Bornes pour le temps de blocage dans un système d'attente à serveur non fiable

Karima Lagha, Smail Adjabi

Bornes pour le temps de blocage dans un système d'attente à serveur non fiable.

Karima LAGHA & Smail ADJABI

Laboratoire LAMOS, Université de Béjaia, 06000 Béjaia, Algérie.

Abstract :
The characterization of the distributions by their qualitative properties made it possible to study characteristics of the systems such as : the mean stationary waiting time in the GI/GI/1 system and the mean time of life system constituted by two repairable elements, Lagha & al. (2004).
In this work we consider a single-server queuing system with an unreliable server and service repetition. We consider exponential server failure time and service time belonging to a non parametric class (IFR, NBU, DFR and NWU class). Then we obtain bounds for the blocking time in the system by using lower and upper bounds of reliability functions presented by Sengupta (1994).
Key words : Bounds, Nonparametric laws, blocking time, failure .

Résumé :
La charactérisation des distributions et leur propriétés qualitatives rendent possible la détermination des charatéristiques des systèmes, à savoir : le temps moyen d'attente dans un système GI/GI/1, le temps moyen de vie dans un système constitué de deux éléments réparables, Lagha & al. (2004).
Dans ce travail nous considérons un système d'attente GI/GI/1 à serveur non fiable avec répétition de service. En supposant que les temps de défaillance du serveur sont exponentiels, nous utilisons les propriétés qualitatives de la loi de service (on considère les lois non paramétriques IFR, NBU, DFR ou NWU) et les bornes de d'une fonction de fiabilité, obtenues par Sengupta (1994), pour la détermination des bornes pour le temps moyen de blocage dans le système.

Mots Clés : Bornes, Lois Nonparametriques, Temps de blocage, Temps de défaillance.

1. Introduction

On considère un système de files d'attente à un serveur non fiable et répétition de service. Si un client est en service à l'instant de panne du serveur, le service est interrompu, et recommencé immédiatement à nouveau (le temps de réparation est supposé instantané). Le client termine sont service lorsque le service est achevé sans interruption. Le temps total pris par un client à partir de l'instant de l'entrée en service jusqu'à la fin du service est dit "**temps de blocage"**, représenté par la variable :

$$Z_\lambda = X.\mathbf{1}_{\{X \leq Y\}} + (Y + Z_\lambda^*).\mathbf{1}_{\{X > Y\}}, \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

où X, Y et Z_λ^* sont des v.a. non négatives et indépendantes, X désigne le temps de service avec interruption possible, Y le temps de défaillance du serveur supposé exponentiel de paramètre λ. Z_λ^* a la même distribution que Z_λ (on note $Z_\lambda^* \stackrel{d}{=} Z_\lambda$) et $\mathbf{1}_{\{X \leq Y\}}$ est la fonction indicatrice de l'événement $\{X \leq Y\}$ definé par 1 si l'événement $\{X \leq Y\}$ est vrai et 0 sinon.
Dimitrov et *Khalil* (1990) ont obtenu deux charactérisations de la distribution exponentielle du temps de service. *Lin* (1993) et *JIAN-LUN XU* (1998) ont obtenu une autre charactérisation via le coefficient de variation de Z_λ.

Dans notre travail, nous considérons une loi de service générale mais ayant une propriété qualitative (IFR, DFR, NBU ou NWU). Nous déterminons, dans le théorème (1) de la section (), les bornes inférieure et supérieure pour le temps moyen de blocage.

2. Main results

Soient $F_\lambda(t)$, $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ les fonctions distribution des v.a. Z_λ, X et Y, respectivement. Soit $\overline{F}_\lambda(t) = 1 - F_\lambda(t)$ et $\overline{G}(t) = 1 - G(t), \quad 0 \leq t < \infty$.
A partir de (1) et avec de simples transformations probabilistes on obtient

$$\overline{F}_\lambda(t) = \overline{G}(t)\exp(-\lambda t) + \int_0^t \overline{F}_\lambda(t-u)\overline{G}(u)\lambda\exp(-\lambda u), \quad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

En utilisant la relation (2) on peut déduire que le temps moyen de blocage EZ_λ vérifie :

$$P.EZ_\lambda = E(\min(X,Y)). \tag{3}$$

où,
$E(\min(X,Y)) = \int_0^t \overline{G}(t)\exp(-\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda}(1 - \mathcal{L}_X(\lambda))$.
$P = \int_0^t \lambda G(t)\exp(-\lambda t)\, dt = \mathcal{L}_X(\lambda) = P(X \leq Y)$.
Avec $\mathcal{L}_X(\lambda) = E(\exp(-\lambda X))$ est la transformée de Laplace-Stieltjes de la variable aléatoire X.
On suppose que la distribution de service appartient à la famille (IFR, DFR, NBU ou NWU). Les bornes inférieures et supérieures pour le temps moyen de blocage sont aisni obtenues :

Théorème 1. *On suppose que X est non dégénérée au point zéro et Y est exponentielle de moyenne $1/\lambda$. Alors X est DFR implique*

$$EZ_\lambda \leq \frac{x_0(e^r - e^{-\lambda x_0}) + (r + \lambda x_0)x_0^r I_r}{re^r + \lambda x_0 e^{-\lambda x_0} - \lambda(r + \lambda x_0)x_0^{-r} I_r},$$

où $I_r = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-r}e^{-\lambda t}dt$, $r > 0$ et $x_0 = r\left[\frac{EX^r}{\Gamma(r+1)}\right]^{1/r}$.

Démonstration.

