



# Détection et localisation de défauts multiples par analyse en composantes principales

Yvon Tharrault, Mohamed-Faouzi Harkat, Gilles Mourot, José Ragot

► **To cite this version:**

Yvon Tharrault, Mohamed-Faouzi Harkat, Gilles Mourot, José Ragot. Détection et localisation de défauts multiples par analyse en composantes principales. 41èmes Journées de Statistique, May 2009, Bordeaux, France. pp.CDRom, 2009. <inria-00386651>

**HAL Id: inria-00386651**

**<https://hal.inria.fr/inria-00386651>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES PAR ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES

Yvon THARRAULT\* & Mohamed-Faouzi HARKAT\*\* & Gilles MOUROT\* & José RAGOT\*

\* *Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Nancy Université, CNRS,  
2, Avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy, France  
{yvon.tharrault, gilles.mourot, jose.ragot}@ensem.inpl-nancy.fr*

\*\* *Université Badji Moktar - Annaba, Faculté des Sciences de l'Ingénieur,  
Département d'Electronique, BP. 12, ANNABA, 23000 Algérie  
mharkat@univ-annaba.org*

**Résumé.** L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode réputée efficace pour la compression d'information. Cette communication présente l'utilisation de l'ACP pour la détection et la localisation de défauts multiples de mesures à partir d'un principe de reconstruction de variables et d'analyse des projections de ces reconstructions dans l'espace dit résiduel.

**Abstract.** Principal component analysis (PCA) has been applied successfully for data compression. Here, the purpose is to use PCA for detection and isolation of faults affecting measurements by using both reconstruction and projection of variables. Then, this procedure for outliers detection and isolation is successfully applied to an example with multiple faults.

Mots clefs : statistique de processus, analyse de données

## 1 Introduction

L'ACP a souvent été utilisée avec succès dans les problèmes de compression de données. Ici, notre présentation est consacrée au problème de détection et de localisation de défauts dans des données. Pour cela, des résidus structurés sont utilisés pour détecter et localiser des défauts multiples en utilisant le principe de reconstruction des variables et leur projection dans un sous espace particulier. La section 2 est un bref rappel de l'analyse en composantes principales. Puis, une procédure de détection et de localisation de valeurs aberrantes est ensuite proposée en section 3. Finalement en section 4, cette méthode est appliquée à des données corrompues par des défauts affectant plusieurs variables simultanément.

## 2 Principe de l'analyse en composantes principales

Soit une matrice de données  $X \in \mathbb{R}^{N \times n}$  qui rassemblent les  $N$  mesures effectuées sur les  $n$  variables d'un système en fonctionnement normal (absence de défauts). L'ACP détermine une transformation optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) de la matrice de données  $X$  :

$$T = XP \quad \text{et} \quad X = TP^T \quad (1)$$

où  $T \in \mathbb{R}^{N \times n}$  et  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont les matrices des composantes principales et des vecteurs propres correspondants issus de la décomposition spectrale de la matrice de covariance  $\Sigma$  de  $X$  :

$$\Sigma = P\Lambda P^T \quad \text{avec} \quad PP^T = P^T P = I_n \quad (2)$$

avec  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres ordonnées dans l'ordre décroissant. Les relations (1) trouvent leur intérêt lorsqu'on diminue la dimension de l'espace de représentation. Une fois déterminé le nombre  $\ell < n$  de composantes à retenir, la matrice  $X$  des données peut être approximée. Pour cela la matrice des vecteurs propres est partitionnée sous la forme :

$$P = (\hat{P} \quad \tilde{P}) \quad \hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times \ell} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Ce travail a été réalisé avec le soutien du programme Égide TASSILI n°07 MDU 714. Les auteurs remercient sincèrement le Ministère de la Culture, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche du gouvernement luxembourgeois pour leur participation au financement de ces travaux.

