



# Estimation non paramétrique des valeurs quantiles d'une série temporelle

Benoît Patra

► **To cite this version:**

Benoît Patra. Estimation non paramétrique des valeurs quantiles d'une série temporelle. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. 2009. <inria-00386604>

**HAL Id: inria-00386604**

**<https://hal.inria.fr/inria-00386604>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ESTIMATION NON PARAMÉTRIQUE DES VALEURS QUANTILES D'UNE SÉRIE TEMPORELLE.

Benoît Patra

*LSTA 175 rue du Chevaleret 75013 Paris, Lokad 9 rue Dareau 75014 Paris*

## Abstract

Time series forecasting applies to a large variety of problems. In order to forecast future values of a time series, it is frequently more robust to use an estimator based on the median or, more generally, based on a quantile. In this talk, we develop strategies for non-parametric sequential quantile forecasting. We prove the convergence of our strategies under weak assumptions when considering an expert-aggregation strategy relying on Nearest Neighbors experts. To conclude, those strategies are empirically evaluated against real world data - a call center call volume data set.

*Keywords = Quantiles, Process statistics - time series.*

## Résumé

La prévision des séries temporelles couvre un vaste domaine d'applications statistiques. La prévision des valeurs ultérieures d'une série peut être effectuée par des estimateurs reposant sur la médiane et, plus généralement sur les quantiles. Dans cet exposé nous présentons des méthodes non-paramétriques de stratégies séquentielles de prévision quantile. Nous prouvons en particulier, sous des hypothèses faibles, la convergence d'une stratégie quantile reposant sur l'agrégation « d'experts ». Dans le cas présent, il s'agit d'estimateurs de type proches voisins. Nous illustrons nos résultats par des expériences menées sur des données réelles provenant de *call centers* (Centres d'appels téléphoniques).

*Mots-clés = Quantiles, Statistique des processus - séries temporelles.*

## 1 Introduction.

Une grande partie des données du monde réel se présente sous forme de séries temporelles. C'est-à-dire, une suite d'observations répétées d'une même variable à des temps différents. Les secteurs d'activités concernés par de tels types de données sont divers (banque, biotechnologies, grande distribution, énergie, ...). Afin de mieux comprendre le phénomène sous jacent ayant généré les observations, on utilise fréquemment une modélisation aléatoire. Ainsi, une série temporelle est bien souvent modélisée par un processus aléatoire à temps discret  $(Y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ . Il s'agit d'une suite de variables aléatoires

que nous supposons dans cet exposé dépendantes. Plusieurs objectifs peuvent être recherchés, le plus courant étant de prévoir les valeurs futures de la série. Dans ce cas, l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(Y_n|Y_1^{n-1})$  est un prédicteur naturel où  $Y_1^{n-1}$  désigne la suite des variables du passé  $(Y_1, \dots, Y_{n-2}, Y_{n-1})$ . La médiane conditionnelle est également un prédicteur pertinent du fait de sa robustesse aux observations aberrantes. Plus généralement, on peut chercher à prévoir la valeur du quantile conditionnel, à un seuil  $\tau \in (0, 1)$  fixé. Il s'agit du quantile d'ordre  $\tau$  de la loi de la variable  $Y_n$  sachant  $Y_1^{n-1}$ , noté  $q_\tau(Y_1^{n-1})$ . Ceci permet d'estimer la borne supérieure avec probabilité  $\tau$  de la valeur future de la série. Le quantile conditionnel d'ordre  $\tau$  est défini par la formule suivante :

$$q_\tau(Y_1^{n-1}) = \inf \left\{ q \in \mathbb{R} \text{ tels que } F_{Y_n|Y_1^{n-1}}(q) \geq \tau \right\},$$

où  $F_{Y_n|Y_1^{n-1}}$  désigne la fonction de répartition conditionnelle, c'est-à-dire,

$$F_{Y_n|Y_1^{n-1}}(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x | Y_1^{n-1}).$$

Notons  $\rho_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\rho_\tau(y) = y(\tau - \mathbb{I}_{\{y \leq 0\}})$ . Si  $Y_n$  est intégrable, le quantile  $q_\tau(Y_1^{n-1})$  est solution du problème de minimisation,

$$\operatorname{argmin}_{q(\cdot) \text{ mesurable}} \mathbb{E}_{Y_n|Y_1^{n-1}}(\rho_\tau(Y_n - q(Y_1^{n-1}))).$$

L'hypothèse (H) sur le processus assure l'unicité de ce minimum :

(H) : Presque sûrement,  $F_{Y_0|Y_{-\infty}^{-1}}$  est continue strictement croissante.

## 2 Stratégies quantiles.

Nous supposons que la série temporelle  $(y_1, \dots, y_n, \dots, y_N)$  provienne de la réalisation d'un processus  $Y = (Y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$  stationnaire, ergodique et vérifiant l'hypothèse (H).

