Inférence Fondée sur les Rangs dans la Famille des Lois alpha-Stable

Marc Hallin, Yvik Swan, Thomas Verdebout, David Veredas

Inférence Fondée sur les Rangs dans la Famille des Lois α-stable

Marc Hallin*†, Yvik Swan†, Thomas Verdebout* & David Veredas*

* *E.C.A.R.E.S., European Centre for Advanced Research in Economics and Statistics*
Avenue F. D. Roosevelt 50 - CP 114, B-1050 Bruxelles
† *Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles*
Campus de la Plaine - CP 210, B-1050 Bruxelles
Belgique

Résumé

Les lois α-stables permettent de décrire avec succès un grand nombre de phénomènes, dans les domaines les plus divers : physique, économie, finance, actuariat, climatologie, études environnementales, ... Leur popularité provient du fait qu'elles fournissent une solution souple au problème de la modélisation de variables présentant des queues lourdes et des lois asymétriques, ce qui est impossible dans le cadre des modèle gaussiens habituels.

Une distribution de probabilité α-stable univariée est caractérisée par quatre paramètres : un paramètre de *position* $\theta \in \mathbb{R}$, un paramètre d'*échelle* $\sigma > 0$, un paramètre d'*asymétrie* $\beta \in [-1, 1]$ et un paramètre de *lourdeur de queue* $\alpha \in (0, 2]$. Une des difficultés majeures dans l'étude de ces lois est que leurs densités, en général, ne possèdent pas de forme explicite, et sont définies comme transformées de Fourier inverses de la fonction caractéristique

$$\phi(t; \alpha, \beta, \theta, \sigma) = \begin{cases} \exp\left\{it\theta - |\sigma t|^\alpha \left(1 - i\beta \mathrm{sign(t)} \tan(\pi\alpha/2)\right)\right\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{it\theta - |\sigma t|^\alpha \left(1 - i\beta \mathrm{sign(t)} (-(2/\pi) \ln|t|)\right)\right\} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Des valeurs particulières des paramètres α et β donnent des cas particuliers où des expressions pour la densité existe : une loi stable avec (i) $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ est une loi gaussienne ; (ii) $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ est une loi de Cauchy ; (iii) $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$ est une loi de Lévy.

La plupart des méthodes de test traditionnelles perdent leur validité en présence de lois α-stables, et ne satisfont plus aux conditions de niveau nominales. Les tests de permutation (grâce à leur propriété d'α-structure de Neyman en la statistique d'ordre des résidus) et les tests de rangs (grâce à leurs propriétés d'invariance et de liberté sous l'hypothèse nulle) constituent une exception notoire à cette règle, et conservent un niveau qui ne dépend pas de la densité sous-jacente.

Si les tests de rangs sont insensibles aux variations de la densité sous-jacente, et sont donc robustes du point de vue de la validité (*validity-robustness*), rien n'est connu, sous des lois stables, de leurs performances sous les contre-hypothèses, et donc de la robustesse de leur puissance (*efficiency-robustness*). Ce point demande en effet le calcul de puissances locales — un calcul qui n'est simple que dans les familles localement asymptotiquement normales (LAN).

Dans ce travail, nous établissons la normalité locale asymptotique des familles de lois α-stables, et utilisons ce résultat, combiné avec le troisième lemme de Le Cam, pour obtenir les puissances locales de divers tests de rangs traditionnels pour les problèmes de position à deux échantillons, les modèles de régression avec ordonnée à l'origine non spécifiée, et le modèle d'analyse de la variance à un facteur (tests de Wilcoxon et de van der Waerden, test de la médiane, et leurs équivalents pour la régression et l'analyse de la variance) en présence de lois α-stables. Ces puissances locales et les efficacités asymptotiques relatives qui en découlent sont étudiées en fonction des paramètres α et β (elles ne dépendent ni de θ ni de σ).

Mots clés. Distributions stables, normalité locale asymptotique, tests de rangs, efficacité asymptotique relative.