Les  $\ell$  premiers vecteurs propres  $\hat{P}$  constituent l'espace principal alors que les  $(n - \ell)$  derniers vecteurs propres  $\tilde{P}$  constituent l'espace résiduel. A partir de l'équation (1), on peut alors expliciter la partie  $\hat{X}$  des données expliquées par les  $\ell$  premiers vecteurs propres et la partie résiduelle  $\tilde{X}$  expliquée par les composantes restantes :

$$\hat{X} = X\hat{P}\hat{P}^T = X\hat{C}^{(\ell)} \quad (4)$$

$$E = X - \hat{X} = X(I - \hat{C}^{(\ell)}) \quad (5)$$

$$\hat{C}^{(\ell)} = \hat{P}\hat{P}^T \quad (6)$$

où l'on notera que la matrice  $\hat{C}^{(\ell)}$  n'est pas égale à la matrice identité sauf dans le cas  $\ell = n$ . Une approche plus robuste consiste à appliquer directement l'ACP à partir d'une version robuste de la matrice de covariance [2], [4].

### 3 Détection et localisation de défauts

L'ACP peut être utilisée pour la détection de défauts, les défauts se traduisant par des données aberrantes que l'on peut mettre en évidence par projection sur certains axes principaux. Tout d'abord, on rappelle comment reconstruire une variable parmi  $n$  à partir des  $n - 1$  variables restantes [1] et plus généralement  $r$  parmi les  $n - r$  restantes. Puis, on montre l'utilisation de cette reconstruction pour la détection et la localisation de données aberrantes.

#### 3.1 Reconstruction de variables

Connaissant un modèle ACP, pour éprouver la cohérence d'un nouveau vecteur de mesure  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ , on peut écrire la décomposition suivante :

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}} \quad , \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{C}^{(\ell)} \mathbf{x} \quad , \quad \tilde{\mathbf{x}} = (I - \hat{C}^{(\ell)}) \mathbf{x} \quad (7)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}$  sont respectivement les projections de  $\mathbf{x}$  sur l'espace principal et sur l'espace résiduel. A partir de (7), il est possible d'estimer une partie du vecteur  $\mathbf{x}$ , par exemple le sous ensemble de composantes dont les indices  $r$  sont les éléments d'un ensemble  $R$ . Cependant, en raison de la présence éventuelle de valeurs aberrantes dans  $\mathbf{x}$ , il est préférable d'effectuer cette reconstruction  $\hat{\mathbf{x}}$  en utilisant seulement une partie des composantes de  $\mathbf{x}$ . A cet effet, on définit la matrice  $D_R$  qui indique les directions de reconstruction. Cette matrice de dimension  $(n \times r)$ , est constituée d'éléments 0 et 1, les valeurs 1 désignant les numéros des composantes à reconstruire. Ainsi pour reconstruire les variables 2 et 4 parmi 5 variables, on a  $R = \{2, 4\}$  et la matrice  $D_R$  est définie par :

$$D_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Le vecteur reconstruit  $\hat{\mathbf{x}}_R$  du vecteur  $\mathbf{x}$  s'explique :

$$\hat{\mathbf{x}}_R = G_R \mathbf{x} \quad (8)$$

$$\tilde{D}_R = (I - \hat{C}^{(\ell)}) D_R \quad (9)$$

$$G_R = I - D_R(\tilde{D}_R^T \tilde{D}_R)^{-1} \tilde{D}_R^T \quad (10)$$

#### 3.2 Condition de reconstruction et interprétation

Notons que si  $\tilde{D}_R$  est de plein rang colonne, alors  $(\tilde{D}_R^T \tilde{D}_R)^{-1}$  existe et les variables du sous ensemble  $R$  sont complètement restructuribles. Cette condition entraîne que le nombre de variables  $r$  à reconstruire doit respecter (11) et que les colonnes de la matrice  $\tilde{D}_R$  ne doivent être ni nulles ni colinéaires :