La fonction de répartition G de X appartient à la classe DFR $\Rightarrow$

$$\overline{G}(x) \leq \begin{cases} e^{-(rx/x_0)} & , x < x_0 \\ \\ (x_0/x)^r e^{-r} & , x \geq x_0 \end{cases} \quad , \quad \text{with} \;\; x_0 = r\left[\frac{EX^r}{\Gamma(r+1)}\right]^{1/r}.$$

Alors,

$$E(\min(X,Y)) = \int_0^{\infty} \overline{G}(t) e^{-\lambda t} dt \leq \frac{x_0}{r+\lambda x_0}\left(1 - e^{-(r+\lambda x_0)}\right) + e^{-r} x_0^r \int_{x_0}^{+\infty} t^{-r} e^{-\lambda t} dt,$$

et

$$EZ_\lambda = EM/p \quad \text{avec} \;\; p = \mathcal{L}_X(\lambda) = 1 - \lambda EM. \tag{4}$$

D'où,

$$EZ_\lambda \leq \frac{x_0(e^r - e^{-\lambda x_0}) + (r+\lambda x_0) x_0^r I_r}{re^r + \lambda x_0 e^{-\lambda x_0} - \lambda(r+\lambda x_0) x_0^{-r} I_r},$$

où $I_r = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-r} e^{-\lambda t} dt$ converge pour tout $x_0 > 0$ and $r > 0$. □

Cas particulier : Si $r = 1$ et $x_0 = 1/\lambda$ alors,

$$EZ_\lambda \leq x_0 \left[\frac{\sinh 1 + I_1}{\cosh 1 - I_1}\right], \;\; x_0 = 1/\lambda, \;\; \text{et} \;\; I_1 = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Théorème 2. *Avec les mêmes conditions que le théorème (1), si X appartient à la classe IFR alors*

$$EZ_\alpha \geq \frac{(1 - e^{-(1+\lambda/\alpha)})}{\alpha + \lambda e^{-(1+\lambda/\alpha)}},$$

avec $\alpha = 1/EX$.

Démonstration.

La fonction de répartition G de X appartient à la classe IFR $\Rightarrow$

$$\overline{G}(x) \geq \begin{cases} e^{-\alpha t} & , t < 1/\alpha \\ \\ 0 & , t \geq 1/\alpha. \end{cases} \quad , \quad \text{tel que} \;\; \alpha = 1/EX.$$

D'où,

$$EM \geq \frac{1}{\lambda + \alpha}\left(1 - e^{-(1+\lambda/\alpha)}\right).$$

En utilisant (4) on obtient

$$EZ_\alpha \geq \frac{(1 - e^{-(1+\lambda/\alpha)}}{\alpha + \lambda e^{-(1+\lambda/\alpha)}}.$$

□

Théorème 3. *Avec les mêmes conditions que le théorème (1), si X appartient à la classe NBU alors*

$$EZ_\lambda \geq \frac{\beta + e^{-\beta} - 1}{\lambda(1 - e^{-\beta})}, \quad \beta = \lambda x_0.$$

Démonstration.

La fonction de répartition G de X appartient à la classe NBU $\Rightarrow$

$$\overline{G}(x) \geq \begin{cases} 1 - x/x_0 & , x < x_0 \\ \\ 0 & , x \geq x_0 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad x_0 = EX.$$

D'où,

$$EM \geq \frac{1}{x_0 \lambda^2} \left(\lambda x_0 + e^{-\lambda x_0} - 1 \right).$$

En utilisant (4) on obtient

$$EZ_\lambda \geq \frac{\beta + e^{-\beta} - 1}{\lambda(1 - e^{-\beta})}, \quad \beta = \lambda x_0.$$

$\square$

<u>Cas particulier</u> : Si $x_0 = 1/\lambda$ et $\beta = 1$ alors

$$EZ_\lambda \geq \frac{e^{-1}}{\lambda(1 - e^{-1})}.$$

Théorème 4. *Avec les lêles conditions que le théorème (1), si X appartient à la classe NWU alors*

$$EZ_\lambda \leq \frac{x_0 e^{\beta} I_1}{1 - \beta e^{\beta} I_1}, \quad \beta = \lambda x_0 \text{ et } I_1 = \int_{x_0}^{+\infty} t^{-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Démonstration. La fonction de répartition G de X appartient à la classe NWU $\Rightarrow$

$$\overline{G}(t) \leq \frac{x_0}{t + x_0}, \quad x_0 = EX, t \geq 0.$$

D'où,

$$EM \leq x_0 e^{\lambda x_0} I_1.$$

où I_1 converge et en utilisant la relation (4) on obtient le résultat pour $\beta = \lambda x_0$. $\square$

3. Conclusion

Dans ce travail, nous avons calculés des bornes inférieures et supérieures pour le temps moyen de blocage dans un système à serveur non fiable, lorsque le temps de service suit une loi appartenant à la classe IFR, NBU, DFR ou NWU et un temps de défaillance exponentiel. Ces bornes ont été calculées en utilisant les résultats de Sengupta sur les bornes d'une fonction de fiabilité quelconque.

Références

Sengupta, D. (1994). Another Look at the moment Bounds on Reliability. *J. Applied. Probability 31*, 777–787.

Adjabi, S. and Lagha, K. et al. (2004). Application des lois non paramétriques dans les systèmes d'attente et théorie de renouvellement. *An International Journal on Operations Research : RAIRO-Operations Research* Vol 38, N° 03, 243–254.

Dimitrov, B. and Khalil, Z. (1990). *On a new characterization of the exponential distribution related to a queueing system with an unreliable server. J. Appl. Prob. 27*, 221–226.

JIAN-LUN, XU. (1998). *Characterizations of the exponetial distribution via the blocking time in a queueing system with an unreliable server. J. Appl. Prob. 35*, 236–239.