

# Bornes pour le temps de blocage dans un système d'attente à serveur non fiable

Karima Lagha, Smail Adjabi

► **To cite this version:**

Karima Lagha, Smail Adjabi. Bornes pour le temps de blocage dans un système d'attente à serveur non fiable. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. 2009. <inria-00386669>

**HAL Id: inria-00386669**

**<https://hal.inria.fr/inria-00386669>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# BORNES POUR LE TEMPS DE BLOCAGE DANS UN SYSTÈME D'ATTENTE À SERVEUR NON FIABLE.

Karima LAGHA & Smail ADJABI

*Laboratoire LAMOS, Université de Béjaia, 06000 Béjaia, Algérie.*

## Abstract :

The characterization of the distributions by their qualitative properties made it possible to study characteristics of the systems such as : the mean stationary waiting time in the GI/GI/1 system and the mean time of life system constituted by two repairable elements, Lagha & al. (2004).

In this work we consider a single-server queuing system with an unreliable server and service repetition. We consider exponential server failure time and service time belonging to a non parametric class (IFR, NBU, DFR and NWU class). Then we obtain bounds for the blocking time in the system by using lower and upper bounds of reliability functions presented by Sengupta (1994).

**Key words** : Bounds, Nonparametric laws, blocking time, failure .

## Résumé :

La caractérisation des distributions et leur propriétés qualitatives rendent possible la détermination des caractéristiques des systèmes, à savoir : le temps moyen d'attente dans un système GI/GI/1, le temps moyen de vie dans un système constitué de deux éléments réparables, Lagha & al. (2004).

Dans ce travail nous considérons un système d'attente GI/GI/1 à serveur non fiable avec répétition de service. En supposant que les temps de défaillance du serveur sont exponentiels, nous utilisons les propriétés qualitatives de la loi de service (on considère les lois non paramétriques IFR, NBU, DFR ou NWU) et les bornes de d'une fonction de fiabilité, obtenues par Sengupta (1994), pour la détermination des bornes pour le temps moyen de blocage dans le système.

**Mots Clés** : Bornes, Lois Nonparametriques, Temps de blocage, Temps de défaillance.

## 1. Introduction

On considère un système de files d'attente à un serveur non fiable et répétition de service. Si un client est en service à l'instant de panne du serveur, le service est interrompu, et recommencé immédiatement à nouveau (le temps de réparation est supposé instantané). Le client termine son service lorsque le service est achevé sans interruption. Le temps total pris par un client à partir de l'instant de l'entrée en service jusqu'à la fin du service est dit "**temps de blocage**", représenté par la variable :

$$Z_\lambda = X \cdot \mathbf{1}_{\{X \leq Y\}} + (Y + Z_\lambda^*) \cdot \mathbf{1}_{\{X > Y\}}, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

où  $X, Y$  et  $Z_\lambda^*$  sont des v.a. non négatives et indépendantes,  $X$  désigne le temps de service avec interruption possible,  $Y$  le temps de défaillance du serveur supposé exponentiel de paramètre  $\lambda$ .  $Z_\lambda^*$  a la même distribution que  $Z_\lambda$  (on note  $Z_\lambda^* \stackrel{d}{=} Z_\lambda$ ) et  $\mathbf{1}_{\{X \leq Y\}}$  est la fonction indicatrice de l'événement  $\{X \leq Y\}$  défini par 1 si l'événement  $\{X \leq Y\}$  est vrai et 0 sinon.

*Dimitrov* et *Khalil* (1990) ont obtenu deux caractérisations de la distribution exponentielle du temps de service. *Lin* (1993) et *JIAN-LUN XU* (1998) ont obtenu une autre caractérisation via le coefficient de variation de  $Z_\lambda$ .

Dans notre travail, nous considérons une loi de service générale mais ayant une propriété qualitative (IFR, DFR, NBU ou NWU). Nous déterminons, dans le théorème (1) de la section (), les bornes inférieure et supérieure pour le temps moyen de blocage.