$$r \leq n - \ell \quad (11)$$

La matrice des directions de reconstruction peut être structurée de la façon suivante :

$$D_R = \left[ \begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline (r \times r) & ((n-r) \times r) \end{array} \right]^T \in \mathcal{R}^{n \times r} \quad (12)$$

avec  $I_1 \in \mathfrak{R}^{r \times r}$  la matrice identité. Alors  $\hat{C}^{(\ell)}$  peut être partitionnée :

$$\hat{C}^{(\ell)} = \left[ \begin{array}{c|c} c_1 & c_2 \\ \hline (r \times r) & (r \times (n-r)) \\ c_2^T & c_4 \\ \hline ((n-r) \times r) & ((n-r) \times (n-r)) \end{array} \right] \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (13)$$

En utilisant (8) la reconstruction  $\hat{\mathbf{x}}_R$  du vecteur  $\mathbf{x}$  peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{x}}_R = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & (I_1 - c_1)^{-1} c_2 \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right] \mathbf{x} \quad (14)$$

où  $I_2 \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  est une matrice identité. L'expression (14) met en relief deux caractéristiques. Tout d'abord, le vecteur des reconstructions  $\hat{\mathbf{x}}_R$  est constitué des  $r$  variables reconstruites et d'une recopie des  $(n-r)$  variables restantes. Puis, les variables reconstruites le sont sans utiliser leurs propres mesures qui peuvent être corrompues par des défauts.

### 3.3 Génération de résidus structurés

Le diagnostic nécessite de détecter mais aussi de localiser les mesures en défaut. Pour cela, on génère des résidus mettant en évidence ces défauts en projetant les reconstructions dans l'espace résiduel. Ces projections et les carrés de leur normes sont définis par :

$$\tilde{\mathbf{x}}_R = P_R^{(\ell)} \mathbf{x} \quad (15)$$

$$\Delta_R = \|\tilde{\mathbf{x}}_R\|^2 \quad (16)$$

où

$$P_R^{(\ell)} = (I - \hat{C}^{(\ell)}) G_R \quad (17)$$

$$= (I - \hat{C}^{(\ell)}) - \tilde{D}_R (\tilde{D}_R^T \tilde{D}_R)^{-1} \tilde{D}_R^T \quad (18)$$

**Propriété 1.** La matrice de projection  $P_R^{(\ell)}$  a la propriété suivante :

$$P_R^{(\ell)} D_R = 0 \quad (19)$$

ce qui signifie que les composantes de  $\tilde{\mathbf{x}}_R$  ne sont pas sensibles aux composantes de  $\mathbf{x}$  appartenant au sous-ensemble  $R$ . Cette propriété peut être mise à profit pour identifier les composantes de  $\mathbf{x}$  affectées par des défauts. Par exemple, considérons la mesure  $\mathbf{x}$  composée de la valeur vraie  $\mathbf{x}^*$ , du bruit  $\epsilon$  de valeur moyenne nulle et d'un défaut d'amplitude  $d$  agissant dans la direction  $D_F$ , où  $F$  est l'ensemble des indices correspondant aux directions de défauts :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \epsilon + D_F d \quad (20)$$

Le résidu (15) et son espérance mathématique s'explicitent alors :

$$\tilde{\mathbf{x}}_R = P_R^{(\ell)} (\mathbf{x}^* + \epsilon + D_F d) = P_R^{(\ell)} (\epsilon + D_F d) \quad (21)$$

$$E(\tilde{\mathbf{x}}_R) = P_R^{(\ell)} D_F d \quad (22)$$

- si les directions de reconstruction  $D_R$  sont identiques aux directions des défauts, i.e. si  $R = F$ , alors toutes les composantes du vecteur  $P_R^{(\ell)} D_F$  sont nulles et  $E(\tilde{\mathbf{x}}_R) = 0$ ,
- si les directions de reconstruction  $D_R$  sont différentes de celles des défauts, alors toutes les composantes du vecteur  $P_R^{(\ell)} D_F$  sont a priori non nulles sauf celles appartenant au sous-ensemble  $R$ .

