', Kh)_{E'E}$.

Lorsque X est un élément de $L^2_E(\mathcal{A})(= L^2_E(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}))$, l'application qui, à y de $L^2(\mathcal{A})$, associe $\int yXd\mathbb{P}$ de E, est notée $\widetilde{X}$ et appelée "*opérateur canoniquement associé (o.c.a.) à X*" ; c'est un opérateur compact. En [6], l'application $e' \in E' \mapsto e' \circ X \in L^2_E(\mathcal{A})$ est appelée *opérateur cylindrique associé* à X ; à une conjugaison complexe près, il s'agit du quasi-transposé de $\widetilde{X}$. Lorsque F est un second espace de Banach, on peut vérifier que, pour tout (φ, X) de $\mathcal{L}(E,F) \times L^2_E(\mathcal{A})$, $\varphi \circ X$ appartient à $L^2_F(\mathcal{A})$ et $\widetilde{\varphi \circ X} = \varphi \circ \widetilde{X}$.

On dit qu'un opérateur K de $\mathcal{K}(H,E)$, *se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt* lorsqu'il existe un espace de Hilbert séparable H_1, un opérateur de Hilbert-Schmidt ψ de H dans H_1 et un élément φ de $\mathcal{L}(H_1,E)$ tels que $K = \varphi \circ \psi$. On montre que (cf. [2]), si l'o.c.a. $\widetilde{X}$ se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors, à tout T de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}))$, on peut associer un et un seul élément Y de $L^2_E(\mathcal{A})$ tel que $\widetilde{Y} = \widetilde{X} \circ T$.

Dans ce texte, nous utilisons fréquemment les notions de mesures aléatoires hilbertiennes (m.a.) et de mesures spectrales (m.s.) (à valeurs projecteurs), qui sont particulièrement étudiées en [4].

2. Mesure aléatoire opératorielle

DÉFINITION 2.1- *Une mesure aléatoire opératorielle (m.a.o.) Z est une application de $\mathcal{B}$, tribu de Borel de $\Pi = [-\pi, \pi[$, dans $\mathcal{K}(H, E)$, telle que :*

i) pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$, $Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)$ et $Z(A) \circ {}^q(Z(B)) = 0$;

ii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ convergeant en décroissant vers $\emptyset$, $\lim\limits_{n} Z(A_n) = 0$.

Dans la suite, on note indifféremment $Z(A)$ et ZA.

Si Z est une m.a.o., alors, pour tout e' de E', l'application $Z^{e'}$ qui, à A de $\mathcal{B}$, associe ${}^q(ZA)e'$ de H est une m.a. ; de plus, pour tout couple (e', f') d'éléments de E', les m.a. $Z^{e'}$ et $Z^{f'}$ sont stationnairement corrélées. En [1], on démontre le résultat de décomposition suivant :

PROPOSITION 2.2- *Si Z est une m.a.o., il existe une et une seule mesure spectrale $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{B}$ pour $H_Z = \overline{vect}\{{}^q(ZA)e' ; (e', A) \in E' \times \mathcal{B}\}$ telle que, si l'on note j l'injection canonique de H_Z dans H, on ait : $ZA = Z\Pi \circ j \circ \mathcal{E}A \circ j^*$, pour tout A de $\mathcal{B}$.*

Étant donné une m.s. $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{B}$ pour l'espace de Hilbert H_1 et f un élément de l'ensemble $\mathcal{M}$ des applications bornées et mesurables de Π dans $\mathbb{C}$, on montre que :

- pour tout X de H_1, l'application $Z^X_{\mathcal{E}} : A \in \mathcal{B} \mapsto \mathcal{E}AX \in H_1$ est une m.a.,
- l'application $\mathcal{E}_f : X \in H_1 \mapsto \int f dZ^X_{\mathcal{E}} \in H_1$ est linéaire et bornée.

Ces résultats permettent d'introduire la

DÉFINITION 2.3- *On appelle intégrale de f, élément de $\mathcal{M}$, par rapport à la m.a.o. Z, l'opérateur $Z\Pi \circ j \circ \mathcal{E}_f \circ j^*$, que l'on note $\int f dZ$.*

Il est facile de vérifier la linéarité de cette intégrale et que $\int \mathbb{1}_A dZ = ZA$, pour tout A de $\mathcal{B}$.

Remarquons que l'intégrale par rapport à une m.a.o. est liée à l'intégrale par rapport à une m.a. ; en effet, lorsque Z est une m.a.o., pour tout (f, e') de $\mathcal{M} \times E'$, on a : ${}^q(\int f dZ)e' = \int \overline{f} dZ^{e'}$.

