

Principe d'invariance faible et régression isotonique

Jérôme Dedecker, Florence Merlevède, Magda Peligrad

► **To cite this version:**

Jérôme Dedecker, Florence Merlevède, Magda Peligrad. Principe d'invariance faible et régression isotonique. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. inria-00386603

HAL Id: inria-00386603

<https://hal.inria.fr/inria-00386603>

Submitted on 22 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PRINCIPE D'INVARIANCE FAIBLE ET RÉGRESSION ISOTONIQUE

Jérôme Dedecker, Florence Merlevède & Magda Pligrad

Jérôme Dedecker: LSTA, Université Paris 6-Pierre et Marie Curie.

Florence Merlevède: LAMA, Université Paris Est-Marne la vallée.

Magda Peligrad: Department of Mathematical Sciences, University of Cincinnati

Résumé. On commencera par établir des principes d'invariance faibles pour une classe de processus linéaires dont les “innovations” vérifient une condition de dépendance introduite par Hannan (1973) bien adaptée à l'étude des séries temporelles. Le processus limite est un mouvement Brownien fractionnaire. Ces principes d'invariances sont les outils principaux pour étudier le comportement asymptotique de l'estimateur de la régression isotonique, lorsque le terme d'erreur provient d'une série temporelle, comme l'ont montré Anevski et Hössjer (2006). La vitesse et la loi limite dépendent de la fonction de normalisation du processus des sommes partielles des erreurs et de sa loi limite. On donnera des exemples de processus linéaires pour lesquels on peut calculer explicitement la fonction de normalisation du processus des sommes partielles, et la vitesse qui en découle pour l'estimateur de la régression isotonique.

Soit $(\xi)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite centrée, stationnaire et ergodique, et notons $\mathcal{M}_i = \sigma(\xi_k, k \leq i)$. Pour $k \geq 0$, notons $P_0(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi_k | \mathcal{M}_0) - \mathbb{E}(\xi_k | \mathcal{M}_{-1})$. On supposera toujours dans la suite que la condition de Hannan (1973) est vraie:

$$\sum_{i \geq 0} \|P_0(\xi_i)\|_2 < \infty. \quad (1)$$

Dans ce cas la série $\eta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(\xi_0 \xi_k)|$ converge, et pour toute suite $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$, le processus linéaire

$$X_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \xi_{k-i}$$

est bien défini dans \mathbb{L}^2 . Notons alors

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad \text{et} \quad v_n^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a_{1-j} + \cdots + a_{n-j})^2.$$

Peligrad et Utev (2006) ont montré que si (1) a lieu, alors $v_n^{-1} S_n$ converge en loi vers $\sqrt{\eta} N$, où N est une gaussienne standard. Dans cet exposé, on considère le processus des sommes partielles

$$\{v_n^{-1} S_{[nt]}, t \in [0, 1]\}. \quad (2)$$

Si (1) a lieu, et si il existe $\beta \in]0, 2]$ tel que

$$\text{pour tout } t \in]0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{[nt]}^2}{v_n^2} = t^\beta, \quad (3)$$

alors les marginales fini-dimensionnelles convergent vers celle du processus $\sqrt{\eta}W_H$, où W_H est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H = \beta/2$.

Pour la convergence du processus des sommes dans l'espace $D([0, 1])$ des fonctions càdlàg, on montre les résultats suivants: si $\beta \in]1, 2]$, alors la condition (1) est suffisante. Si $\beta \in]0, 1]$, alors une condition suffisante est que

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} \|P_0(\xi_i)\|_q < \infty, \quad \text{pour } q > 2/\beta. \quad (4)$$

Notons que dans le cas $\beta = 1$ (convergence vers un mouvement brownien), Merlevède et Peligrad (2006) ont montré que la condition (1) n'était pas suffisante (mais elle le devient si l'on suppose de plus que $(a_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \ell^1$).

Nous appliquons ces résultats au modèle de régression isotonique

$$y_k = \phi\left(\frac{k}{n}\right) + X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

où ϕ est croissante, et le terme d'erreur X_k est un processus linéaire comme défini ci-dessus. On suit l'approche d'Anevski et Hössjer (2006), qui ont montré que lorsque les erreurs sont dépendantes, l'outil principal pour obtenir la loi limite de l'estimateur isotonique $\hat{\phi}$ est la convergence dans $D([0, 1])$ du processus des sommes partielles défini en (2). Comme dans Anevski et Hössjer (2006), la vitesse de convergence de $\hat{\phi}$ est déterminée par le comportement asymptotique de la suite v_n , et la loi limite dépend du processus limite W_H .

Bibliographie

- [1] Anevski et Hössjer, O. (2006) A general asymptotic scheme for inference under order restriction. *Ann. Statist.*, 34, 1874–1930.
- [2] Hannan, E. J. (1973) Central limit theorems for time series regression. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 26, 157–170.
- [3] Merlevède, F. et Peligrad, M. (2006) On the weak invariance principle for stationary sequences under projective criteria. *Journal of Theoretical Probability*, 19, 647–689.
- [4] Peligrad, M. et Utev, S. (2006) Central limit theorem for stationary linear processes. *Ann. Probab.*, 34, 1608–1622.