L'analyse des amplitudes des résidus  $\tilde{\mathbf{x}}_R$  pour toutes les combinaisons possibles de directions de défauts montre la présence des défauts et permet de déterminer les composantes du vecteur de mesures affectées par ces défauts [5].

## 4 Résultats numériques – cas multi-défauts

### 4.1 Génération des données

Pour mettre en évidence l'aptitude de la méthode proposée à détecter des défauts, un exemple où les valeurs aberrantes sont parfaitement connues est utilisé. La matrice  $X$  est constituée de  $N = 128$  observations d'un vecteur  $\mathbf{x}$  à 7 composantes générées de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{l} x_{i,1} = v_i^2 + \sin(0.1i) \quad v_i \sim \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,4} = x_{i,1} + x_{i,2} \\ x_{i,7} = x_{i,1} + x_{i,3} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_{i,2} = 2 \sin(i/6) \cos(i/4) \exp(-i/N) \\ x_{i,5} = x_{i,1} - x_{i,2} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_{i,3} = \log(x_{i,2}^2) \\ x_{i,6} = 2x_{i,1} + x_{i,2} \end{array} \right.$$

Aux données ainsi générées ont été superposées des réalisations de variables aléatoires à distribution normale centrée et d'écart-type 0.02 ainsi que des défauts  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4$  représentés par des biais d'amplitude égale à 3 et définis de la façon suivante : des instants 10 à 24 pour la variable  $x_1$ , des instants 35 à 49 pour les variables  $x_2$  et  $x_3$ , des instants 60 à 74 pour les variables  $x_3$  et  $x_4$ , des instants 85 à 99 pour la variable  $x_4$ . Dans la suite, ces quatre intervalles sont désignés par  $I_1, I_2, I_3, I_4$ .

### 4.2 Analyse de sensibilité

Concernant l'analyse a priori de la localisation des défauts, nous nous limitons à donner une table réduite de signatures (table 1) établies à partir des propriétés de la matrice de projection. Elle ne fait apparaître que quelques défauts possibles, notés  $\delta$  dans la première ligne, ceux affectant les variables 1, 2, 3, 4 et ceux affectant les couples de variables  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ . La première colonne est relative aux indicateurs  $\Delta_R$  (16) obtenus par reconstruction-projection des variables en utilisant toutes les composantes de  $\mathbf{x}$  sauf celles de rang appartenant à l'ensemble  $R$ .

Cette table, que le lecteur pourra étendre à l'ensemble des défauts, fournit une correspondance entre les symptômes et les défauts. Par exemple, le défaut  $\delta_2$  affecte toutes les projections sauf celles établies sans utiliser les composantes 2,  $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}$ .

### 4.3 Détection/localisation de défauts

A partir des données contaminées, le modèle *ACP*, limité à quatre axes principaux déterminés à partir de l'examen des valeurs propres de  $\Sigma$ , a été déterminé. Sans effectuer de reconstruction, les observations ont été projetées sur l'espace résiduel. L'analyse des résidus ainsi générés en utilisant toutes les variables révèle la présence de défaut dans les quatre intervalles  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , sans pour autant pouvoir incriminer une variable particulière. Cette phase de détection est maintenant complétée par une phase de localisation des défauts dans le cas de deux défauts au maximum simultanément présents. Pour cela, l'ensemble des combinaisons possible de reconstructions d'une variable puis de deux variables parmi 7 sont calculées.

Les figures 1 et 2 visualisent deux de ces reconstructions, la première sans utiliser la variable 1, la seconde sans utiliser les variables 3 et 4. Chaque figure montre la reconstruction des sept premières variables. Les données reconstruites ont ensuite été projetées sur l'espace résiduel. Pour chaque observation, l'indicateur de défaut  $\Delta_R$  (16) a été calculé.