3. Séries stationnaires

On dit qu'une série $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{K}(H, E)$ est stationnaire lorsque, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$, $K_n \circ {}^q K_m = K_{n-m} \circ {}^q K_0$. On montre alors (cf. [1]) qu'il existe une et une seule m.a.o. Z telle que $\int e^{i.n} dZ = K_n$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Étant donné $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$, D. Bosq (cf. [3]) la définit comme stationnaire lorsque, pour tout e' de E', $(e' \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et lorsque, pour tout couple (e', f') d'éléments de E', les séries $(e' \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(f' \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées. Comme, pour tout $(e', f') \times (n, m)$ de $E'^2 \times \mathbb{Z}^2$, on a $< e' \circ X_n, f' \circ X_m > = < {}^q\widetilde{X_m} f', {}^q\widetilde{X_n} e' > = (e', \widetilde{X_n} \circ {}^q\widetilde{X_m} f')_{E',E}$, on peut affirmer qu'une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire si et seulement si la série des o.c.a. $(\widetilde{X_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

En particulier, lorsque $E = \mathbb{C}^p$ on retrouve la définition usuelle d'une série multidimensionnelle stationnaire adoptée notamment en [5].

Afin d'introduire la notion de la stationnarité au sens strict, munissons $F = E^{\mathbb{Z}}$ de la plus petite tribu $\mathcal{F}$ rendant les applications coordonnées mesurables et notons Θ l'application de F dans lui-même, qui, à $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(e_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. On a alors : $\Theta^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série banachique d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$, l'application mesurable $\breve{X} : \omega \in \Omega \mapsto (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}} \in F$

est appelée *variable aléatoire trajectoire associée à la série* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous sommes alors en mesure d'introduire la :

DÉFINITION 3.1- *Une série* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *d'éléments de* $L^2_E(\mathcal{A})$ *est dite stationnaire au sens strict lorsque la loi de la variable aléatoire trajectoire associée* $\check{X}$ *est invariant par* Θ*, c'est-à-dire telle que* $\Theta(\check{X}(\mathbb{P})) = \check{X}(\mathbb{P})$.

Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série banachique stationnaire au sens strict, on montre que :

i) L'application $\mathcal{J} : T \in L^2_E(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto T\circ\check{X} \in L^2_E(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ est une bijection linéaire qui conserve la norme ;

ii) l'application $J : t \in L^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto t\circ\check{X} \in L^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ est une isométrie surjective ;

iii) l'application $\mathcal{V} : T \in L^2_E(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto T \circ \Theta \in L^2_E(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P}))$ est une bijection linéaire qui conserve la norme ;

iv) l'application $V : t \in L^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P})) \mapsto t \circ \Theta \in L^2(F, \mathcal{F}, \check{X}(\mathbb{P}))$ est un opérateur unitaire.

Il est clair que $\mathcal{U} = \mathcal{J} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{J}^{-1}$ est un endomorphisme bijectif de $L^2_E(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ qui conserve la norme, et que $U = J \circ V \circ J^{-1}$ un est opérateur unitaire de $L^2(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$. On peut alors affirmer que, pour tout Y de $L^2_E(\Omega, \check{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$, et, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\widetilde{\mathcal{U}^n Y} = \widetilde{Y} \circ U^{-n}$. De ce fait, $(\mathcal{U}^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire. L'opérateur $\mathcal{U}$ joue le rôle d'un opérateur de décalage car, pour tout (S, n) de $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z}$, on a : $\mathcal{U}(S \circ X_n) = S \circ X_{n+1}$. Bien entendu la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire car $\mathcal{U}^n(X_0) = X_n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$. De plus, pour tout (e', n) de $E' \times \mathbb{Z}$, on a $U(\overline{{}^q\widetilde{X_n} e'}) = \overline{{}^q\widetilde{X_{n+1}} e'}$.

4. Mesure aléatoire banachique

DÉFINITION 4.1- *Une application* Z *de* $\mathcal{B}$ *dans* $L^2_E(\mathcal{A})$ *est une mesure aléatoire banachique (m.a.b.) lorsque*

i) pour tout couple (A, B) *d'éléments disjoints de* $\mathcal{B}$ *:* $Z(A\cup B) = ZA + ZB$ *et* $\widetilde{ZA} \circ {}^q\widetilde{ZB} = 0$ *;*

ii) pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *d'éléments de* $\mathcal{B}$ *convergeant en décroissant vers* $\varnothing$ *:* $\lim\limits_{n\mapsto\infty} ZA_n = 0$.

Il est alors facile de vérifier que l'application $\widetilde{Z}$ qui, à A de $\mathcal{B}$, associe $\widetilde{ZA}$ de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$ est une m.a.o. appelée *m.a.o. associée à la m.a.b. Z*.

DÉFINITION 4.2- *On dit qu'un élément* f *de* $\mathcal{M}$ *est intégrable par rapport à la m.a.b.* Z *lorsqu'il existe un élément de* $L^2_E(\mathcal{A})$*, appelé intégrale de* f *par rapport à* Z *et noté* $\int f d\,Z$*, dont l'o.c.a. est égal à* $\int f d\widetilde{Z}$.