Une stratégie séquentielle de prévision quantile, que nous abrègerons en stratégie quantile, est une suite  $g = (g_n)_{n=1}^{\infty}$ , où,  $g_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Afin de mesurer les performances d'une telle stratégie on utilise la fonction de perte cumulée et normalisée sur  $Y_1^n$ , définie par :

$$L_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(Y_t - g_t(Y_1^{t-1})).$$

La définition suivante introduit la notion de convergence pour une stratégie séquentielle de prévision quantile.

**Définition.** Une stratégie quantile est convergente par rapport à une classe  $\mathcal{C}$  de processus ergodiques et stationnaires  $(Y_n)_{-\infty}^{\infty}$  vérifiant l'hypothèse (H) si, pour chaque processus de la classe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(g) = L^* \quad p.s.,$$

où,

$$L^* = \mathbb{E} \left( \min_{q(\cdot)} \mathbb{E}_{Y_0 | Y_{-\infty}^{-1}} (\rho_{\tau}(Y_0 - q(Y_{-\infty}^{-1}))) \right).$$

### 3 Une stratégie quantile convergente.

Nous définissons dans cette partie une stratégie quantile et prouvons sa convergence. L'estimateur d'indice  $k, \ell$ , appelé expert dans ce contexte, au temps  $n$ , s'écrit :

$$h_n^{(k, \ell)}(y_1^{n-1}) = \operatorname{argmin}_{q \in \mathbb{R}} \sum_{t \in J_n^{(k, \ell)}} \rho_{\tau}(y_t - q).$$

La somme est effectuée sur l'ensemble des indices des plus proches voisins (PPV) :

$$J_n^{(k, \ell)} = \{k < t < n \text{ tels que } y_{t-k}^{t-1} \text{ est parmi les } \bar{\ell} \text{ PPV de } y_{n-k}^{n-1} \text{ parmi } y_1^k, \dots, y_{n-k-1}^{n-2}\}.$$

Un tel expert effectue une recherche des  $\bar{\ell}$  plus proches voisins du dernier segment de longueur  $k$  présent dans la série. Il retourne la valeur du quantile empirique calculé sur ces proches voisins. Notons que  $\bar{\ell}$  est une simple fonction de  $\ell$  et qu'une troncature sera nécessaire sur chaque expert afin de prouver la convergence de la méthode. L'estimateur final agrégé prend la forme de la combinaison convexe d'experts suivante :

$$g_n(y_1^{n-1}) = \sum_{k, \ell=1}^{\infty} p_{k, \ell, n} h_n^{(k, \ell)}(y_1^{n-1}),$$

où les poids  $p_{k, \ell, n}$  d'un expert d'indice  $k, \ell$  au temps  $n$  dépendent des performances passées de cet expert. Plus précisément, nous choisissons  $b_{k, \ell} \geq 0$  vérifiant  $\sum_{k, \ell} b_{k, \ell} = 1$ , et posons :

$$w_{k, \ell, n} = b_{k, \ell} e^{-\eta_n(n-1)L_{n-1}(h^{(k, \ell)})}$$

$$p_{k, \ell, n} = \frac{w_{k, \ell, n}}{\sum_{i, j \geq 1} w_{i, j, n}}.$$

Le théorème suivant présente la convergence de cette stratégie de type proches voisins.

**Théorème.** Soit  $\mathcal{C}$  la classe des processus stationnaires ergodiques  $(Y_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  satisfaisant l'hypothèse (H) et  $\mathbb{E}(Y_0^2) < +\infty$ . Supposons que pour chaque entier  $k \geq 1$  et chaque vecteur  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$ , la variable aléatoire  $\|Y_1^k - \mathbf{s}\|$  a une fonction de distribution continue. Pour un choix de  $\eta_n$  tel que  $\eta_n \rightarrow 0$  et  $n\eta_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la stratégie de quantile définie précédemment est convergente par rapport à la classe  $\mathcal{C}$ .

La preuve de ce théorème s'appuie sur les travaux d'agrégation non paramétrique de Biau, Bleakley, Györfi et Ottucsák [1] ainsi que ceux de Györfi et Schäfer [3] dans le cadre d'une régression quadratique. Des éléments de preuve proviennent également de l'article [2] de Györfi, Udina et Walk, visant à l'optimisation de portefeuilles d'actions.

Enfin une étude empirique de la stratégie quantile exposée sera effectuée sur des données provenant de *call centers* (centres d'appel). L'étude portera sur le volume d'appel entrant qui peut être décrit par une série temporelle. Cette étude comportera d'une part une mesure des performances de prédiction, d'autre part nous construirons des régions de confiance pour la série.

## Bibliographie

- [1] Biau Gérard, Bleakley Kevin et Györfi László et Ottucsák György (2008). Nonparametric sequential prediction of time series, *Journal of Nonparametric Statistics*, London.
- [2] Györfi László, Udina Frederic et Walk Harro (2008). Nonparametric nearest neighbor based empirical portfolio selection strategies, *Statistics and Decisions*, Munich.
- [3] Györfi László et Schäfer Dustin (2003). Non parametric prediction. *Advances in Learning Theory : Methods, Models and Applications*