Analysons la figure 1. La variable 1, biaisée pour les observations de l'intervalle  $I_1$ , n'est pas utilisée pour la reconstruction et les autres variables qui servent à la reconstruction ne présentent pas de biais. Pour ces observations, les reconstructions sont donc correctes, ce que met en évidence le premier graphique (à partir du haut de la figure) où l'on observe la superposition des variables reconstruites avec les variables vraies c'est-à-dire non biaisées (en pratique ces dernières sont inconnues, mais dans cette phase où les données sont générées, la comparaison est possible). On a également indiqué la mesure de la variable afin de la comparer à la reconstruction.

Ce résultat est confirmé par le dernier graphique de la figure 1 où l'on a tracé la norme du vecteur projection (16). Pour les observations de l'intervalle  $I_1$  cette norme est nulle par construction témoignant ainsi de l'absence de valeurs aberrantes dans les variables utilisées pour la reconstruction et la projection, c'est-à-dire toutes les variables sauf  $x_1$ . On note aussi que les trois autres groupes d'observations ( $I_2, I_3,$

	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{14}$	$\delta_{23}$	$\delta_{24}$	$\delta_{34}$
$\Delta_1$	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_2$	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_3$	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_4$	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×
$\Delta_5$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_6$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_{12}$	0	0	×	×	0	×	×	×	×	×
$\Delta_{13}$	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×
$\Delta_{14}$	0	×	×	0	×	×	0	×	×	×
$\Delta_{15}$	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_{16}$	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_{23}$	×	0	0	×	×	×	×	0	×	×
$\Delta_{24}$	×	0	×	0	×	×	×	×	0	×
$\Delta_{25}$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_{26}$	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_{34}$	×	×	0	0	×	×	×	×	×	0
$\Delta_{35}$	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×
$\Delta_{36}$	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×

	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$
$\Delta_1$	0	×	×	×
$\Delta_{23}$	×	0	×	×
$\Delta_{24}$	×	×	×	0
$\Delta_{34}$	×	×	0	0

Table 2: Signatures de défauts

Table 1: Table réduite des signatures de défauts

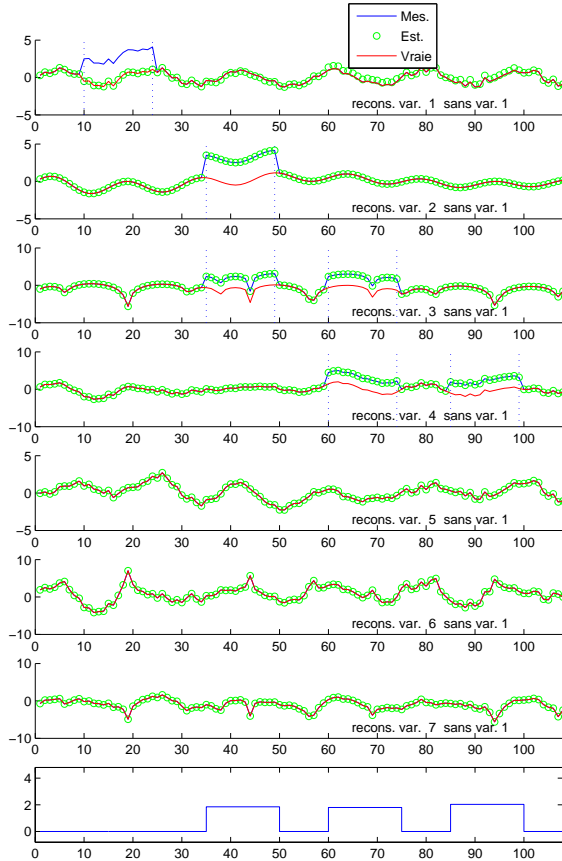


Figure 1: Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1 et indicateur de défaut