Rank-Based Inference under α-stable Distributions

Summary

Since their introduction in the mid 1920's by Paul Lévy, stable laws have attracted a considerable amount of attention from, among others, physicists, climatologists, economists, financial mathematicians, and actuaries. The popularity of such laws originates in the fact that they provide a flexible solution to the problem of modeling variables for which empirical evidence suggests the need for a heavy tailed or skewed underlying distribution, which is impossible in the framework of the classical Gaussian models.

A univariate α-stable distribution is characterized by four parameters : a *location* parameter $\theta \in \mathbb{R}$, a *scale* parameter $\sigma > 0$, a *skewness* parameter $\beta \in [-1, 1]$ and a *characteristic exponent* or *tail* parameter $\alpha \in (0, 2]$. One of the major hindrances to the study of such laws is that their densities, in general, do not allow for a closed-form expression, and are only expressible in terms of the inverse Fourier transform of the characteristic function

$$\phi(t;\alpha,\beta,\theta,\sigma) = \begin{cases} \exp\left\{it\theta - |\sigma t|^{\alpha}\left(1 - i\beta \mathrm{sign(t)} \tan(\pi\alpha/2)\right)\right\} & \text{if } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{it\theta - |\sigma t|^{\alpha}\left(1 - i\beta \mathrm{sign(t)}(-(2/\pi)\ln|t|)\right)\right\} & \text{if } \alpha = 1. \end{cases}$$

Certain choices of the parameters α and β do, however, yield specific cases for which a closed form expression of the density exists : a stable distribution with (i) $\alpha = 2$ and $\beta = 0$ is a Gaussian distribution ; (ii) $\alpha = 1$ and $\beta = 0$ is a Cauchy distribution ; (iii) $\alpha = 1/2$ and $\beta = 1$ is a Lévy distribution.

Most classical testing procedures are not valid under α-stable laws, as they no longer satisfy the nominal level conditions. Permutation tests (thanks to their Neyman α-structure in the order statistic of the residuals) and rank tests (thanks to their invariance and distribution-freeness under the null hypothesis) are well known exceptions to this rule, and these tests preserve a level which does not depend on the underlying density.

Although rank tests are not sensitive to variations of the underlying density, and are thus robust as far as their validity is concerned (*validity-robustness*), nothing is known, under stable laws, of their performances under the alternatives, and thus nothing is known of their *efficiency-robustness*. This would, indeed, demand for the computation of local powers — a computation which is easy only within locally asymptotically normal families (LAN).

In this work, we establish the local asymptotic normality of α-stable families, and we use this result, combined with Le Cam's third lemma, to obtain local powers of different classical rank tests for two-sample location problems, regression models with unspecified intercept, and one-way analysis of variance (Wilcoxon's and van der Waerden's test, the median test, and their counterparts for regression and analysis of variance) under α-stable laws. These local powers and the corresponding asymptotic relative efficiencies are studied as functions of the parameters α and β (since they depend neither on θ nor on σ).

Key words. Stable distributions, local asymptotic normality, rank tests, asymptotic relative efficiencies.

Bibliographie

[1] DuMouchel, W. H. (1973) On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution, *The Annals of Statistics* 1, 948-957.

[2] Hájek, J., and Z. Šidák (1967) *Theory of Rank Tests.* Academic Press, New York.

[3] Hallin, M., and M.L. Puri (1994) Aligned rank tests for linear models with autocorrelated error terms, *Journal of Multivariate Analysis* 50, 175-237.

[4] Hallin, M., and B.J.M. Werker (2003) Semiparametric efficiency, distribution-freeness, and invariance, *Bernoulli* 9, 137-165.

[5] Le Cam, L. (1986) *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer-Verlag, New York.

[6] Le Cam, L., and G. L. Yang (2000) *Asymptotics in Statistics*, 2nd edition. Springer-Verlag, New York.