## 2. Main results

Soient  $F_\lambda(t)$ ,  $G_X(t)$  et  $G_Y(t)$  les fonctions distribution des v.a.  $Z_\lambda$ ,  $X$  et  $Y$ , respectivement. Soit  $\bar{F}_\lambda(t) = 1 - F_\lambda(t)$  et  $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

A partir de (1) et avec de simples transformations probabilistes on obtient

$$\bar{F}_\lambda(t) = \bar{G}(t) \exp(-\lambda t) + \int_0^t \bar{F}_\lambda(t-u) \bar{G}(u) \lambda \exp(-\lambda u), \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

En utilisant la relation (2) on peut déduire que le temps moyen de blocage  $EZ_\lambda$  vérifie :

$$P.EZ_\lambda = E(\min(X, Y)). \quad (3)$$

où,

$$E(\min(X, Y)) = \int_0^t \bar{G}(t) \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} (1 - \mathcal{L}_X(\lambda)).$$

$$P = \int_0^t \lambda G(t) \exp(-\lambda t) dt = \mathcal{L}_X(\lambda) = P(X \leq Y).$$

Avec  $\mathcal{L}_X(\lambda) = E(\exp(-\lambda X))$  est la transformée de Laplace-Stieltjes de la variable aléatoire  $X$ .

On suppose que la distribution de service appartient à la famille (IFR, DFR, NBU ou NWU). Les bornes inférieures et supérieures pour le temps moyen de blocage sont ainsi obtenues :

**Théorème 1.** *On suppose que  $X$  est non dégénérée au point zéro et  $Y$  est exponentielle de moyenne  $1/\lambda$ . Alors  $X$  est DFR implique*

$$EZ_\lambda \leq \frac{x_0(e^r - e^{-\lambda x_0}) + (r + \lambda x_0)x_0^r I_r}{re^r + \lambda x_0 e^{-\lambda x_0} - \lambda(r + \lambda x_0)x_0^{-r} I_r},$$

où  $I_r = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-r} e^{-\lambda t} dt$ ,  $r > 0$  et  $x_0 = r \left[ \frac{EX^r}{\Gamma(r+1)} \right]^{1/r}$ .

*Démonstration.*

La fonction de répartition  $G$  de  $X$  appartient à la classe  $DFR \Rightarrow$

$$\bar{G}(x) \leq \begin{cases} e^{-(rx/x_0)} & , x < x_0 \\ (x_0/x)^r e^{-r} & , x \geq x_0 \end{cases}, \quad \text{with } x_0 = r \left[ \frac{EX^r}{\Gamma(r+1)} \right]^{1/r}.$$

Alors,

$$E(\min(X, Y)) = \int_0^{\infty} \bar{G}(t) e^{-\lambda t} dt \leq \frac{x_0}{r + \lambda x_0} (1 - e^{-(r+\lambda x_0)}) + e^{-r} x_0^r \int_{x_0}^{+\infty} t^{-r} e^{-\lambda t} dt,$$

et

$$EZ_{\lambda} = EM/p \quad \text{avec } p = \mathcal{L}_X(\lambda) = 1 - \lambda EM. \quad (4)$$

D'où,

$$EZ_{\lambda} \leq \frac{x_0(e^r - e^{-\lambda x_0}) + (r + \lambda x_0)x_0^r I_r}{re^r + \lambda x_0 e^{-\lambda x_0} - \lambda(r + \lambda x_0)x_0^{-r} I_r},$$

où  $I_r = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-r} e^{-\lambda t} dt$  converge pour tout  $x_0 > 0$  and  $r > 0$ .  $\square$

**Cas particulier** : Si  $r = 1$  et  $x_0 = 1/\lambda$  alors,

$$EZ_{\lambda} \leq x_0 \left[ \frac{\sinh 1 + I_1}{\cosh 1 - I_1} \right], \quad x_0 = 1/\lambda, \quad \text{et } I_1 = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-1} e^{-\lambda t} dt.$$

**Théorème 2.** Avec les mêmes conditions que le théorème (1), si  $X$  appartient à la classe  $IFR$  alors

$$EZ_{\alpha} \geq \frac{(1 - e^{-(1+\lambda/\alpha)})}{\alpha + \lambda e^{-(1+\lambda/\alpha)}},$$

avec  $\alpha = 1/EX$ .