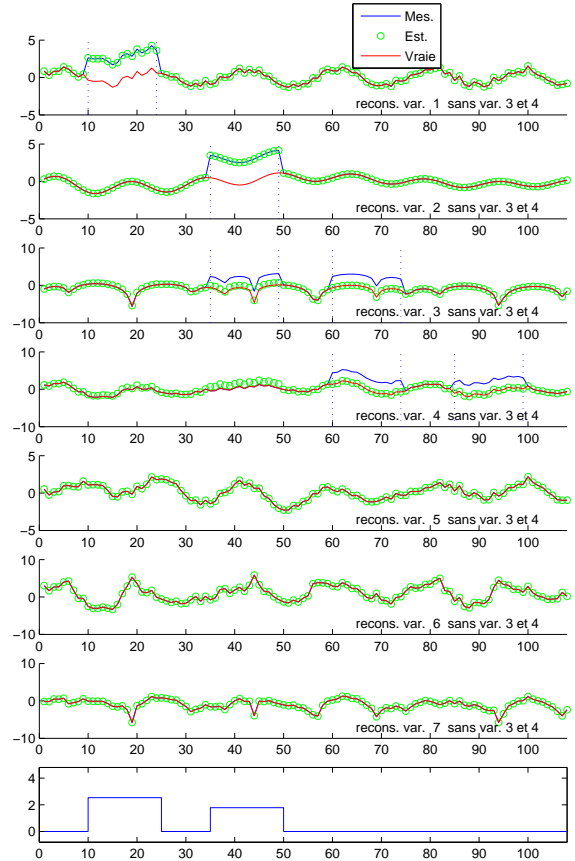


Figure 2: Reconstruction des variables sans utiliser les variables 3 et 4 et indicateur de défaut

$I_4$ ) sont affectés de défauts, sans savoir exactement quelle (s) composante (s) du vecteur de mesure en sont la cause. Finalement, compte tenu de la présence de défauts dans les quatre intervalles, l'examen des figures (1) et (2) conclut à :

- dans l'intervalle  $I_1$ , la variable  $x_1$  est en défaut

- dans chaque intervalle  $I_2, I_3, I_4$ , une variable autre que  $x_1$  est en défaut

Les autres projections (non présentées ici) se construisent et s'interprètent de façon analogue. La table 2 résume les conclusions issues de l'analyse des projections. La ligne  $\Delta_1$  est relative à la projection des résidus avec reconstruction sans utiliser la première variable... Le symbole 0 témoigne de l'absence de défaut dans l'intervalle considéré. Le diagnostic est donc :

- dans l'intervalle  $I_1$ ,  $x_1$  est en défaut

- dans l'intervalle  $I_2$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont en défaut

- dans l'intervalle  $I_3$ ,  $x_3$  et  $x_4$  sont en défaut

- dans l'intervalle  $I_4$ ,  $x_4$  est en défaut

## 5 Conclusion

Dans cet article, on a montré l'utilisation de l'ACP à la détection de défauts de mesure. Pour cela, des résidus structurés sont utilisés pour détecter et localiser des défauts multiples. La génération de ces résidus structurés est basée sur le principe de reconstruction et de projection de variables. Cette procédure est appliquée avec succès sur un système soumis à des défauts multiples.

## References

- [1] R. Dunia and S. J. Qin. A subspace approach to multidimensional fault identification and reconstruction. *AIChE Journal*, 44 (8), 1813-1831, 1998.
- [2] M. Fekri, A. Ruiz-Gazen. Robust weighted orthogonal regression in the errors-in-variables model. *Journal of Multivariate Analysis* 88, 89-108, 2003.
- [3] G. H. Golub et C. F. Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [4] M. Hubert, P.J. Rousseeuw and K. Van den Branden. ROBPCA: a New Approach to Robust Principal Component Analysis. *Technometrics*, 47, 64-79, 2005.
- [5] Tharrault Y., Mourot G., Ragot J., Maquin D. Fault detection and isolation with robust principal component analysis. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 18(4), 2008.