De ce fait, si f de $\mathcal{M}$ est intégrable par rapport à Z, on a : $\widetilde{\int f dZ} = \int f d\widetilde{Z}$. Cette intégrale est bien sûr linéaire et on montre que, pour tout A de $\mathcal{B}$, $\mathbb{1}_A$ est intégrable par rapport à Z et que $\int \mathbb{1}_A dZ = ZA$. De plus, lorsque, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $e^{i.n}$ est intégrable par rapport à une m.a.b. Z, la série $(\int e^{i.n} dZ)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Enfin, on a la condition suffisante suivante de décomposition de type "transformée de Fourier banachique" (cf. [2]).

PROPOSITION 4.3- *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une série banachique stationnaire d'éléments de* $L^2_E(\mathcal{A})$ *telle que* $\widetilde{X_0}$ *se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors il existe une m.a.b.* Z *telle que* $X_n = \int e^{i.n} dZ$*, pour tout* n *de* $\mathbb{Z}$.

5. Approximation d'une série strictement stationnaire

Supposons que E admet une base $\{x_k; k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire, que, à tout e de E, on peut associer une et une seule suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que $e = \lim\limits_{p\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x_k$. L'application f_k qui, à un élément e de E, associe le complexe α_k appartient au dual E'. La famille $\{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est appelée *suite des coefficients fonctionnels associée à* $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$(cf. [7]). Si, pour tout p de $\mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} f_k \otimes x_k$, où $f_k \otimes x_k$ est l'application qui, à e de E associe $(f_k, e)_{E',E} x_k$ de E, on peut affirmer que, pour tout e de E, $e = \lim_p S_p(e)$ et que $\|e\| \leq \sup\{\|S_p e\|; p \in \mathbb{N}\} \leq C\|e\|$.

De plus, on montre que, pour tout X de $L^2_E(\mathcal{A})$, on a $\lim_p S_p \circ X = X$.

Considérons une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ stationnaire au sens strict et ϵ un réel strictement positif. Comme la suite $(S_p \circ X_0)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X_0, il existe donc un entier p tel que $\|X_0 - S_p \circ X_0\| \leq \epsilon$. Par ailleurs, la série $(S_p \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et l'opérateur $\widetilde{S_p \circ X_0} = S_p \circ \widetilde{X_0} = \sum_{k=0}^{p} ({}^q\widetilde{X_0} f_k) \otimes x_k$ se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert-Schmidt ([2]) . D'après la proposition 4.3, il existe une m.a.b. Z_ϵ telle que $S_p \circ X_n = \int e^{i.n} dZ_\epsilon$, pour tout n de $\mathbb{Z}$. Adoptant les notations du paragraphe 3, pour tout n de $\mathbb{Z}$, il vient :

$$\|X_n - \int e^{i.n} dZ_\epsilon\| \quad = \quad \|X_n - S_p \circ X_n\| = \|\mathcal{U}^n(X_0) - \mathcal{U}^n(S_p \circ X_0)\| = \|X_0 - S_p \circ X_0\| \leq \epsilon\,.$$

Nous venons de démontrer la

Proposition 5.1- Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ stationnaire au sens strict, à tout élément ϵ de $\mathbb{R}^*_+$, on peut associer une m.a.b. Z_ϵ telle que $\|X_n - \int e^{i.n} dZ_\epsilon\| \leq \epsilon$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Enfin, on signale au lecteur intéressé qu'il peut trouver en [2] le cas particulier des m.a.b. à spectre fini et une application aux séries stationnaires périodiques.

Remerciements. Nous remercions les membres du groupe de travail *Staph* du LSP de Toulouse pour les échanges fructueux.

Références

[1] Benchikh T., Boudou A., Romain Y., (2006), Mesures aléatoires opératorielles. *Publi. Labo. Stat. Proba.* 11-2006, Univ. P. Sabatier, Toulouse*.

[2] Benchikh T., Boudou A., Romain Y., (2006), Mesures aléatoires banachiques. *Publi. Labo. Stat. Proba.*, 12-2006, Univ. P. Sabatier, Toulouse*.

[3] Bosq D., (2000), *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications.* Lecture Notes in Statistics, 149, Springer-Verlag, New York.

[4] Boudou A., Romain Y., (2002), On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes. *Statistics and Probability Letters* 59, 145-157.

[5] Brillinger D., (2001), *Time Series Analysis and Theory.* Society for Industrial Applied mathematics, Philadelphia.

[6] Chobanjan S.A., Weron A., (1981), Existence of the linear prediction for Banach space-valued gaussian processes. *J. Multivar. Anal.,* 11, 69-80.

[7] Singer I., (1970), *Bases in Banach Spaces* I, Springer-Verlag, Berlin.

* consultable à l'adresse : http ://www.lsp.ups-tlse.fr/publicationsdulsp/toutespublis.html.