*Démonstration.*

La fonction de répartition  $G$  de  $X$  appartient à la classe  $IFR \Rightarrow$

$$\bar{G}(x) \geq \begin{cases} e^{-\alpha t} & , t < 1/\alpha \\ 0 & , t \geq 1/\alpha. \end{cases}, \quad \text{tel que } \alpha = 1/EX.$$

D'où,

$$EM \geq \frac{1}{\lambda + \alpha} (1 - e^{-(1+\lambda/\alpha)}).$$

En utilisant (4) on obtient

$$EZ_{\alpha} \geq \frac{(1 - e^{-(1+\lambda/\alpha)})}{\alpha + \lambda e^{-(1+\lambda/\alpha)}}.$$

$\square$

**Théorème 3.** Avec les mêmes conditions que le théorème (1), si  $X$  appartient à la classe  $NBU$  alors

$$EZ_\lambda \geq \frac{\beta + e^{-\beta} - 1}{\lambda(1 - e^{-\beta})}, \quad \beta = \lambda x_0.$$

*Démonstration.*

La fonction de répartition  $G$  de  $X$  appartient à la classe  $NBU \Rightarrow$

$$\bar{G}(x) \geq \begin{cases} 1 - x/x_0 & , x < x_0 \\ 0 & , x \geq x_0 \end{cases}, \quad \text{avec } x_0 = EX.$$

D'où,

$$EM \geq \frac{1}{x_0 \lambda^2} (\lambda x_0 + e^{-\lambda x_0} - 1).$$

En utilisant (4) on obtient

$$EZ_\lambda \geq \frac{\beta + e^{-\beta} - 1}{\lambda(1 - e^{-\beta})}, \quad \beta = \lambda x_0.$$

□

Cas particulier : Si  $x_0 = 1/\lambda$  et  $\beta = 1$  alors

$$EZ_\lambda \geq \frac{e^{-1}}{\lambda(1 - e^{-1})}.$$

**Théorème 4.** Avec les mêmes conditions que le théorème (1), si  $X$  appartient à la classe  $NWU$  alors

$$EZ_\lambda \leq \frac{x_0 e^\beta I_1}{1 - \beta e^\beta I_1}, \quad \beta = \lambda x_0 \text{ et } I_1 = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-1} e^{-\lambda t} dt.$$

*Démonstration.* La fonction de répartition  $G$  de  $X$  appartient à la classe  $NWU \Rightarrow$

$$\bar{G}(t) \leq \frac{x_0}{t + x_0}, \quad x_0 = EX, t \geq 0.$$

D'où,

$$EM \leq x_0 e^{\lambda x_0} I_1.$$

où  $I_1$  converge et en utilisant la relation (4) on obtient le résultat pour  $\beta = \lambda x_0$ . □

### 3. Conclusion

Dans ce travail, nous avons calculés des bornes inférieures et supérieures pour le temps moyen de blocage dans un système à serveur non fiable, lorsque le temps de service suit une loi appartenant à la classe IFR, NBU, DFR ou NWU et un temps de défaillance exponentiel. Ces bornes ont été calculées en utilisant les résultats de Sengupta sur les bornes d'une fonction de fiabilité quelconque.

### Références

- Sengupta, D. (1994). Another Look at the moment Bounds on Reliability. *J. Applied. Probability* 31, 777–787.
- Adjabi, S. and Lagha, K. et al. (2004). Application des lois non paramétriques dans les systèmes d'attente et théorie de renouvellement. *An International Journal on Operations Research : RAIRO-Operations Research* Vol 38, N° 03, 243–254.
- Dimitrov, B. and Khalil, Z. (1990). *On a new characterization of the exponential distribution related to a queueing system with an unreliable server.* *J. Appl. Prob.* 27, 221–226.
- JIAN-LUN, XU. (1998). *Characterizations of the exponential distribution via the blocking time in a queueing system with an unreliable server.* *J. Appl. Prob.* 35, 236–239.